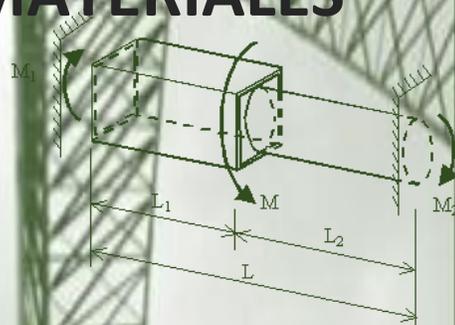




**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
ESIME-ZACATENCO



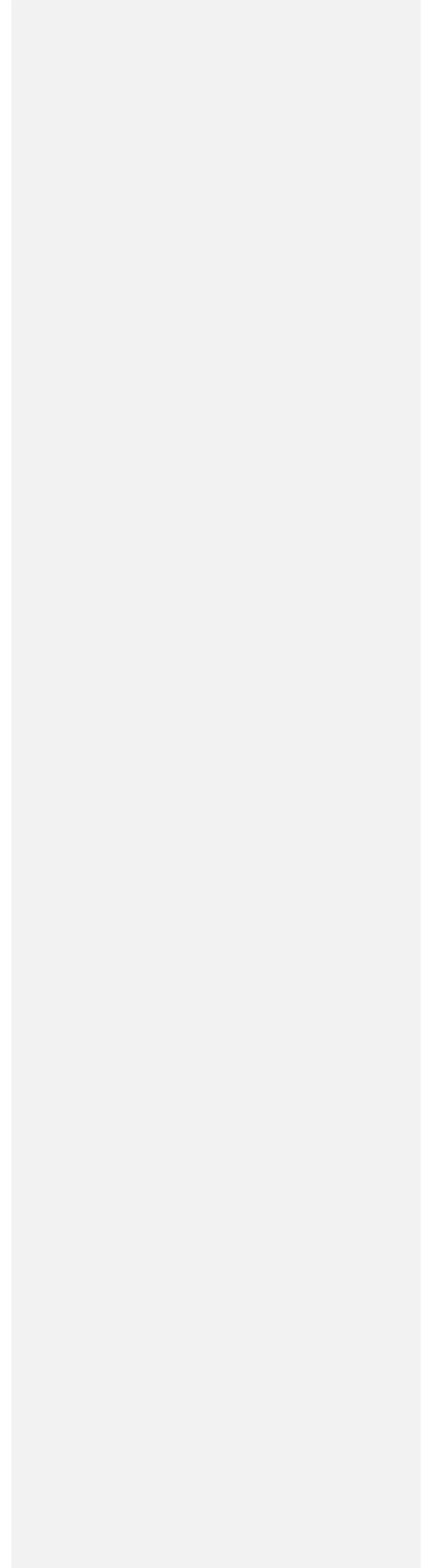
# FUNDAMENTOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES



**Autor: Prof. Sergio González García**

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$

**Fundamentos de la Resistencia de Materiales**



## PRÓLOGO

Estos apuntes se han elaborado con el propósito de ofrecer al estudiante, una presentación simple y breve de los principios básicos de la Resistencia de Materiales, para alcanzar los objetivos que se tienen en las unidades correspondientes al programa del curso de Teoría de Resistencia de Materiales, 4° Semestre de la carrera de Ingeniería Eléctrica, ESIME-ZACATENCO. Para lograr lo anterior, se ha procedido a elaborar los apuntes de esta materia en la misma forma en que se imparte el curso.

De acuerdo a la experiencia de impartir esta materia; para cumplir totalmente con el programa de esta asignatura en el tiempo oficial indicado para su realización; que es 4.5 horas por semana en un semestre que son aproximadamente 81 horas totales; el Contenido Sintético y su respectivo Desarrollo Programático se desarrollará en 4 Unidades o Capítulos, los cuales son descritos con sus respectivos temas y subtemas; en el contenido de este trabajo, el contemplar lo anterior se ha encontrado ser de más fácil asimilación por los estudiantes, respecto a los principios y métodos de cálculo de la Resistencia de Materiales y el desarrollo de sus habilidades, para establecer la estrategia de solución de situaciones de la mecánica de los cuerpos deformables dadas en ejemplos y ejercicios de trabajo.

Como la herramienta matemática nos facilita un medio sistemático para aplicar los principios de la Resistencia de Materiales, debe esperarse que el estudiante tenga conocimientos previos de álgebra, geometría, trigonometría y para su entendimiento mayor, principios de análisis matemático (cálculo escalar y vectorial); aunado a lo anterior debe ser competente en aplicar los principios de estática, los cuales son necesarios para un discernimiento de la mayoría de las expresiones algebraicas que se tienen y usan en Resistencia de Materiales.

La siguiente información de utilidad para el alumno durante el curso de esta asignatura; se ha incorporado entre el Índice Programático y la exposición de cada una de sus Unidades y temas respectivos:

- i)* El Alfabeto Griego; ya que algunos conceptos manejados en Resistencia de Materiales, se denotan con letras griegas,
- ii)* Procedimiento general, para la solución de ejemplos y ejercicios de Mecánica del Cuerpo Sólido, referido a Resistencia de Materiales. En este "Procedimiento general para la solución de ejemplos y ejercicios de Resistencia de Materiales", se pone a consideración del estudiante los principales lineamientos en un orden recomendado en el análisis de estos "problemas", que permiten simplificar su solución y reducir la probabilidad de errores.
- iii)* Prefijos normalizados del Sistema Internacional de Unidades SI; la aplicación de estos prefijos se requiere en los ejemplos y ejercicios numéricos, ya que estos se presentan en unidades del Sistema Internacional (SI)

Por la gran cantidad de fuentes de información del material didáctico vertido en este trabajo; me impide cumplir con los deseos de presentar un reconocimiento a cada uno de los autores de todas estas fuentes; material extraído conjuntamente a la preparación de las notas de enseñanza para la asignatura de Resistencia de Materiales con sus respectivos reactivos que se aplican en los diferentes tipos de evaluación y los debates subsecuentes en diferentes temas de la asignatura con estudiantes y colegas, profesores, a los que estoy enormemente agradecido.

S.G.G.

## ALFABETO GRIEGO

MAYUSCULAS	MINÚSCULAS	NOMBRE EN GRIEGO	NOMBRE ESPAÑOL	LETRA LATINA
A	α	αλφα	Alfa	A
B	β	βητα	Beta	B
Γ	γ	γαμμα	Gamma	G (ga, gue...)
Δ	δ	δεφλτα	Delta	D
E	ε	εψιλον	Épsilon	E (breve)
Z	ζ	ζητα	Dseta	Ds
H	η	ητα	Éta	E (larga)
Θ	θ	θητα	Zeta	Z (za, ce..)
I	ι	ιωτα	Iota	I
K	κ	καππα	Kappa	K (ca, ke...)
Λ	λ	λαμβδα	Lambda	L
M	μ	μυ	Mi	M
N	ν	νυ	Ni	N
Ξ	ξ	ξι	Xi	X (=ks)
O	ο	ομικρον	Ómicron	O (breve)
Π	π	πι	Pi	P
P	ρ	ρω	Rho	R, rr
Σ	σ, ζ	σιγμα	Sigma	S (ζ al final)
T	τ	ταυ	Tau	T
Υ	υ	υψιλον	Ípsilon	I (u francesa)
Φ	φ	φι	Fi	F
X	χ	χι	Ji	J (kh)
Ψ	ψ	ψι	Psi	Ps
Ω	ω	ωμεεγα	Omega	O (larga)

ii). **Procedimientos Generales para la Solución de Ejemplos y Ejercicios de Mecánica** del cuerpo sólido referido a Resistencia de Materiales

Una de las disposiciones más efectivas para estudiar la Resistencia de Materiales es resolver problemas; situaciones simuladas y acondicionadas de la ingeniería; dadas en ejemplos y ejercicios.

La realidad de buenos hábitos en el planteamiento de problemas y en la representación de sus soluciones resulta una ventaja invaluable. Cada solución deberá proceder con una secuencia lógica de etapas desde la hipótesis hasta la conclusión y su representación deberá incluir una exposición clara de las siguientes partes, cada una identificada en forma evidente.

- 1°) Datos dados
- 2°) Resultados deseados
- 3°) Diagramas necesarios
- 4°) Computo de resultados
- 5°) Soluciones y conclusiones

En base a lo anterior se sugiere la siguiente secuencia de etapas o pasos:

1. Lea el enunciado del problema cuidadosamente, las veces que sean necesarias, hasta poderle enunciar con sus propias palabras, tratando de correlacionar la situación física real presentada, con la teoría estudiada; estableciendo cuales datos son proporcionados y que resultados son requeridos, dando a cada dato e incógnita el símbolo que deberá representar en los diagramas y en las ecuaciones modelos matemáticos apropiados que cubran esta situación. Si no cumple debidamente esta etapa, será muy difícil proseguir con éxito en los siguientes pasos, para dar solución al problema por resolver.
2. Trace él o los croquis y diagramas que sean de utilidad. En situaciones que se tengan vectores fuerza, es de importancia trazar los diagramas de cuerpo libre apropiados; seleccionar un sistema conveniente de coordenadas de referencia, mostrando el origen, las direcciones de los ejes y sus sentidos positivos.
3. Decida, en base a la situación presentada en el problema a resolver y la relación con los principios de la mecánica de ingeniería involucradas en esta situación específica, cuales son los modelos matemáticos, dados en ecuaciones independientes, contengan los parámetros conocidos y desconocidos el número de ecuaciones independientes debe ser por lo mínimo, igual a número de parámetros desconocidos, (resultados, por conocer), para que se tenga una solución matemática compatible.
4. Identifique los parámetros conocidos y desconocidos de las ecuaciones linealmente independientes, con los datos dados y los resultados por conocer del enunciado del problema, disponiendo estos parámetros o valores en unidades congruentes, para asegurar que las ecuaciones linealmente independientes que se tengan, sean dimensionalmente homogéneas.
5. Si el número de ecuaciones linealmente independientes obtenidas al obtener el paso n° 3 es igual o mayor que el número de parámetros desconocidos; continuar los siguientes pasos en caso contrario, si por este paso n° 3, existen más incógnitas que ecuaciones independientes linealmente, es necesario obtener las ecuaciones adicionales en forma siguiente:
  - a) Mediante relaciones geométricas en el caso de equilibrio de cuerpos
  - b) Trazando diagramas de cuerpo libre de partes diferentes del sistema y repitiendo el paso n°3
6. Organice las ecuaciones linealmente independientes en un orden que simplifique su solución; resuelva las ecuaciones necesarias algebraicamente hasta donde sea práctico, después termine la solución numéricamente. Represente sus respuestas numéricas, con el número

## Fundamentos de la Resistencia de Materiales

apropiado de cifras significativas y en unidades coherentes. Encontrará que, en la mayor parte de los ejemplos y ejercicios, se dan los datos hasta con tres o cuatro cifras significativas. En general, al menos que se establezca lo contrario, puede suponer que todos los datos que se dan son exactos hasta tres cifras significativas.

7. Estudie las respuestas con juicio técnico y sentido común, haciendo las reflexiones y conclusiones que pueda, a partir de estas respuestas.
8. Una vez que el proceso de solución del problema ha sido concluido, pondere la posibilidad de que otros métodos diferentes, se obtengan las mismas respuestas a la solución del problema.

Aplicar este procedimiento general, requiere hacer el trabajo tan limpio como sea posible. Por lo general la limpieza en el trabajo estimula pensar claro y ordenadamente.

### iii) PREFIJOS "SI" NORMALIZADOS

Nombre	Símbolo	Factor
Teta	T	$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$
Giga	G	$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$
Mega	M	$1\ 000\ 000 = 10^6$
Kilo	k	$1\ 000 = 10^3$
Hecto	H	$100 = 10^2$
Deka	da	$10 = 10^1$
Deci	d	$0.1 = 10^{-1}$
Centi	c	$0.01 = 10^{-2}$
Milli	m	$0.001 = 10^{-3}$
Micro	$\mu$	$0.000\ 001 = 10^{-6}$
Nano	n	$0.000\ 000\ 001 = 10^{-9}$
Pico	p	$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$
Femto	f	$0.000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$
Atto	a	$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$

## CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b>	<b>I</b>
Información de utilidad	
i) ALFABETO GRIEGO	II
ii) Procedimiento General para la Solución de Ejemplos y Ejercicios de Trabajo	II
iii) Prefijos Normalizados de Unidades SI	IV
<b>UNIDAD 1</b>	
<b>FUNDAMENTOS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES</b>	<b>1</b>
1.0 Introducción( conceptos y principios básicos)	1
1.1. Conceptos de Deformación y Cuerpo Elástico	2
1.2. Suposiciones o Hipótesis Fundamentales	2
1.3. Método de las Secciones	4
1.4. Ejemplos de Discusión y ejercicios de trabajo	9
<b>UNIDAD 2</b>	
<b>ESFUERZO, DEFORMACIÓN Y ELASTICIDAD</b>	<b>17</b>
2.1. Tipos de Fuerzas	17
2.1.1. <i>Esfuerzos Directos</i>	17
2.1.2* <i>Deformaciones Unitaria Longitudinal</i>	18
2.2. Relación entre Esfuerzo Axial y Deformación Unitaria	19
2.2.1 ( <i>Módulo de elasticidad</i> )	19
2.3. Esfuerzo y Deformación Unitaria en Barras Compuestas	20
2.3.1 <i>Gráfica Esfuerzo - Deformación Unitaria (<math>\sigma</math>-<math>\epsilon</math>)</i>	22
2.3.2* <i>Esfuerzo Debido a Cambio de Temperatura</i>	29
2.4. Efecto de Cambio de Temperatura en Fuerzas Compuestas	32
2.5. Esfuerzo de Corte (Esfuerzo indirecto)	35
2.5.1 <i>Deformación Unitaria en el Esfuerzo de Corte</i>	40
2.5.2. <i>Relación entre el Esfuerzo de Corte y su Deformación Unitaria (Módulo de Corte o Módulo de Rigidez)</i>	41
2.6. Relación de Poisson (Deformación Unitaria Lateral en Tracción y Compresión)	43
2.7. Esfuerzos en Dos Dimensiones (Esfuerzos bidimensionales)	46
2.7.1* <i>Calculo de Recipientes de Pared Delgada</i>	47
2.8. Ejemplos de Discusión y Ejemplos de Trabajo	54
<b>UNIDAD 3</b>	
<b>TORSION DE FLECHAS CIRCULARES</b>	<b>69</b>
3.0. Diagramas de Momentos de Torsión	69
3.1. Esfuerzo de Corte y Ángulo de Torsión	72
3.2. Esfuerzo de Corte y Momento Torsional Externo	75
3.2.1* <i>Momento 2<sup>do</sup> Polar de Área y Modulo de Sección Polar para Barras Circulares Sólidas y Huecas</i>	77
3.3. Expresión General para Flechas Sólidas y Huecas	80
3.3.1* <i>Cálculo de Resistencia y Rigidez a la Torsión</i>	81
3.4. Ejemplos de discusión y Ejemplos de Trabajo	84

## Fundamentos de la Resistencia de Materiales

### UNIDAD 4

<b>FLEXIÓN EN VIGAS</b>	<b>103</b>
4.1. Consideraciones Generales (Introducción)	103
4.2. Fuerzas Cortantes y Momentos Flexionantes	106
4.2.1*. <i>Diagrama de Fuerzas Cortantes y Momentos Flexionantes</i>	109
4.3. Distribución de Esfuerzo Normal en Flexión	118
4.4. Posición del Eje Neutro ( Plano Neutral)	120
4.5. Relación entre el Esfuerzo Normal en Flexión y el Momento Flexionante Externo	121
4.6y Momento Segundo Axial de Área y el Módulo de Sección Axial para	
4.8 Secciones Estructurales más Comunes	122
4.7 Aplicaciones de la Expresión General de la Flexión Simple	126
4.9. Tablas de Propiedades Geométricas de Secciones Estructurales Normalizadas más Comunes	131
4.9.1* Cálculos de Resistencia a la Flexión	104
4.10. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo	140
Respuestas a los Ejercicios de Trabajo	158
Bibliografía	161

# 1

## FUNDAMENTOS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

### 1.0. Introducción (Conceptos y principios básicos)

La *resistencia de materiales* es una ciencia que estudia los métodos de ingeniería de cálculo a la *resistencia*, la *rigidez* y la *estabilidad* de los elementos de máquinas y construcciones estructurales.

La *resistencia* es la capacidad de una máquina, construcción estructural y de sus partes y elementos respectivos de contrarrestar una carga (fuerza externa aplicada) determinada, sin descomponerse.

La *rigidez* es la propiedad de una máquina, construcción estructural y de sus elementos respectivos, de oponerse a las cargas exteriores en lo que se refiere a las deformaciones (cambios de forma y dimensiones). Las deformaciones no deben exceder, cuando las cargas son determinadas, de ciertos valores fijados de acuerdo con las exigencias para la máquina o construcción estructural y sus elementos respectivos.

La *estabilidad* es la capacidad de una estructura, máquina o de sus elementos respectivos de conservar una forma inicial determinada de equilibrio elástico.

Con el propósito que las construcciones estructurales, máquinas o sus elementos respectivos, correspondan en general, a las exigencias de *resistencia*, *rigidez* y *estabilidad*, es necesario dar a sus elementos una forma más racional y determinar las dimensiones correspondientes.

La resistencia de materiales resuelve situaciones (problemas) como las señaladas basándose tanto en los datos teóricos como en los experimentales que tienen en esta ciencia igual importancia.

En la parte teórica la resistencia de materiales se fundamenta en la Mecánica teórica y las Matemáticas, mientras que en la parte experimental, en la Física y la ciencia de los materiales.

La resistencia de los materiales es la ciencia más general sobre la resistencia de las máquinas y construcciones estructurales. Sin el conocimiento de las bases fundamentales del curso de resistencia de materiales es inconcebible la producción de diferentes máquinas, mecanismos, construcciones civiles e industriales, líneas de transmisión de energía y antenas, hangares, barcos, aviones, helicópteros, turbo máquinas y máquinas eléctricas, técnica coheteril, equipos de energía nuclear, etc.

La resistencia de materiales no contempla todos los problemas de la mecánica del cuerpo sólido deformado. Otras disciplinas contiguas como la mecánica de construcción de los sistemas de estructuras espaciales, las teorías de elasticidad y plasticidad. Sin embargo, el papel principal en la solución de problemas de resistencia pertenece a la resistencia de materiales.

### 1.1. Conceptos de Deformación y Cuerpo Elástico

Los cuerpos reales pueden deformarse, es decir, cambiar su forma y dimensiones. Las deformaciones de los cuerpos suceden a causa de su carga con fuerzas o cambios de temperatura. Durante la formación del cuerpo sus puntos materiales lo mismo que líneas o secciones trazadas mentalmente, se desplazan en el plano o en el espacio respecto a su posición inicial.

Al cargar (aplicación de fuerzas externas) un cuerpo sólido, dentro de él surgen fuerzas interiores de interacción entre las partículas que se oponen a las fuerzas exteriores que tienden a recuperar la posición que ocupaban estas partículas antes de la deformación.

Cuando los valores de las fuerzas externas son pequeñas, el sólido, una vez que desaparece la carga, recobra de ordinario sus dimensiones iniciales. Esta propiedad de los sólidos se llama "elasticidad". Si el cuerpo después de quitarle la carga, recupera totalmente su forma y dimensiones iniciales, recibe el nombre de *perfectamente elástico*, y las deformaciones que desaparecen una vez que se suprime la carga, se dice que son *deformaciones elásticas*.

Experimentalmente se demuestra que la deformación elástica se cumple mientras las fuerzas que actúan sobre el cuerpo no superan un límite determinado para cada material del cuerpo; si la carga que actúa es mayor a este límite, el cuerpo además de la deformación elástica, recibe siempre una *deformación residual o plástica*.

Se considera vulneración de la resistencia de máquinas, construcciones estructurales y sus respectivos elementos, no solo su destrucción en el sentido literal de la palabra o a la aparición de grietas, sino también el surgimiento de deformaciones residuales. Por lo general al hacer los diseños las dimensiones de los elementos de máquina, y estructuras, se toman de tal modo que excluyan la producción de deformaciones residuales.

### 1.2. Suposiciones o Hipótesis Fundamentales

Para simplificar los cálculos de *resistencia, rigidez estabilidad* de los elementos de las estructuras y máquinas hay que recurrir a ciertas suposiciones o hipótesis sobre las propiedades de los materiales y el carácter de las deformaciones. Las suposiciones principales acerca de las propiedades de los materiales se reducen a que, los que se utilizan en la construcción de los elementos de las estructuras y máquinas se consideran *homogéneos, macizos o continuos con las mismas propiedades en todas las direcciones*.

Las suposiciones fundamentales acerca del carácter de las deformaciones consisten en lo siguiente:

1. Los desplazamientos que se producen en los cuerpos elásticos, por la acción de las fuerzas exteriores son muy pequeños en comparación con las dimensiones de los elementos de que se trata. Esta suposición permite en muchos casos omitir la variación de las dimensiones de los cuerpos durante la deformación y el cambio que debido a esto, experimenta la disposición de las fuerzas.

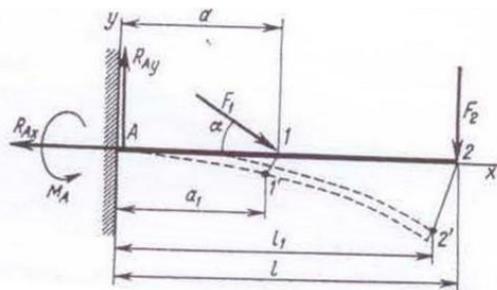


Figura 1.1.

Consideremos un cuerpo elástico sometido a la acción de cierto sistema de fuerzas (fig. 1.1.) A causa de la deformación del cuerpo varía la disposición mutua de las fuerzas, sus puntos de aplicación, se desplazan: el punto de aplicación de la fuerza  $F_1$  pasa de la posición 1 a la 1', y el de aplicación de la fuerza  $F_2$ , de la posición 2 a la 2'; la distancia de los puntos de aplicación de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ , de la posición 2 a la 2'. Las distancias de los puntos de aplicación de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  al empotramiento en el apoyo, disminuye.

Teniendo en cuenta que esta variación de la distancia es muy pequeña se puede admitir que  $l_1 \approx l$   $a_1 \approx a$

- El desplazamiento de los puntos de un cuerpo elástico es directamente proporcional a las cargas que actúan. Esto es correcto dentro de unos límites de carga conocidos. Los elementos y las estructuras que se subordinan a esta suposición se dice que son *deformables linealmente*.

Un ejemplo que aclara la esencia de la dependencia directamente proporcional entre las cargas y los desplazamientos se da en la figura 1.2. Bajo la acción de la fuerza  $F$ , el punto A de la barra, representado en la figura 1.2.a, se desplaza en la magnitud  $f$  y bajo la acción de la fuerza  $3F$ , el desplazamiento de este punto será tres veces mayor (fig. 1.2b).

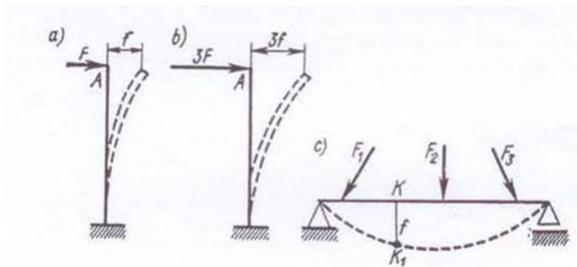


Figura 1.2.

- En virtud de la pequeñez del desplazamiento que surgen y de la dependencia directamente proporcional de dichos desplazamientos respecto de las cargas, al calcular los elementos de las máquinas y estructuras, se puede suponer que las fuerzas exteriores actúan independientemente unas de otras. Esta suposición se conoce con el nombre de *principio de la independencia de la acción de las fuerzas* (o principio de superposición) Lo explicaremos con un ejemplo. Al cuerpo que

representa la figura 1.2c. esta aplicado cierto sistema de fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ . Bajo la acción de estas fuerzas el cuerpo se deforma y uno de sus puntos,  $K$ , se desplaza a su posición  $K_1$ . La carga dada se puede aplicar por muchos procedimientos distintos. Las tres fuerzas pueden aplicarse simultánea o sucesivamente. En ambos casos la flexión en el punto  $K$  será la misma o igual a la suma de las flexiones debida a cada una de las fuerzas aplicadas

Otras suposiciones o hipótesis aplicables a distintos tipos de deformación se dan a conocer en las respectivas partes del curso.

Muchos postulados de estática válidos para el sólido indeformable no se pueden aplicar cuando se estudian las deformaciones de un cuerpo elástico. Así, en la estática una fuerza siempre se puede trasladar a lo largo de su línea de acción. Esto no puede hacerse en el caso de un cuerpo elástico, porque la traslación de la fuerza puede hacer cambiar bruscamente el efecto de la carga. En la figura 1.3a y b se muestra esto para un caso particular; en la primera variante experimental la tracción toda la barra  $AC$ , mientras que en la segunda solo la sufre su parte  $BC$ . Análogamente, no siempre es posible sustituir un sistema de fuerzas por otro estáticamente equivalente. Así, en particular, no puede sustituirse un sistema de fuerzas por su resultante.

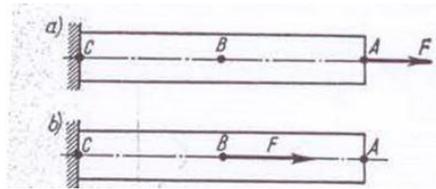


Figura 1.3.

### 1.3. Métodos de las Secciones (Tipos de deformaciones)

Se llaman *barras* los elementos estructurales cuya longitud es mucho mayor que sus dimensiones transversales. Además de las barras pueden encontrarse *placas bóvedas*, en las cuales solamente una dimensión (el grosor) es pequeña en comparación con las otras dos, y *bloques*, en los cuales las tres dimensiones son aproximadamente iguales. El cálculo de resistencia de las placas, bóvedas y bloques es mucho más complejo que el de las barras y se estudia en cursos especiales.

Como se indicó antes, las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo producen en él fuerzas internas adicionales que tienden a oponerse a la deformación. Las fuerzas internas que surgen en un cuerpo sometido a carga se ponen de manifiesto utilizando el método de las secciones. La esencia de este método consiste en que las fuerzas exteriores aplicadas a la parte cortada del cuerpo se equilibran con las fuerzas internas que surgen en el plano de la sección y sustituyen la acción de la parte separada del cuerpo sobre la restante.

Una barra en equilibrio (fig. 1.4a) se ha cortado en dos partes I y II (fig. 1.4b). En la sección surgen fuerzas internas que equilibran a las fuerzas exteriores aplicadas a la parte que queda. Esto permite aplicar a cualquiera de las partes I o II del cuerpo las condiciones de equilibrio que, en el caso general de un sistema de fuerzas espacial (tridimensional), de seis ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \sum F_{iz} = 0 ,$$

$$\sum M_{ix} = 0 \quad \sum M_{iy} = 0 \quad \sum M_{iz} = 0$$

Estas ecuaciones permiten encontrar las componentes de las fuerzas y momentos internos de la sección cortada transversal.

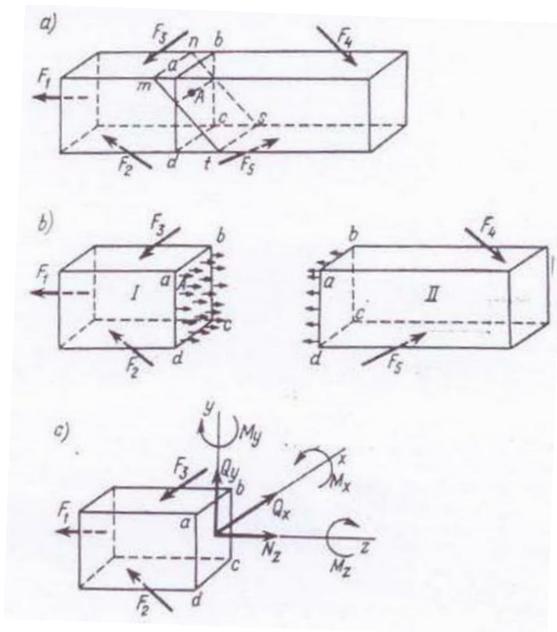


Figura 1.4

Cuando actúa un sistema de fuerzas espacial, de las ecuaciones de equilibrio se pueden hallar las tres fuerzas componentes  $N_z$ ,  $Q_x$  y  $Q_y$ , dirigidas según los ejes de coordenadas; y los tres componentes del momento  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  (componentes del momento resultante de las fuerzas internas) que surgen en la sección transversal. *Estas fuerzas y momentos son factores de fuerza internos* (fig. 1.4c) y, respectivamente, se denominan:  $N_z$ : fuerza longitudinal,  $Q_x$  y  $Q_y$ , fuerzas transversales;  $M_x$  y  $M_y$ , momentos flectores, y  $M_z$  momento torsor.

En casos particulares algunos de los factores de fuerza internos pueden ser nulos.

Así, si sobre una barra actúa un sistema de fuerzas coplanares (en el plano longitudinal  $zy$ ) en sus secciones pueden surgir únicamente tres factores de fuerza: el momento flector  $M_x$  y las dos componentes del vector resultante de este sistema, la fuerza transversal  $Q_y$  y la fuerza longitudinal  $N_z$ . Respectivamente, para este caso se pueden plantear tres ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \quad \sum M_{ix} = 0 ,$$

Los ejes de coordenadas de acuerdo al sistema considerado son: el eje z, a lo largo de la barra; los ejes x, y, a lo largo de los ejes centrales principales de su sección transversal, y el origen de coordenadas, en el centro de gravedad de la sección.

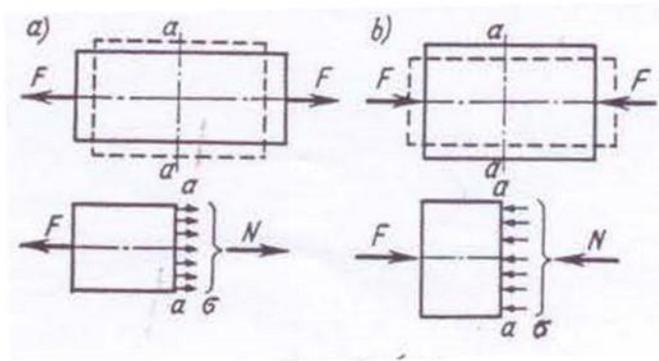


Figura 1.5

Para determinar los factores de fuerzas internas hay que proceder observando el orden siguiente:

1. Se traza mentalmente la sección por el punto que nos interesa de la estructura o de la barra.
2. Se separa una de las partes cortadas y se considera el equilibrio de la que queda.
3. Se plantean las ecuaciones de equilibrio para la parte que queda y por ellas se determinan los valores y direcciones de los factores de fuerza internos.

Los factores de fuerza internos que surgen en la sección transversal de la barra determinan su estado de deformación.

En el caso de la *tracción* o la *compresión axial*, las fuerzas internas se pueden sustituir en la sección transversal por una fuerza dirigida a lo largo del eje de la barra (fig. 1.5), o sea, por la fuerza longitudinal \$N\$ (el subíndice z, por regla general lo omitiremos) si la fuerza está dirigida hacia la parte separada, es decir, hacia fuera, se tratará de una tracción (fig. 1.5a) Si, por el contrario, está dirigida desde la parte separada hacia dentro (fig. 1.5b), será una compresión.

El *deslizamiento* o *cizallamiento* o corte se produce cuando en la sección transversal de la barra las fuerzas internas se reducen a una situada en el plano de la sección (Fig. 1.6), o sea a la fuerza transversal \$Q\$.

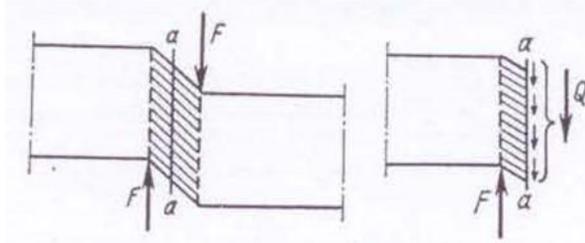


Figura 1.6

En la *torsión* surge un solo factor de fuerza interno, el momento torsional  $M_z = M_t$  (fig. 1.7).

Si en la sección solo se produce un momento flector  $M_x$  o  $M_y$  (fig. 1.8), tiene lugar la *flexión simple o pura*. Si además del momento flector surge en la sección una fuerza transversal, la flexión se llama transversal. En los casos en que en las secciones transversales de la barra actúan simultáneamente varios factores de fuerzas internos pertenecen a los tipos complejos de estado de deformación.

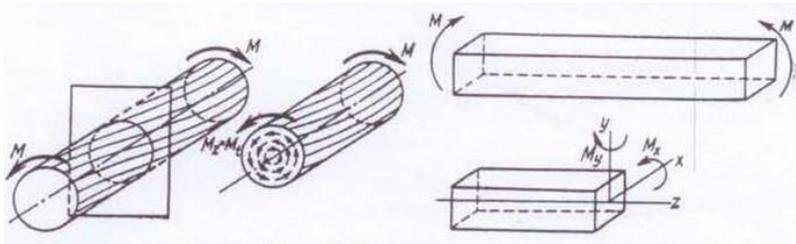


Figura 1.7

Figura 1.8

Para hacer los cálculos de resistencia, rigidez y estabilidad de los elementos de las estructuras es necesario primeramente determinar, por el método de las secciones los factores de fuerza internos que se producen; veamos el siguiente ejemplo demostrativo.

*Ejemplo 1.3.1.T.D.* Una barra cuadrada en forma de *L* invertida, sujeta rígidamente a tierra por su extremo interior (fig. 1.9a) soporta en su extremo libre la carga de una fuerza vertical  $F$ . Determinar el estado de deformación de las partes horizontal y vertical de dicha barra.

*Solución.* El esquema para el cálculo de la barra se representa en la fig. 1.9a. Examinamos primeramente la parte horizontal. Cortamos esta parte, a una distancia arbitraria  $z$  del extremo libre, con un plano I-I perpendicular al eje separamos la parte izquierda, fija, de la barra. A la parte que queda está aplicada la fuerza exterior  $F$ , y en la sección tomada surgen factores de fuerza internos. Como

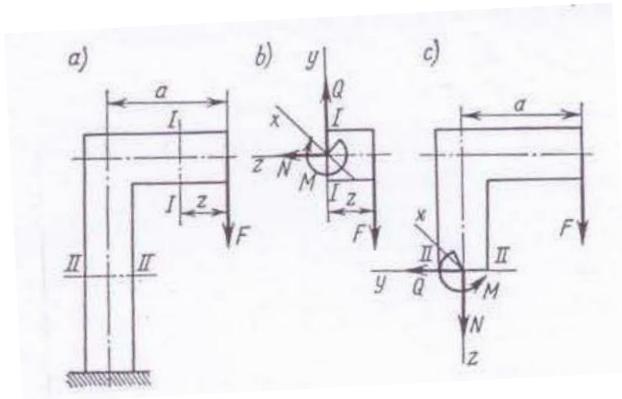


Figura 1.9

la fuerza  $F$  se halla en el plano del eje de la parte de la barra que consideramos, las fuerzas internas forman un sistema plano y solo pueden dar tres componentes  $M$ , momento flector  $Q$ , fuerza transversal, y  $N$ , fuerza longitudinal (fig. 1.9b). Planteamos las tres ecuaciones de equilibrio para la parte cortada de la barra:

$$\sum F_{iy} = 0; -F + Q = 0,$$

de donde:

$$Q = F,$$

$$\sum F_{iz} = 0; N = 0;$$

$$\sum M_{ix} = 0; M - Fx = 0,$$

de donde  $M = Fz$ .

Así, en las secciones del trozo horizontal surgen dos factores de fuerza internos, un momento flector y una fuerza transversal (la fuerza longitudinal es nula;  $N = 0$ ).

Hemos establecido que la parte horizontal de la barra está sometida a flexión transversal.

Determinemos ahora el tipo de estado de deformación de la parte vertical de la barra para ello cortamos dicha parte con el plano II-II (fig. 1.9a), y separamos el trozo inferior, fijo, de la barra. Consideramos el trozo que queda. Trazamos los ejes de coordenadas y representamos los factores de fuerza internos (fig. 1.9c). Lo mismo que en la parte horizontal, las fuerzas internas forman un sistema plano, es decir, pueden surgir tres factores de fuerza internos;  $M$ , momento flector;  $Q$ , fuerza transversal, y  $N$ , fuerza longitudinal.

Planteamos las tres ecuaciones de equilibrio para la parte cortada de la barra:

$$\sum F_{iy} = 0; Q = 0,$$

$$\sum F_{iz} = 0; N + F = 0,$$

de donde:

$$N = -F;$$

$$\sum M_{ix} = 0; Fa - M = 0,$$

de donde:

$$M = Fa;$$

Así, en las secciones de la parte vertical surgen dos factores de fuerza internos; el momento flector  $M$  y la fuerza de compresión  $N$  (en realidad la fuerza  $N$  está dirigida hacia la sección). Esto significa que el trozo vertical de la barra experimental, flexión simple y compresión.

#### 1.4. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo.

*Ejemplos de discusión:*

1.1. e.d. Hallar las reacciones internas (factores de fuerza internos) en la sección  $a-a$  y  $b-b$  de la ménsula mostrada en la figura 1.10.

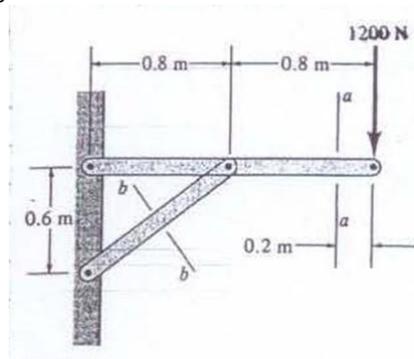


Figura 1.10

*Solución:* Un *dcl* (diagrama de cuerpo libre) de la ménsula como un cuerpo rígido se muestra en la figura 1.11a. Obsérvese que  $BC$  es un cuerpo de dos fuerzas tal que  $F_{BC}$  deberá tener la dirección mostrada, por lo que:

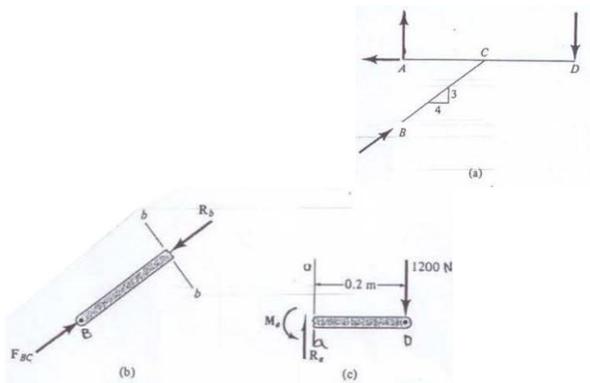


Figura 1.11

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &= 0.6(-\uparrow) \times \left( \frac{4}{5} F_{BC} \uparrow + \frac{3}{5} F_{BC} \uparrow \right) + 1.6\hat{l} \times 1200(\hat{j}) \\ &= 0.6 \left( \frac{4}{5} \right) F_{BC} \hat{k} - (1.6 \times 1200) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\therefore F_{BC} = \frac{5}{4} (3200) = 4000N$$

Del *dcl* mostrado en la figura 1.11b, tenemos:

$$R_b = F_{BC} = 4000N \text{ compresión}$$

La figura 1.11c muestra el *dcl* de la porción del miembro horizontal a la derecha de la sección *a-a* y de acuerdo las condiciones de equilibrio de esta parte del miembro horizontal tenemos:

$$\sum F_y = 0 = R_a - 1200 \Rightarrow R_a = 1200N \text{ corte y tomando momentos respecto al extremo izquierdo de esta porción}$$

$$\sum M_{a-a} = M_a - 0.2(1200) = 0 \Rightarrow M_a = 240N \cdot m \text{ flexión}$$

- 1.1. Para el eje acodado en la figura 1.12a determine las reacciones internas (factores de fuerza internos) en la sección *a-a* y en la sección *b-b*.

*Solución:* un *dcl* de la parte del eje acodado a la derecha de la sección *a-a* es mostrada en la figura 1.12b con las reacciones internas designadas como  $R_N$ ,  $R_C$ ,  $C_T$  y  $C_f$ . Son  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  vectores unitarios ortogonales.<sup>6</sup>

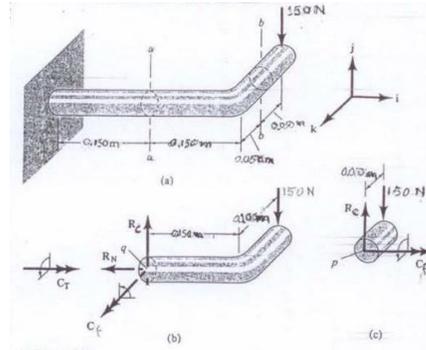


Figura 1.12

Entonces de acuerdo a las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} = 150\mathbf{j} - R_N\mathbf{l} + R_C\mathbf{j}$$

$\therefore R_N = 0\text{N}$  y  $R_C = 150\text{N}$ , en las direcciones mostradas en el *dc* respectivo

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_q = \mathbf{0} &= (0.150\mathbf{l}) \times (-150\mathbf{j}) + c_f\mathbf{k} + \\ &+ (-0.100\mathbf{k}) \times (-150\mathbf{j}) + C_T\mathbf{l} \\ &= (-22.5\mathbf{k}) + C_f\mathbf{k} + (-15\mathbf{l}) + C_T\mathbf{l} \end{aligned}$$

$\therefore C_f = 22.5\text{Nm}$  y  $C_T = 15\text{Nm}$ , como se muestra en el *dc* figura 1.13b.

De aquí, en la sección *a-a* el eje acodado está siendo cortado, torcido y flexionado simultáneamente.

El *dc* para la sección *b-b* mostrado en la figura 1.12c con las reacciones internas  $R_C$  y  $C_f$  (deberá ser evidente que no existe fuerza normal ni par torsional (*momento torsional externo*) en esta sección)

Considerando las condiciones de equilibrio tenemos:

$$\sum \mathbf{F} = -150\mathbf{j} + R_C\mathbf{j} = 0 \Rightarrow R_C = 150\text{N} \text{ como se muestra y}$$

$$\sum \mathbf{M}_p = (-0.050\mathbf{k}) \times (-150\mathbf{j}) + c_f\mathbf{l} = 0 = -7.5\mathbf{l} + C_f\mathbf{l} \Rightarrow C_f = 7.5\text{Nm},$$

Como se muestra en la figura 1.12c.

De aquí, la sección *b-b* él está siendo cortado, y flexionado pero no torcida.

**Nota:** El vector  $\mathbf{C}$  representa el momento de un "par de fuerzas" que se pueden tener induciendo reacciones internas de corte, torsión y flexión.

1.2.e.d. Calcular las reacciones internas (factores de fuerza internos para la barra en forma de escuadra de la figura 1.13a en las secciones A-A y B-B respectivamente.

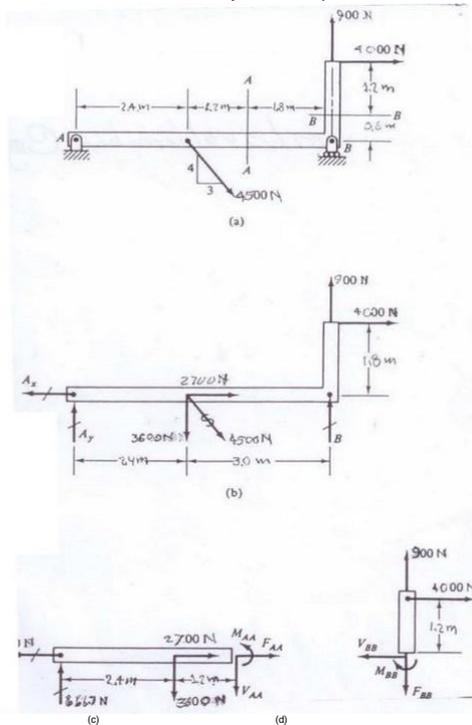


Figura 1.13

*Solución:* Del diagrama de cuerpo libre (dc) de la barra en forma de escuadra mostrada en la figura 1.13b determinamos las fuerzas en las reacciones A y B con la condiciones de equilibrio.

$$\uparrow \sum M_A = -2.4(3600) + 5.4B + 5.4(900) - 1.8(4000) = 0$$

$$\therefore B = 2033.\bar{3} \approx 2033.3N$$

$$\curvearrowright \sum M_B = -5.4 A_y + 3(3600) - 1.8(4000) = 0$$

$$\therefore A_y = 666.\bar{6} \approx 666.7N$$

$$\uparrow \sum F_x = -A_x + 2700 + 4000 = 0$$

$$\therefore A_x = 6700N$$

Verificando para  $\sum F_y$

$$\begin{aligned}\uparrow \sum F_y &= A_y + B - 3600 + 900 = 0 \\ &= 666.7 + 2033.3 - 3600 + 900 = 0 \\ &= 2700 - 2700 = 0\end{aligned}$$

Para la sección A-A, el dcl de la barra en forma de escuadra a la izquierda de esta sección figura 1.13c los factores de fuerza internas están representados por  $F_{A-A}$  para fuerza axial,  $V_{A-A}$  para la fuerza de corte y  $M_{A-A}$  para el momento flexionante. Aplicando las condiciones de equilibrio se tiene:

$$\rightarrow \sum F_x = 2700 - 6700 + F_{A-A} = 0$$

$$\therefore F_{A-A} = 4000N \text{ (tracción).}$$

$$\uparrow \sum F_y = 666.7 - 3600 - V_{A-A} = 0 \Rightarrow$$

$$\therefore V_{A-A} = -2933.3N = 2933.3N \uparrow$$

$$\rightarrow \sum M_{A-A} = -3.6(666.7) + 1.2(3600) + M_{A-A} = 0$$

$$\therefore M_{A-A} = 1919.88Nm \approx 1920Nm$$

Para la sección B-B, del dc figura 1.13d, se determinan los factores de fuerza interna  $F_{B-B}$ ,  $V_{B-B}$  y  $M_{B-B}$ ; aplicando las ecuaciones de equilibrio para esta parte de la barra en forma de escuadra.

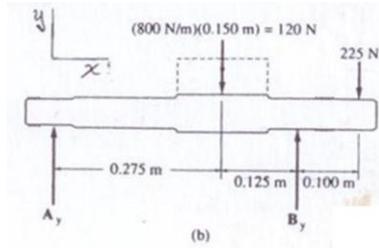
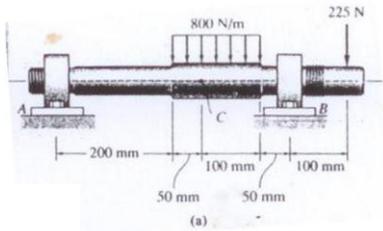
$$\uparrow \sum F_y = 400 - F_{B-B} = 0 \Rightarrow F_{B-B} = 900N \text{ (tracción)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 4000 - V_{B-B} = 0 \Rightarrow V_{B-B} = 4000 \leftarrow \text{(tracción)}$$

$$\curvearrowright \sum M_{B-B} = -1.2(4000) - M_{B-B} = 0 \Rightarrow M_{B-B} = -4800Nm \curvearrowleft$$

1.3.e.d. Determine los factores de fuerzas internas resultantes para actuar en la sección transversal que pasan por el punto C en la fecha de máquina que se muestra en la figura 1.14a.

*Solución:* Del dcl, de toda la flecha, podemos calcular las reacciones en las partes A y B de la figura 1.4b.



$$\sum M_A = 0 = -(120)(0.275) + B_y(0.400) - (225)(0.500)$$

$$\therefore B_y = 363.75N$$

$$\uparrow \sum F_y = A_y - 120 + 363.75 - 225$$

$$\therefore A_y = -18.75N, \text{ el signo negativo indica } A_y \downarrow$$

Del dcl de la parte izquierda de la flecha (AC) mostrada en la figura 1.14c, tenemos:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 = N_C; \uparrow \sum F_y = 0 = -18.75 - 40 - V_C$$

$$\therefore V_C = -58.75N,$$

$$\sum M_C = 0 = M_C + 0.025(40) + 0.250(18.75)$$

$$\therefore M_C = -5.689Nm$$

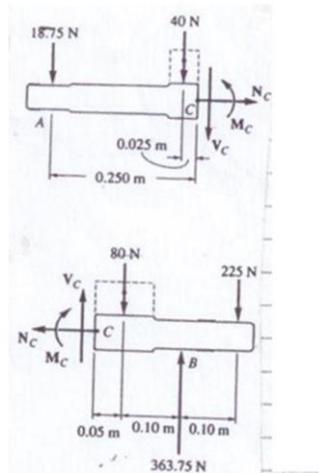


Figura 1.14

Para verificar los resultados anteriores de  $N_C$ ,  $V_C$  y  $M_C$ , tomaremos el dcl del segmento  $C_B$  (fig. 1.14c y aplicando las ecuaciones de equilibrio a esta sección de la flecha tenemos:

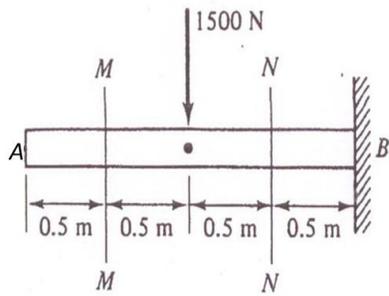
$$\rightarrow \sum F_x = 0 = N_C; \uparrow \sum F_y = 0 = V_C - 80 + 363.75 - 225 \Rightarrow V_C = -58.75N$$

$$\sum M_C = 0 = -M_C - 0.05(80) + 0.15(363.75) - 0.250(225) \Rightarrow M_C = -5.689Nm$$

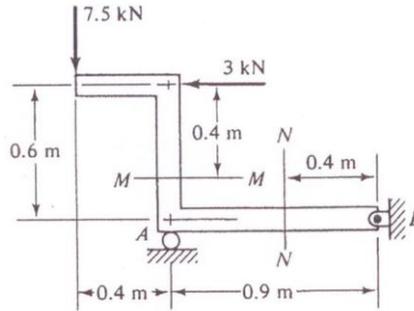
Los signos negativos de  $V_C$  y  $M_C$  indican que su sentido es contrario al considerado en los dcl de los segmentos  $A_C$  y  $C_B$ .

*Ejercicios de trabajo:*

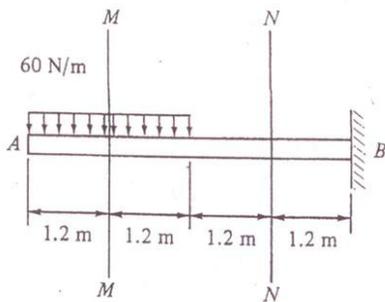
De los ejercicios 1.1.e.t. al 1.10.e.t. mostrado con sus figuras respectivas. Calcular los factores de fuerzas internas (reacciones internas) para cada dispositivo mostrado en la sección o secciones indicadas.



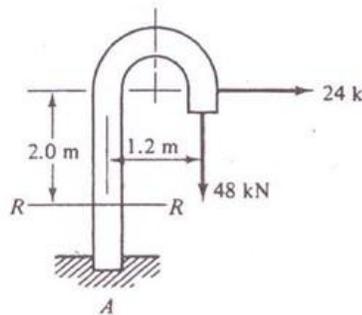
Ejercicio 1.1.e.t.



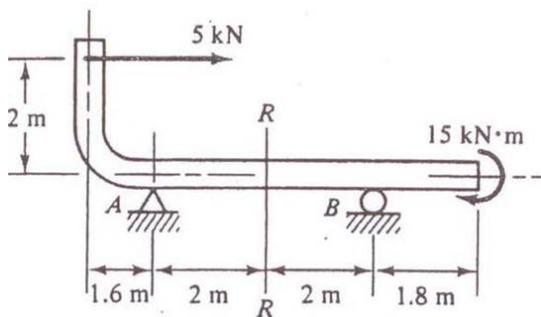
Ejercicio 1.2.e.t.



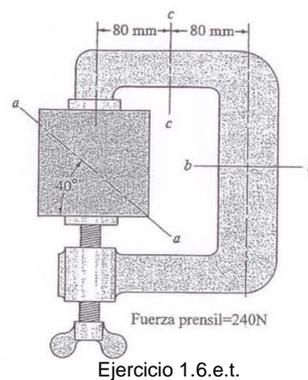
Ejercicio 1.3.e.t.



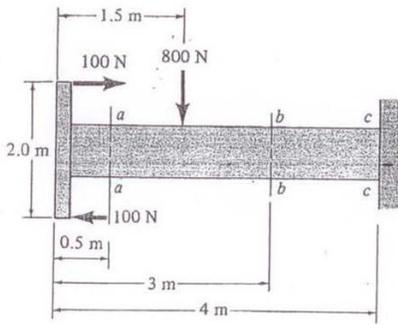
Ejercicio 1.4.e.t.



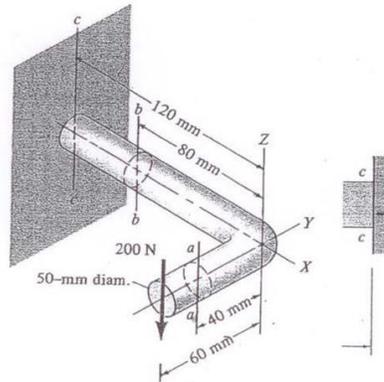
Ejercicio 1.5.e.t.



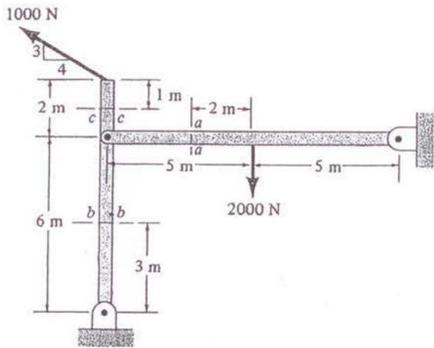
Ejercicio 1.6.e.t.



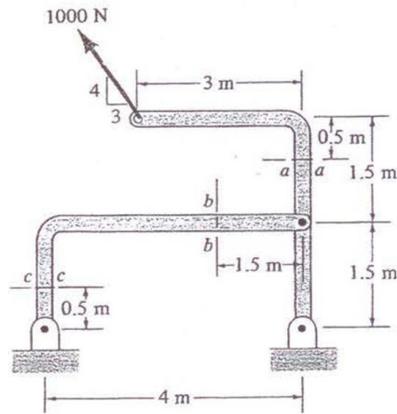
Ejercicio 1.7.e.t.



Ejercicio 1.8.e.t.



Ejercicio 1.9.e.t.



Ejercicio 1.10.e.t.

## 2 ESFUERZO, DEFORMACIÓN Y ELASTICIDAD

### 2.1. Tipos de Fuerzas

En Resistencia de Materiales se tienen tres tipos fuerzas (cargas) principales, las que se pueden aplicar a un material de un elemento (barra), que le producen a este cuerpo fuerzas internas adicionales, que tienden a oponerse a su deformación(tema 1.3).

- i) Fuerza de tracción de estiramiento (figura 2.1a)
- ii) Fuerza de compresión o apretujamiento (figura 2.1b)
- iii) Fuerza de corte de deslizamiento (figura 2.1c)

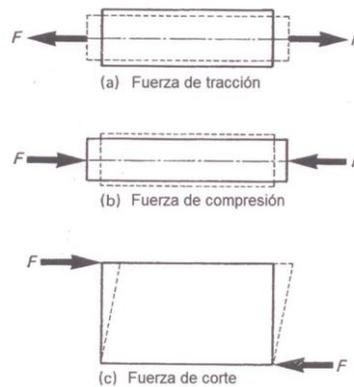


Figura 2.1. Tipos de fuerzas

Las fuerzas de Tracción y compresión son fuerzas *directas*, .Las *fuerzas directas* son también conocidas como fuerzas *uniaxiales*, puesto que estas fuerzas opuestas en dirección, actúan en una sola línea de acción, induciendo esfuerzos directos en el material de elemento donde actúan (ver tema 2.1.1). Las fuerzas de corte son *fuerzas indirectas*, ya que sus líneas de acción de las fuerzas opuestas en dirección, deberán ser paralelas formando un *par de fuerzas*<sup>1</sup> como se muestra en la figura 2.1c para que el corte suceda. Dependiendo de la posición del plano donde actúa el par de fuerzas sobre un elemento, este par de fuerzas inducirá esfuerzos de corte (cizallamiento), de torsión o de flexión (temas 1.5, 3.1 y 4.3)

#### 2.1.1. Esfuerzos directos

Los esfuerzos directos se definen como la fuerza aplicada  $F$  por unidad de área de la sección transversal  $A$  que esta resistiendo a la fuerza, es decir,

<sup>1</sup>Par de fuerzas son dos fuerzas paralelas de igual magnitud pero de sentidos contrarios.

$$\text{Esfuerzo directo} = \frac{\text{Fuerza Aplicada}}{\text{área de la sección transversal resistente a la fuerza}}$$

Los esfuerzos directos pueden ser de tracción o compresión, como se ilustra en la figura 2.2.

El símbolo usado para el esfuerzo directo es:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

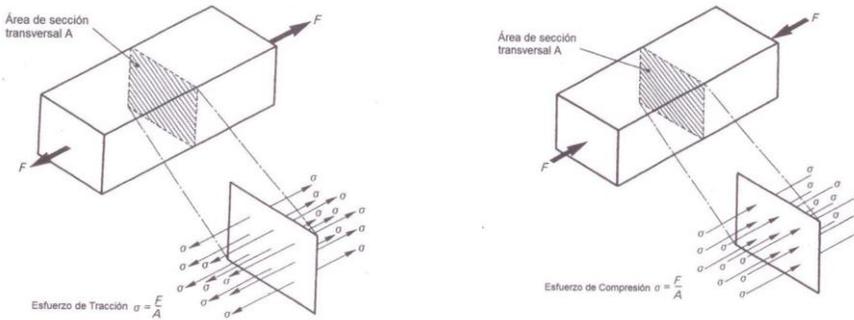


Figura 2.2.

La unidad básica para el esfuerzo es el  $(N/m^2)$ . Ya que esta unidad es muy pequeña, la unidad Mega Pascal  $(MN/m^2)$  con frecuencia se utiliza, y las unidades de Newton por  $mm^2$ ,  $N/mm^2$  y el Mega Pascal  $(MPa)$  también se usan, es útil recordar que  $(N/mm^2)$  es igual a un Mega Pascal.

### 2.1.2. Deformación unitaria

La deformación unitaria se define como la variación en dimensiones ( $x$ ); deformación por unidad de dimensión original ( $l$ ) es decir:

$$\text{Deformación Unitaria} = \frac{\text{Cambio en dimensiones (deformación)}}{\text{Dimensión Original}}$$

La deformación unitaria puede ser de tracción (tensión) compresión o de corte. La deformación unitaria de tracción ocurre cuando se tiene un incremento en la dirección original y la deformación unitaria de compresión ocurre cuando existe un decremento. La deformación unitaria de corte se discutirá en el tema (2.5.1)

El símbolo que se usa para la deformación unitaria por tracción o compresión es “ $\epsilon$ ”

$$\therefore \epsilon = \frac{x}{l}$$

Puesto que la deformación unitaria es una relación de cantidades iguales, esta no tiene unidades.

## 2.2. Relación entre Esfuerzo Axial Directo y Deformación Unitaria

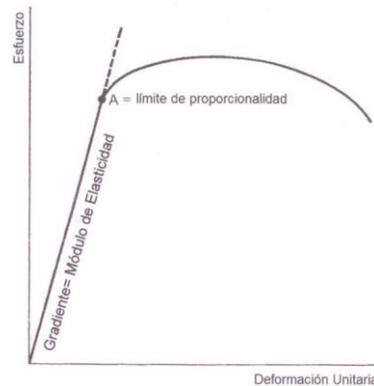


Figura 2.3. Gráfica Esfuerzo-Deformación Unitaria para un material

Como se ha establecido en la unidad 1; todos los materiales sólidos cambian su forma cuando son ligeramente sometidos a esfuerzos. Si un material regresa a su forma y medidas iniciales cuando el esfuerzo es removido este es un material elástico. La mayoría de los materiales sólidos son elásticos hasta un cierto límite de esfuerzo conocido como límite elástico; una excepción común es la del plomo a la temperatura ambiente de un cuarto. La gráfica esfuerzo-deformación unitaria para un material elástico se muestra en la figura 2.3 en la que hasta un punto el cual estará justamente abajo del límite elástico, la gráfica es una línea recta, es decir; hasta el punto A (límite de proporcionalidad) figura 2.3, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación unitaria; que expresa la ley de Hooke para esfuerzos directos o normales, por lo que:

$$\sigma \propto \varepsilon$$

$$\therefore \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{una constante}$$

### 2.2.1. Módulo de elasticidad

Esta constante es conocida como el MÓDULO DE ELASTICIDAD O MÓDULO DE YOUNG,  $E$ , para el material, es decir:

$$\text{Módulo de elasticidad} = \frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación Unitaria}} = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Las unidades básicas en el sistema SI para  $E$  es la misma que para el esfuerzo, es decir  $N/m^2$ ; sin embargo, la unidad múltiplo del  $N/m^2$ , que usaremos frecuentemente en el Giga Newton sobre metro cuadrado ( $GN/m^2$ ).

Tabla 2.1. Valores típicos de la elasticidad de algunos materiales

MATERIAL	MÓDULO DE ELASTICIDAD (N/M2)
Acero al carbono	210 x 10 <sup>9</sup>
Cobre	120 x 10 <sup>9</sup>
Hierro fundido	100 x 10 <sup>9</sup>
Latón	90 x 10 <sup>9</sup>
Aleaciones de aluminio	90 x 10 <sup>9</sup>

**Ejemplo típico demostrativo**

Ejemplo 2.1. T.D.

En una prueba de tracción para una máquina de ensaye de materiales en la probeta de acero un extensómetro registro un incremento en la longitud de 0.117mm para una carga aplicada de 60 kN si el diámetro y la longitud calibrada original de la probeta de 15.96 mm y 80 mm respectivamente, determinar el módulo de elasticidad para el acero (material dela probeta).

*Solución:*

Datos:  $x = \Delta l = 0.117mm$ ,  $F = 60kN = 60 \times 10^3N$ ;  $d = 15.96mm = 15.96 \times 10^{-3}m$  y  $s = 80mm$

Determinar el módulo de elasticidad del acero de la probeta.

Expresiones algebraicas a utilizar

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \sigma = \frac{F}{A}, \text{ y } \epsilon = \frac{x}{l} \therefore E = \frac{Fl}{Ax} = \frac{Fl}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)x} \dots\dots\dots(a)$$

Sustituyendo valores en (a) tenemos:

$$E = \frac{60 \times 10^3(N) \times 80(mm)}{\frac{\pi}{4} (15.96 \times 10^{-3}m)^2 (0.117mm)} = \frac{60 \times 10^3 N \times 80mm}{200.058 \times 10^{-6}m^2 \times 0.117mm} =$$

$$= 205.1 \times 10^9 N/m^2$$

$$= 205.1 \times GN/m^2$$

Es decir el módulo de elasticidad del acero es 205.1 x 10<sup>9</sup>N/m<sup>2</sup>

**2.3. Esfuerzo y Deformación Unitaria en Barras Compuestas**

Consideramos una barra compuesta consistente de un tubo de acero el cual ésta completamente lleno internamente con un cilindro de hule duro como se muestra en la figura 2.4 (a).

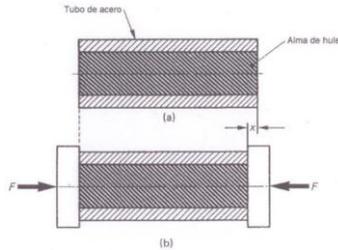


Figura 2.4. Barra compuesta (a) y (b)

Si la barra compuesta está sujeta a una fuerza de compresión  $F$  aplicada a través de placas planas en los extremos del tubo, como se muestra en la figura 2.4(b) entonces el ensamble completo sufrirá un decremento de la longitud  $x$ , el decremento estará limitado por la rigidez del material mas fuerte, es decir, el tubo de acero. También la fuerza de compresión  $F$  es compartida entre el tubo u el hule, por lo tanto el tubo siendo más rígido soportara la mayoría de la fuerza. Así para problemas relativos a barras compuestas de este tipo deberá tomarse en cuenta que:

- a) El decremento en la longitud del tubo es = al decremento de la longitud del hule.

O deformación unitaria de compresión en el tubo = a la deformación unitaria de la compresión en el hule.

- b) La fuerza total = a la fuerza en el tubo más la fuerza en el hule.

Sean el subíndice  $a$ ) referido al tubo y el subíndice  $b$ ) para el hule.

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \quad y \quad F_a = F_b$$

Pero como la deformación unitaria  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  y  $F = \sigma A$

$$\therefore \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b} \quad y \quad F = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b$$

Ejemplo 2.3.1-T.D.

Si los diámetros interno y externo del tubo de acero mostrado en la figura 2.4 son  $24\text{mm}$  y  $30\text{mm}$  respectivamente; determine los esfuerzos de compresión en el hule y en el acero cuando la fuerza aplicada es de  $3\text{kN}$ . Para el acero,  $E=200\text{GN/m}^2$ ; para el hule,  $E=2.5\text{GN/m}^2$ ;

*Solución:*

Será el subíndice  $(a)$  referido al acero y el subíndice  $(b)$  al hule

Datos:  $d_a = 24\text{mm}$ ,  $D_a = 30\text{mm}$ ,  $d_b = 24\text{mm}$ ,  $F = 30\text{kN} = 30 \times 10^3\text{N}$ ,

$$E_a = \frac{200\text{GN}}{\text{m}^2} = 200 \times \frac{10^9\text{N}}{\text{m}^2}, E_b = 2.5 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} = 2.5 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Determinar:  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$

Expresiones algebraicas a utilizar:

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b} \dots\dots\dots(i) \quad \text{y} \quad F = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b \dots\dots\dots(ii)$$

de (i)  $\sigma_a = \sigma_b \left( \frac{E_a}{E_b} \right)$  y sustituyendo los valores dados de  $E_a$  y  $E_b$  tenemos,

$$\sigma_a = \sigma_b \left( \frac{200 \frac{GN}{m^2}}{2.5 \frac{GN}{m^2}} \right)$$

$$\sigma_a = 80 \sigma_b \dots\dots\dots(iii)$$

De (ii) y (iii) se tiene:

$$F = 80 \sigma_b A_a + \sigma_b A_b = \sigma_b (80 A_a + A_b) \dots\dots\dots(iv)$$

donde  $F = 30 kN = 30 \times 10^3 N$

$$A_a = \left( \frac{\pi}{4} \right) \times (30^2 - 24^2) = 254.5 mm^2$$
$$A_b = \left( \frac{\pi}{4} \right) \times (24^2) = 452.4 mm^2$$

por lo que de (iv) se tiene

$$3 \times 10^3 N = \sigma_b (80 \times 254.5 mm^2 + 452.4 mm^2)$$
$$= 2.0814 \times 10^4 \sigma_b (mm^2)$$

$$\therefore \sigma_b = \frac{3 \times 10^3 N}{2.081 \times 10^4 mm^2} = 1.44 \frac{N}{mm^2} \quad \text{o} \quad \sigma_b = 0.144 \frac{MN}{m^2}$$

y de (iii) tenemos,

$$\sigma_a = 80 \left( 0.144 \frac{N}{mm^2} \right) = 11.52 \frac{N}{mm^2} \quad \text{o} \quad \sigma_a = 11.52 \frac{MN}{m^2}$$

### 2.3.1. Gráfica Esfuerzo – Deformación Unitaria

El diseño de máquinas y estructuras y sus respectivos elementos, requiere de un adecuado conocimiento de las propiedades físico-mecánicas de sus materiales de que están hechos; conocimiento que se adquiere en forma experimental, mediante una serie de pruebas (ensayos) de laboratorio.

*La resistencia, rigidez y ductilidad;* propiedades mecánicas que estudia la resistencia de materiales, son reveladas por ensayos de probetas (muestras) de estos materiales sometidas a cargas (fuerzas) hasta su fractura.

El ensayo de materiales más utilizado, es el de tracción. Esta se aplica porque las características mecánicas que se obtienen en los ensayos de tracción, permiten determinar con relativa exactitud el comportamiento del material de la probeta, si se le somete a otros tipos de cargas. Además, esta forma de ensaye es la más fácil de ejecutar.

Para dar una idea clara del comportamiento de un material sometido a tracción o compresión se construye la gráfica de dependencia entre la magnitud del alargamiento (acortamiento) de la probeta y la magnitud de las cargas que lo producen, es decir, la llamada Gráfica esfuerzo-deformación. Esta gráfica se puede obtener ensayando la probeta del material en máquinas especiales provistas de dispositivos que registran automáticamente el desarrollo de su tracción o compresión. En el eje de las abscisas de la gráfica, se coloca el alargamiento o acortamiento absoluto  $\Delta l$  de la probeta, y sobre el eje de las ordenadas, los valores correspondientes de las cargas de tracción o compresión  $F$ .

De la gráfica esfuerzo-deformación en coordenadas  $F$  y  $\Delta l$ , dividiendo todas sus ordenadas por  $A_0$  y las abscisas por  $l_0$ , se puede pasar a la gráfica en coordenadas  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , en el cual

$$\sigma = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

El área de la sección transversal inicial  $A_0$  y la longitud inicial  $l_0$  de la parte calibrada de la probeta son constantes, por lo que la forma de la gráfica esfuerzo-deformación con las nuevas coordenadas  $\sigma$  (esfuerzo) y  $\varepsilon$  (deformación unitaria) será lo mismo que con las coordenadas  $F$  y  $\Delta l$ , para las escalas de las ordenadas y las abscisas diferirán respectivamente.

La gráfica esfuerzo deformación unitaria ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) figura 2.5 es más conveniente y refleja mejor las propiedades físicas del material, ya que no depende de las dimensiones geométricas de la probeta que se ensaya, es decir, de longitud  $l$  y del área de la sección transversal  $A$ ; durante todo el ensaye hasta su ruptura.

Los puntos de la curva pertenecientes a la gráfica de ensaye a la tracción de esta manera obtenida caracterizan la situación de la probeta en diferentes instantes y la curva total de esta gráfica, da la relación de esfuerzo-deformación unitaria para la probeta a través del transcurso de ensaye a la tracción.

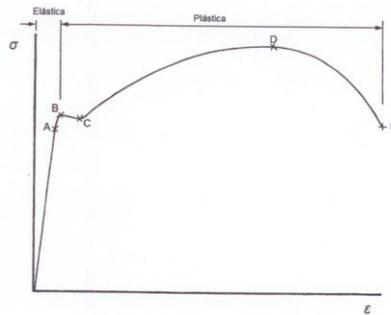


Figura 2.5 Gráfica típica Esfuerzo-Deformación Unitaria para acero suave

De la gráfica típica esfuerzo-deformación unitaria ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) para un material dúctil, acero suave, fig. 2.5, procederemos a examinar los puntos característicos de su curva resultante:

El punto *A* muestra el *límite de proporcionalidad* del material es decir, el punto hasta el cual; el esfuerzo  $\sigma$  es proporcional a la deformación  $\epsilon$ . Para el material acero el *límite de proporcionalidad* esta muy cercano al *límite elástico*, punto *B*.

Previendo que el punto *B* no sea sobrepasado, el material (probeta) retornará a su longitud inicial una vez que se haya removido la carga. Esto es, la deformación es elástica hasta este punto, pero si el punto *B* es rebasado, entonces el material no retornará a su longitud original, y una deformación permanente quedará después de la remoción de la carga. La porción de la curva posterior al punto *B* es conocida como región plástica.

Una vez que el punto *B* es alcanzado ocurre un alargamiento sin ningún incremento en la carga (en realidad, podría incluso ser un pequeño decremento de la carga), entonces se dice que el material cede. Esto continúa hasta el punto *C*, punto de fluencia o cedencia, al cual una carga adicional deberá aplicarse para incrementar el alargamiento. *El punto de fluencia se define como el esfuerzo en el cual se tiene un alargamiento (deformación) en el material sin ningún incremento del esfuerzo*, y también se le denomina *límite de fluencia*.

El punto límite de la fluencia es una característica muy importante del comportamiento mecánico de un material, ya que los esfuerzos arriba de este límite producen deformaciones permanentes no permisibles.

Un gran número de materiales dúctiles, tales como aceros aleados, no tienen un punto de fluencia preciso. La curva de la gráfica de ensayo a la tracción de tales materiales pasa suavemente de la parte elástica a la parte donde grandes deformaciones permanentes tienen lugar. La resistencia o punto de fluencia de estos materiales es determinada de una completa y total manera convencional. El punto de fluencia convencional es generalmente tomado como el esfuerzo con el cual la deformación permanente relativa de la probeta ensayada es de 0.2% de su longitud calibrada  $l_0$ .

A partir del punto *C*, punto de fluencia, la gráfica de ensayo a la tracción se convierte en una curva general convexa y, como ya se ha establecido; las deformaciones de la probeta empiezan a aumentar

más rápidamente que los esfuerzos. Además el tramo *CD* de la curva recibe el nombre de *zona o período de fortalecimiento*, porque en el material vuelve a oponer resistencia a la deformación.

El punto *D* en la curva de la gráfica  $\sigma$ - $\epsilon$ , determina el esfuerzo convencional máximo respecto a el área de la sección transversal de la probeta que se ensaya a tracción. Este esfuerzo se denomina *Resistencia última o Resistencia máxima* y hasta este punto *D*, ningún cambio geométrico evidente es percibido en la probeta. Sin embargo, justamente rebasando el punto *D*, en la probeta se origina un brusco estrechamiento local o *cuello* en la zona media de su longitud calibrada  $l_0$ . La probeta se alarga bastante a expensas de la deformación plástica del *cuello*. El área de la sección del *cuello* disminuye y la carga requerida para mantener el alargamiento también decrece hasta la fractura que finalmente sucede en el punto *E*. El esfuerzo correspondiente al punto *E* se denomina *Resistencia de ruptura*.

Las gráficas de ensayo de tracción de los materiales frágiles difieren bastante de la gráfica analizada del material dúctil de la figura 2.5, en ellos no existe el escalón de fluencia y la ruptura de las probetas se producen con deformaciones permanentes infinitamente pequeñas, sin que se forme el *cuello* en la sección de ruptura.

Por todo lo anterior expuesto, el aspecto aproximado de las curvas obtenidas de la gráfica esfuerzo-deformación unitaria, ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) de probetas de diferentes materiales ensayadas a tracción pueden verse en la figura 2.6 en la que:

- Curva 1. Corresponde a un material frágil como Fundición de Hierro.
- Curva 2. Corresponde a un material dúctil como el Acero Suave.
- Curva 3. Corresponde a un material como Aluminio.
- Curva 4. Corresponde a un material como el Latón.

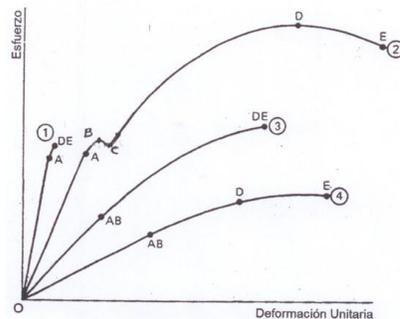


Figura 2.6. Curvas Típicas de la Gráfica  $\sigma$ - $\epsilon$  para diversos materiales

Además del *Límite de Fluencia* y la *Resistencia Última*, caracterizando las propiedades mecánicas de un material una muy importante característica es la *ductilidad* del material. La *ductilidad* del material es caracterizado por la magnitud del porcentaje de alargamiento y porcentaje de reducción del área de la sección transversal en la ruptura de la probeta de ensayada a tracción. El porcentaje de alargamiento de la ruptura se expresa como:

$$\delta = \frac{l_K - l_0}{l_0} 100\%$$

donde  $l_K$  es la longitud de la probeta después de la ruptura y  $l_0$  es la longitud inicial.

El porcentaje de reducción del área de la sección transversal se obtiene de la expresión:

$$\psi = \frac{A_0 - A_K}{A_0} 100\%$$

donde  $A_K$  es el área de sección transversal en el cuello de la ruptura y  $A_0$  es el área de sección transversal inicial de la probeta.

Es usual distinguir entre un material dúctil y un material frágil acerca de si las deformaciones permanentes resultantes en la probeta ensayada a la ruptura son grandes o pequeñas.

El ensayo mecánico de materiales proporciona valores de esfuerzos límite (*límite o resistencia de fluencia y resistencia última*) que, cuando elementos de estructuras y máquinas sometidos a cargas alcanzan uno de estos límites ocurre ya sea una grande deformación, que no es permitida o la ruptura del elemento.

Para un funcionamiento seguro de una estructura o máquina los esfuerzos inducidos en sus elementos deben estar más abajo de estos valores *límite*. Por lo tanto es importante hallar que esfuerzos son seguros para el trabajo de la estructura o máquina, es decir, establecer el tan nombrado *esfuerzo permisible*.

El esfuerzo permisible o de diseño se define como el máximo esfuerzo que puede desarrollarse en el material de un elemento estructural o de máquina, que garantiza seguridad en su resistencia y una cierta duración de este elemento en su funcionamiento; por lo tanto los esfuerzos permisibles son solamente una cierta fracción del esfuerzo límite y el esfuerzo permisible se llama *Factor de seguridad*, o sea:

$$\text{Factor de seguridad, } n = \frac{\text{Esfuerzo límite } \sigma_L}{\text{Esfuerzo permisible } [\sigma]}$$

$$\therefore [\sigma] = \frac{\sigma_L}{n}$$

Para elementos o piezas fabricadas de materiales dúctiles se debe considerar como esfuerzo límite  $\sigma_L$  el límite de fluencia  $\sigma_y$ , aún que, para materiales moderadamente o poco dúctiles, la base del esfuerzo límite  $\sigma_L$  es la resistencia última  $\sigma_u$ , que también es para los elementos de materiales frágiles.

La elección del factor de seguridad  $n$ , depende de las siguientes condiciones:

El estado del material (dúctil, frágil), carácter de aplicación de la carga (carga muerta, carga repetida, carga súbita como impacto o choque), así como de factores generales: la heterogeneidad del material, inexactitud al aplicar cargas exteriores, a proximidad de los esquemas de cálculo y sus modelos matemáticos correspondientes, etc.

La experiencia en el diseño y el conocimiento respecto a las condiciones y factores arriba mencionados deben aplicarse para determinar el factor de seguridad  $n$ . la tabla 2.2. Contiene recomendaciones para seleccionar factores de seguridad. Estos factores de seguridad deberán considerarse para valores promedio. Condiciones especiales o incertidumbre respecto a estas condiciones pueden justificar la aplicación de otros valores.

Tabla 2.2.. Valores promedio del factor de seguridad

MODO DE APLICAR  LA  CARGA	Factor de Seguridad $n$ (preferente metales)		
	Materiales Dúctiles		Materiales Frágiles
	Base en $\sigma_y$ Límite de fluencia	Base en $\sigma_u$ Resistencia última	Base en $\sigma_v$ Resistencia última
Carga muerta (estática)	2	4	6
Carga repetida	4	8	10
Impacto o choque	6	12	15

Las siguientes expresiones pueden aplicarse para calcular los esfuerzos permisibles o de diseño para los valores considerados de  $n$ .

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} \text{ basado en límite a resistencia de fluencia}$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n} \text{ basado en la resistencia última.}$$

Si se establece el esfuerzo permisible  $[\sigma]$ , la ecuación de la resistencia para cargas estáticas o ecuación de diseño para elementos sujetos a tracción y a compresión será:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo de cálculo y  $[\sigma]$ , es el esfuerzo permisible o de diseño.

Los ensayos de tracción son realizados a probetas normalizadas especiales (figura 2.8), en máquinas de ensaye de tracción diseñadas especialmente (figura 2.7). En su más simple percepción, el ensaye de tracción tiene que ver con su sujeción de la probeta, mientras una fuerza (carga) valorada y registrada se aplica gradualmente en el otro extremo de la probeta. La fuerza es aumentada lentamente hasta que ocurre su ruptura.

Las máquinas de ensaye a la tracción varían considerablemente en tamaño y construcción, no obstante todas ellas contemplan los siguientes requisitos básicos:

- 1) Un medio de sujeción a la probeta, tales como sujetadores o mordazas de cuña, de collarines roscados o de collarines bipartidos.
- 2) Un medio de aplicar la carga ya sea en forma manual o por medio mecánico a través de engranes o por medio hidráulico.
- 3) Un medio de medición de la carga aplicada tal como un sistema de balanza de palanca o un manómetro de presión con caratula.
- 4) Un medio de medición de pequeñas deformaciones (deflexiones) tal como un extensómetro o medidores de deformaciones.

Una máquina típica de ensayo a la tracción y un extensómetro son mostradas en los esquemas de la figura 2.7

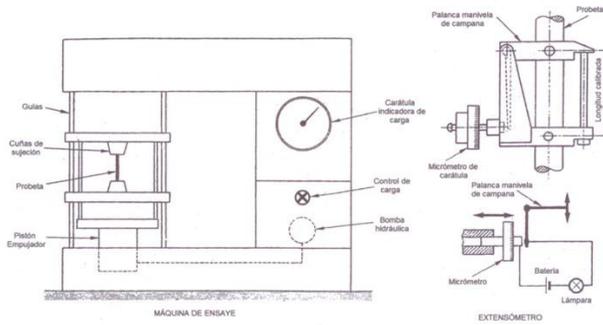


Figura 2.7. Máquina Típica de Ensayo a Tracción

En el ensayo a tracción, se utilizan, como regla general, probetas cilíndricas (Figura 2.8a), y durante el ensayo del material en hojas, probetas planas (figura 2.8b). Para las probetas cilíndricas se mantiene una distancia determinada entre la longitud calibrada,  $l_0$  de la probeta y el diámetro  $d_0$ . Generalmente  $l_0 = 10d_0$  (probeta larga); con menor frecuencia,  $l_0 = 5d_0$  (probeta corta);

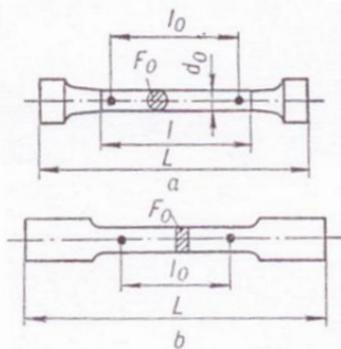


Figura 2.8 Probetas Normalizadas para ensayo a la tracción

Tomando en consideración que el diámetro  $d_0$  está ligado con el área de la sección de la probeta  $A_0$ , mediante la fórmula.

$$d_0 = \sqrt{\frac{4A_0}{\pi}} = 1,13\sqrt{A_0}$$

la relación entre la longitud calibrada  $l_0$  y el área de la sección transversal de la probeta  $A_0$  puede expresarse, para la probeta larga, por medio de la dependencia

$$l_0 = 11,3\sqrt{A_0}$$

Para la probeta corta

$$l_0 = 5,65\sqrt{A_0}$$

### 2.3.2. Esfuerzo Debido a Cambio de Temperatura en una Barra Simple

Un material sólido se expande cuando su temperatura se incrementa (aumenta) y se contrae cuando su temperatura se reduce. El cambio en la dimensión  $x$ , que ocurre con el cambio de temperatura esta dado por:

$$x = l \alpha \Delta\theta$$

Donde:

$l$  = dimensión original

$\alpha$  = **coeficiente de expansión lineal**

$\Delta\theta$  = **cambio o variación de temperatura**

**Nota:** muchas veces usamos  $\Delta T$  para indicar cambio o variación de la temperatura.

Si un material sólido es sujeto a un incremento en temperatura  $\Delta\theta$  y la expansión resultante es completamente ó parcialmente restringida, un esfuerzo de compresión será inducido en el material en forma similar, si existe un decremento en temperatura y la contracción resultante es restringida un esfuerzo de tracción será inducido.

La figura 2.9a muestra una barra o varilla con una longitud inicial  $l$ . Si la temperatura de la varilla se incrementa de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  la longitud de la varilla entonces será  $(l+x)$ , figura 2.9b en la cual la varilla permanecerá sin estar sujeta a un esfuerzo.

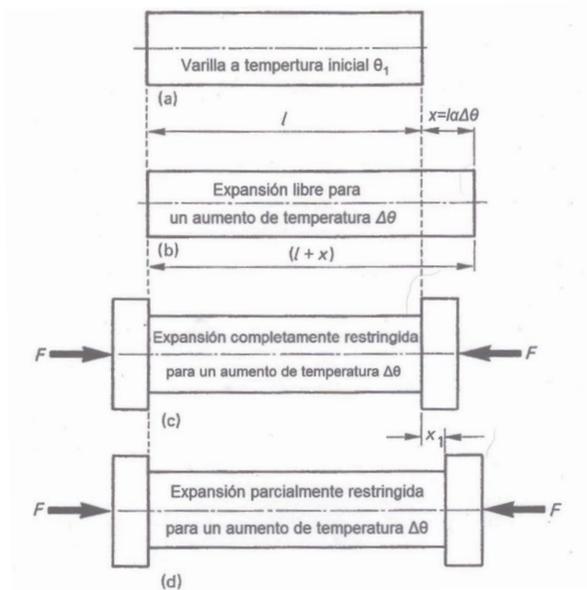


Figura 2.9. Esfuerzo por Temperatura

Si la expansión es restringida como se muestra en la figura 2.9c entonces un esfuerzo de compresión  $\sigma$  asociado conjuntamente con una deformación unitaria será inducida a la varilla, es decir el cambio en la temperatura, cambiará el esfuerzo desde cero en la figura 2.9a. a  $\sigma$  en la figura 2.9c, habiendo considerado que la expansión es restringida.

Refiriéndonos a la figura 2.9c donde la expansión es completamente restringida.

$$\text{Deformación unitaria a la compresión } \varepsilon = \frac{x}{l+x} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\therefore \sigma = \frac{Ex}{l+x}$$

$$\text{Pero } x = l \alpha (\theta_2 - \theta_1) = l \alpha \Delta\theta$$

$$\therefore \sigma = \frac{El\alpha\Delta\theta}{l+l\alpha\Delta\theta} = \frac{E\alpha\Delta\theta}{1+\alpha\Delta\theta}$$

Puesto que  $\alpha$  es pequeño (valor típico 0.00001), el término  $\alpha \Delta\theta$  será despreciable comparado con 1. Así el término  $(1+\alpha \Delta\theta)$  es  $\approx 1$ ; es decir, esta expansión es completamente restringida, por lo que un cambio en la temperatura  $\Delta\theta$  producirá un cambio en el esfuerzo de magnitud.

$$\sigma = E \alpha \Delta\theta$$

Cambios o variaciones en el esfuerzo, los cuales son inducidos por cambios en la temperatura se les conoce como esfuerzos por temperatura.

Obsérvese que:  $\alpha \Delta\theta = \frac{\sigma}{E}$

Es decir,  $\alpha \Delta\theta =$  **deformación por temperatura**

Si la expansión es restringida a una cantidad  $x_1$  como se muestra en la figura 2.9d entonces:

$$\text{Deformación Unitaria directa total} = \frac{x - x_1}{l + x} = \frac{l \alpha \Delta\theta - x_1}{l + l \alpha \Delta\theta} = \frac{l \left[ \left( \alpha \Delta\theta - \frac{x_1}{l} \right) \right]}{l(1 + \alpha \Delta\theta)}$$

Como antes  $(1 + \alpha \Delta\theta)$  aproximadamente 1

$$\therefore \text{Deformación Unitaria total directa} = \alpha \Delta\theta - \frac{x_1}{l_1}$$

=

$$\text{Deformación Unitaria por Temperatura} - \text{Deformación Unitaria Debido al Esfuerzo}$$

Pero como deformación unitaria =  $\frac{\sigma}{E}$

Tal que si la expansión es parcialmente restringida, un cambio en la temperatura  $\Delta\theta$  producirá un cambio en el esfuerzo de magnitud.

$$\sigma = E \left( \alpha \Delta\theta - \frac{x_1}{l} \right)$$

Si un material esta sujeto a ambas condiciones como un incremento de temperatura y un esfuerzo de tracción (o un decremento de temperatura y un esfuerzo de compresión) entonces:

$$\text{Deformación unitaria total directa} = \text{Deformación unitaria por temperatura} + \text{Deformación debido a esfuerzo}$$

o  $\text{Deformación unitaria total directa} = \text{suma de deformación unitaria debido al cambio de temperatura y esfuerzos}$

$$\varepsilon = \alpha \Delta\theta \pm \frac{\sigma}{E}$$

Ejemplo 2.4.1.T.D.

La temperatura de un buje de acero el cual esta inicialmente sin ningún esfuerzo es incrementado desde  $20^\circ$  a  $80^\circ C$ . Si la expansión es restringida completamente, determine el esfuerzo de compresión en el material del buje, tomar  $E = 200GN/m^2$  y  $\alpha = 12 \times 10^{-6}C^{-1}$

Solución:

Datos:  $\theta_1 = 20^\circ C, \theta_2 = 80^\circ C, \alpha = 12 \times 10^{-6}C^{-1}, E = 200GN/m^2 = 200 \times 10^9 N/m^2$

Determinar:  $\sigma_c = ?$

Expresión algebraica a utilizar  $\sigma = E \alpha \Delta\theta$ ----- (i)

Sustituyendo valores en (i)

$$\sigma = 200 \times 10^9 \times 12 \times 10^{-6} \times (80 - 20)$$

$$= 144 \times 10^6 N/m \text{ o } 144MN/m^2$$

2.4. Efecto de Cambio de Temperatura sobre Barras Compuestas

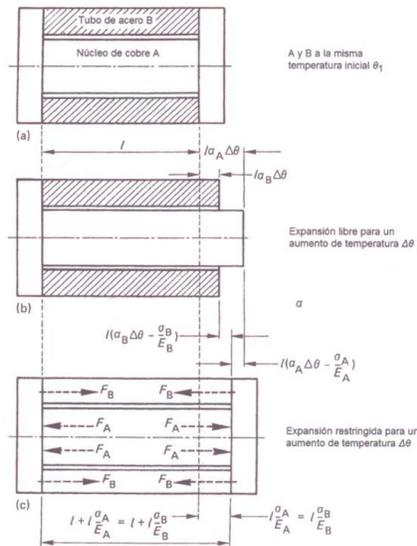


Figura 2.10. Efecto de Incremento de Temperatura en Barras Compuestas

Considere una barra compuesta consistente de una alma de cobre A colocada dentro de un tubo de acero B, con las caras extremas del alma y del tubo estando sujetas firmemente a placas en los extremos como se muestra en la figura 2.10a.

Cuando el ensamble esta a una temperatura  $\theta_1$ ,  $A$  y  $B$  son de igual longitud  $l$  y se considera que están sin ningún esfuerzo.

Si una de las placas extremas es retirada y la temperatura del ensamble es incrementada a  $\theta_2$ ,  $A$  y  $B$  se expandirán libremente a la posición mostrada en la figura 2.10b.

Refiriéndonos a la figura 2.10b el alma del cobre  $A$  se ha expandido más que el tubo de acero  $B$  debido a que el coeficiente de expansión lineal del cobre es más grande que el acero.

Si, con ambas placas extremo en su posición, la temperatura del ensamble es de nuevo incrementada de  $\theta_1$  a  $\theta_2$ , entonces dado que no existe distorsión en las placas extremo, el cobre y el acero se expanden una cantidad igual como se muestra en la figura 2.10c. Refiriéndonos a la figura 2.10c, la longitud del alma de cobre  $A$  es reducida y la longitud del tubo de acero  $B$  es incrementada de la posición mostrada en la figura 2.10b, es decir el alma de cobre  $A$  esta ahora siendo sujeto a un esfuerzo de compresión,  $\sigma_A$  y el tubo de acero  $B$  a un esfuerzo de tracción  $\sigma_B$ .

Del tema 2.4 esfuerzos por cambio de temperatura

Deformación unitaria total directa = suma de deformaciones unitarias debida a cambio de temperatura y esfuerzo

$$\varepsilon = \alpha \Delta\theta \pm \frac{\sigma}{E}$$

Para el alma del cobre  $A$ ,

$$\varepsilon_A = \alpha_A \Delta\theta - \frac{\sigma_A}{E_A}$$

Para el tubo de acero  $B$ ,

$$\varepsilon_B = \alpha_B \Delta\theta + \frac{\sigma_B}{E_B}$$

Donde  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

A la temperatura  $\theta_2$ ,

Alargamiento de  $A$  = alargamiento de  $B$ ; es decir, deformación unitaria total directa en  $A, \varepsilon_A =$   
 = deformación unitaria total directa  $B, \varepsilon_B$

$$\alpha_A \Delta\theta - \frac{\sigma_A}{E_A} = \alpha_B \Delta\theta + \frac{\sigma_B}{E_B}$$

$$\therefore (\alpha_A - \alpha_B) \Delta\theta = \frac{\sigma_A}{E_A} + \frac{\sigma_B}{E_B}$$

es decir,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{diferencia entre las deformaciones} \\ \text{unitarias por temperatura} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{suma de las deformaciones} \\ \text{unitarias debido a los esfuerzos} \end{array} \right\}$

Refiriéndonos a figura 2.10c, el alma de cobre  $A$  esta ejerciendo una fuerza de empuje  $F_A$  sobre las placas extremo mientras que el tubo de acero  $B$ , esta ejerciendo una fuerza de tracción (jalón) a la placa, ya que el ensamble esta en equilibrio.

Fuerza ejercida por  $A$  = Fuerza ejercida por  $B$

$$F_A = F_B$$

Si  $A_A$  y  $A_B$  representan las áreas de la sección transversal  $A$  y  $B$  respectivamente,

$$F_A = \sigma_A A_A \quad \text{y} \quad F_B = \sigma_B A_B$$

$$\therefore \sigma_A A_A = \sigma_B A_B$$

Ejemplo 2.4.1.1T.D.

Si el diámetro del alma de cobre en la barra compuesta mostrada en la figura 2.10a es de  $45\text{mm}$  y los diámetros interno y externo del tubo de acero son  $50\text{mm}$  y  $80\text{mm}$  respectivamente, determine los esfuerzos en el cobre y en el acero para un incremento de temperatura de  $60^\circ\text{C}$ .

Si se asume que tanto el alma de cobre como las del acero están sin esfuerzo.

$$\text{Tomar para el acero } E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \alpha = 11.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\text{Tomar para el cobre } E = 120 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \alpha = 16.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

*Solución:*

Datos: son los subíndices  $A$  refiriéndose al alma del cobre y el subíndice  $B$  referido al acero;  
 $d_A = 45\text{mm}$ ,  $D_B = 80\text{mm}$ ,  $d_b = 50\text{mm}$ ,  $\alpha_A = 16.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_B = 11.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $E_A = 120 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  
 $E_B = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\Delta\theta = 60^\circ\text{C}$

Determinar:  $\sigma_A = ?$  y  $\sigma_B = ?$  Para  $\Delta\theta = 60^\circ\text{C}$

Expresiones algebraicas principales a utilizar

$$\sigma_A A_A = \sigma_B A_B \dots \dots (a); \quad (\alpha_A - \alpha_B) \Delta\theta = \frac{\sigma_A}{E_A} + \frac{\sigma_B}{E_B} \dots \dots (b)$$

$$\text{de (a)} \quad \sigma_A = \sigma_B \left( \frac{A_B}{A_A} \right) \dots \dots (c)$$

$$\text{donde } A_A = \left( \frac{\pi}{4} \right) \times (45\text{mm})^2 = 1590\text{mm}^2$$

$$\text{y } A_B = \left( \frac{\pi}{4} \right) \times (80^2 - 50^2)\text{mm}^2 = 3063\text{mm}^2$$

Sustituyendo valores en (c), se tiene:

$$\sigma_A = \frac{3063\text{mm}^2}{1590\text{mm}^2} \times \sigma_B = 1.93\sigma_B \dots \dots (d)$$

Comentario [A1]:

de (b) sustituyendo (d)

$$(\alpha_A - \alpha_B)\Delta\theta = \frac{1.93\sigma_B}{E_A} + \frac{\sigma_B}{E_B}$$

$$\sigma_B = \frac{(\alpha_A - \alpha_B)\Delta\theta}{\frac{1}{E_B} + \frac{1.93}{E_A}} \dots\dots\dots (e)$$

de (e) sustituyendo los valores

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{(16.5 - 11.5) \times 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \times 60^\circ\text{C}}{\frac{1.93}{120 \times 10^9 \text{ N/m}^2} + \frac{1}{200 \times 10^9 \text{ N/m}^2}} \\ &= \frac{3 \times 10^{-4}}{(1.608 \times 10^{-11}) + (0.5 \times 10^{-4})} \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

$$= 14.23 \times 10^6 \text{ N/m} \quad \text{o} \quad 14.23 \text{ MN/m}^2$$

y

$$\sigma_A = 1.93\sigma_B$$

$$= 1.93 \times 14.23 \text{ MN/m}^2$$

$$= 27.46 \text{ MN/m}^2$$

Por lo tanto los esfuerzos en el acero y cobre después del incremento de temperatura son  $14.23 \text{ MN/m}^2$  y  $27.46 \text{ MN/m}^2$  respectivamente.

## 2.5. Esfuerzos de Corte (esfuerzo indirecto)

En la aplicación a una barra de dos fuerzas paralelas de igual magnitud, de sentidos opuestos, próximas entre sí, surgen en la sección transversal de la barra entre estas dos fuerzas, esfuerzos tangenciales o de corte, ver figura 2.11.

En la figura 2.11a aplicando el método de las secciones, una parte es separada, la acción de esta parte separada sobre la parte restante deberá ser reemplazada por fuerzas internas. Estas fuerzas en el plano de la sección transversal fig. 2.11b. Por consiguiente, la deformación por corte produce esfuerzos de corte. Si las fuerzas internas son asumidas como fuerzas uniformemente distribuidas a través del área de la sección transversal. La magnitud de los esfuerzos de corte se determina por la expresión:

$$\text{Esfuerzo de corte} = \frac{\text{Fuerza de corte}}{\text{Área de la sección transversal resisitente al corte}}$$

Como expresión algebraica;  $\tau = \frac{F}{A}$

Donde  $\tau$ (tau) esfuerzo de corte en  $N/m^2$  en el sistema S. I.

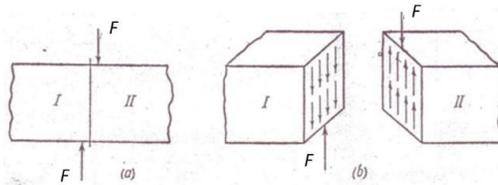


Figura. 2.11

Como ejemplo de elemento de estructuras metálicas sometidas a corte o cizallamiento puede servir un remache o roblón (figura 2.12a). Si las fuerzas actuantes  $F$  alcanzan cierta magnitud, pueden cortar la espiga del remache por la sección  $aa$ . Las fuerzas (figura 2.12b) se transmiten mediante la presión de las paredes del orificio sobre la espiga de remache.

La deformación por corte se produce también en la unión por chaveta o cuña representada esquemáticamente en la figura 2.12c. El momento de rotación  $M$  de la polea se transmite al árbol de radio  $r$  por medio de las fuerzas  $F = M/r$ . Estas fuerzas producen el corte de la chaveta por su sección media. Un caso particular de cortadura es el rompimiento de los materiales fibrosos, y en particular la madera, por los planos paralelos a las fibras. Si la presión es grande puede ocurrir un aplastamiento grande de la pared del orificio o de la espiga del remache en la superficie de contacto. En la unión por chaveta el aplastamiento puede producirse en la superficie un contacto del árbol o de la polea con la chaveta (cuña)

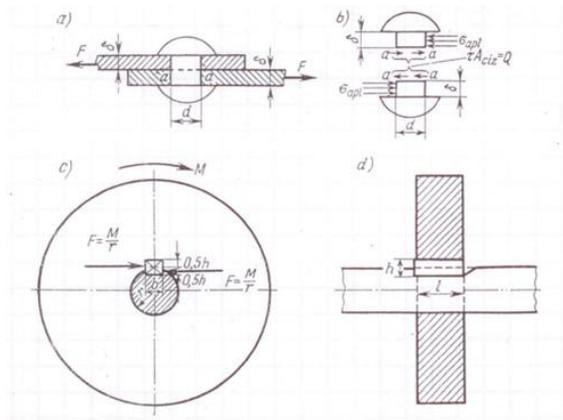


Figura 2.1.2

Se entiende por *aplastamiento* a la deformación local por compresión de las superficies que transmiten presión. Los esfuerzos normales de aplastamiento que surgen son locales; su magnitud disminuye rápidamente al alejarse de la superficie de contacto de los elementos.

Para hallar el esfuerzo que surge en la sección *aa* de la espiga del remache por la acción de las fuerzas *F* empleamos el método de las secciones. Cortamos mentalmente la espiga en dos partes y estudiamos las condiciones de equilibrio de una de ellas (figura 2.12b).

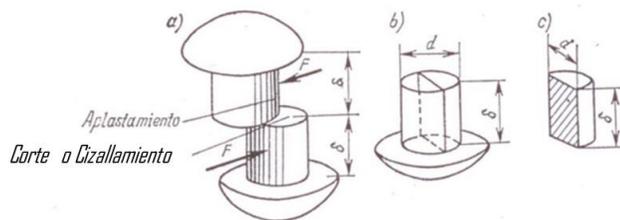


Figura 2.13

Por parte de la chapa se transmite a la espiga la fuerza exterior *F* y por la sección *aa* actúan las fuerzas internas. La fuerza transversal *Q* que surge en la sección *aa* equilibra la fuerza exterior *F* y numéricamente es igual a ella *Q*=*F*.

Aproximadamente se puede admitir que las fuerzas tangenciales se distribuyen uniformemente por la sección.

$$\tau = \frac{Q}{A_{cor.}}$$

La condición de resistencia de los elementos sometidos a corte tiene la forma:

$$\tau = \frac{Q}{A_{cor.}} \leq [\tau_{cort.}], \quad (a)$$

donde *A<sub>cor.</sub>* Es el área de corte, y *[τ<sub>cort.</sub>]*, esfuerzo de corte permisible.

La magnitud del esfuerzo permisible se fija basándose en el ensayo de cortadura. Generalmente se toma *[τ<sub>cort.</sub>]* = (0,70 ... 0,80) *[σ]*.

A la espiga del remache se transmite la presión, por parte del orificio de la chapa, la superficie lateral del semicilindro cuya altura es igual al espesor *δ* de dicha chapa (figura 2.13a,b).

Los esfuerzos de aplastamiento están distribuidos por la superficie de un modo no uniforme. Como la ley de su distribución exacta la desconocemos, el cálculo se simplifica considerándolas constantes por toda la superficie en que se calcula el aplastamiento.

La comprobación de los elementos de una estructura o máquina al aplastamiento se hace con la fórmula

$$\sigma_{apl} = \frac{F}{A_{apl.}} \leq [\tau_{apl.}], \quad (b)$$

en la que  $A_{apl}$ . Es el área de aplastamiento, y  $[\sigma_{apl}]$ , el esfuerzo permisible de aplastamiento. Por lo general se toma  $[\sigma_{apl}] = (1,7 \dots 2,2)[\sigma]$ . Las áreas de corte y aplastamiento que figuran en las fórmulas (a) y (b) se calculan en cada caso concreto en dependencia del tipo de la unión y del carácter de la transmisión de los esfuerzos. Así, para la unión por remaches que representa la figura 2.12a y b, el área de corte de un remache es igual a su sección transversal,  $A_{cor} = \frac{\pi d^2}{4}$ . Como área de aplastamiento del remache se toma convencionalmente su sección diametral correspondiente al espesor de lachapa, o sea, un rectángulo (figura 2.13b y c),  $A_{apl} = d\delta$ . Para la unión a chaveta, representada en la figura 2.12 c, d, las áreas de cizallamiento y aplastamiento tampoco son difíciles de determinar

$$A_{cor} = lb,$$

$$A_{apl} = l \cdot 0,5h$$

Ejemplo 2.5.1 T. D.

Partiendo de las condiciones de resistencia al corte y el aplastamiento. Determinar el diámetro que debe tener el tornillo de la unión que se muestra en la figura 2.5.1. Si  $\delta = 20mm$ ;  $\delta_1 = 12mm$ ; los esfuerzos permisibles son:  $[\tau_{cor}] = 100MPa$  y  $[\sigma_{apl}] = 240MPa$  y la fuerza de tracción  $F = 120kN$ . El tornillo entra en el orificio sin holgura.

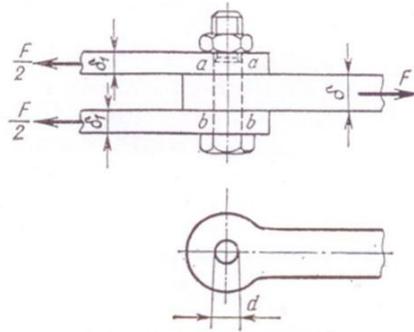


Figura 2.5.1

Solución:

Como el tornillo está sometido a corte simultáneamente por dos secciones,  $aa'$  y  $bb'$ , el área de corte será:

$$A_c = \frac{2\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{2}$$

La fuerza transversal que actúa sobre el tornillo es igual a la fuerza que tracciona la unión,  $Q = F$ .

Por la condición de resistencia de corte tenemos que

$$A_{cor} = \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{F}{[\tau_{cor}]},$$

de donde

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau_{cor}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100}} = 27,6mm.$$

Según los datos del problema  $2\delta_1 > \delta$ , por lo que, con respecto al aplastamiento, el elemento más peligroso es el de en medio, cuya área de aplastamiento  $A_{apl} = d\delta$ .

De la condición de resistencia al aplastamiento se tiene que

$$A_{apl} = \frac{F}{[\sigma_{apl}]},$$

o bien

$$d\delta \geq \frac{F}{[\sigma_{apl}]}$$

de donde

$$d \geq \frac{F}{\delta[\sigma_{apl}]} = \frac{120 \cdot 10^3}{20 \cdot 240} = 25mm.$$

De los dos valores del diámetro  $d$  hallados por las condiciones de resistencia al corte y al aplastamiento, debe tomarse el mayor, es decir,  $d \geq 27,6mm$ ; de acuerdo con las normas internacionales S. I. el tornillo tendrá 30mm de diámetro no fileteado y su rosca será *whit worth*.

Otro ejemplo de un elemento de estructuras metálicas sometido a esfuerzo de corte son las juntas o uniones soldadas.

La soldadura es el procedimiento más mecanizado y perfecto de unión de los elementos de las estructuras de acero. Estos elementos se sueldan solapados o a tope. Las juntas en solapa se hacen con costuras de cordón (en rincón).

Las costuras de cordón se llaman laterales si son paralelas a la dirección de la fuerza que actúa (figura 2.14a); frontales, si son perpendiculares a ella (figura 2.14b), y oblicuas, si forman ángulo con dicha dirección (figura 2.14c).

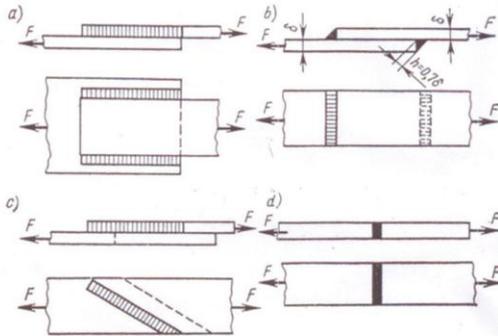


Figura 2.14

Las costuras de cordón se calculan al cizallamiento. El área de la sección de cizallamiento que se calcula es  $A = lh$ , donde  $l$  es la longitud de la costura, y  $h$ , su altura de cálculo, entre la cual y el espesor de las chapas que se sueldan existe la relación (figura 2.14b)

$$h = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta$$

Cuando se sueldan chapas de distinto espesor, al calcular la altura de la costura se toma el espesor mínimo.

La condición de resistencia de una junta soldada tiene la forma

$$\tau = \frac{F}{lh} = \frac{F}{l \cdot 0,7\delta} \leq [\tau_{cor}],$$

donde  $[\tau_{cor}]$  es el esfuerzo de corte permisible para la junta soldada.

Lo más frecuente es soldar las chapas a tope (figura 2.14d), en cuyo caso el espacio que hay entre las chapas que se sueldan se llena de metal fundido. Cuando el espesor de los elementos que se unen es relativamente grande, sus bordes se preparan especialmente antes de soldarlos. La altura e la costura se toma igual al espesor de las chapas.

La resistencia de la costura de una junta a tope, por regla general, no es menor que la del metal que se suelda. Esta costura está sometida al mismo tipo de deformación que los elementos que une. De ordinario está sometida a tracción o compresión.

La condición de resistencia de la costura en este caso tiene la forma

$$\sigma = \frac{F}{lh} = \frac{F}{l\delta} \leq [\sigma'],$$

donde  $[\sigma']$  es el esfuerzo de tracción o compresión permisible para la costura soldada.

### 2.5.1. Deformación Unitaria en el Esfuerzo de Corte

En la actividad el corte de láminas, chapas y barras metálicas con cuchillas de máquinas de corte (figura 2.15a); el corte se realiza suministrando fuerzas suficientemente grandes; la parte izquierda de la pieza se separa de la parte derecha a través de la sección  $AB$ . La cualidad que distingue al corte es la pequeña distancia entre las fuerzas  $F$ . La deformación que procede al corte de la pieza, consiste en

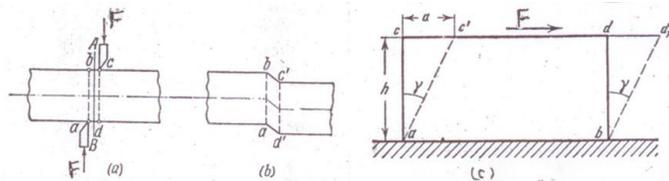


Figura 2.15

una distorsión de los ángulos rectos de un paralelepípedo elemental. Esta deformación se llama deformación por corte. La figura 2.15b muestra la deformación por corte producida en el paralelepípedo antes de esfuerzo el corte total de la pieza; El rectángulo  $abcd$  es cambiado al paralelogramo  $abc'd'$ , la distancia  $cc'$  figura 2.15c a través de la cual la sección  $cd$  se desplaza respecto a la sección adjunta  $ab$  muy cercana a esta sección; esta distancia  $cc'$  es llamada *deformación por corte absoluta*. Esta deformación depende de la distancia entre las secciones adyacentes  $ab$  y  $cd$ . La más grande distancia (permaneciendo todas las otras iguales), la de mayor extensión es la cantidad de la deformación por corte absoluta; (distancia  $a$  figura 2.15c).

El ángulo  $\gamma$  es llamado *ángulo de corte o deformación unitaria de corte*. En el rango elástico, este ángulo es muy pequeño; ya que la resistencia de materiales trata con deformaciones pequeñas producidas en un material dentro del límite elástico.

La deformación unitaria en el corte puede ser determinada de la relación

$$\frac{cc'}{ac} = \frac{a}{h} = \text{tg} \gamma \cong \gamma$$

Puesto que, el ángulo  $\gamma$  es pequeño, su tangente puede tomarse como su magnitud del ángulo.

Una medida de la deformación por corte es la deformación unitaria de corte  $\gamma$  tal que, la razón de la deformación por corte absoluta respecto a la distancia entre las dos secciones adyacentes expresada en radianes.

### 2.5.2. Módulo de Corte (módulo de rigidez)

Experimentos (ensaye de materiales al corte) muestran que dentro del límite elástico la cantidad de deformación al corte absoluto,  $a$ , es proporcional a la fuerza de corte  $F$ , la distancia  $h$  sobre la cual ocurre la deformación por corte e inversamente proporcional a el área de la sección transversal,  $A$ . (figura 2.15c)

Introduciendo un factor de proporcionalidad  $1/G$  dependiente de las propiedades del material, la ley de elasticidad para la deformación por corte se expresa por la ecuación algebraica:

$$a = \frac{Fh}{GA}$$

Considerando que  $\frac{a}{h} = \gamma$  y  $\frac{F}{A} = \tau$  obtenemos una expresión algebraica alterna a la ley de elasticidad para la deformación por corte.

$$\tau = G\gamma$$

Esta última expresión algebraica se conoce como la Ley de Hooke para la deformación por corte que es representada en la gráfica *esfuerzo de corte contra deformación unitaria al corte para un material* (figura 2.16), en la que,

$$\text{Módulo de corte} = \text{gradiente de } OA = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Deformación unitaria de corte}}$$

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

La unidad básica para el módulo de corte es *Newton por metro cuadrado* ( $N/m^2$ ) la tabla 2.3 muestra valores típicos del módulo de corte para varios materiales.

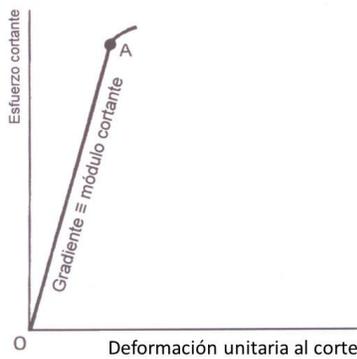


Figura 2.16. Gráfica  $\tau = \gamma$

Tabla 2.3. Valores Típicos del Módulo de Corte,  $G$

Material	Módulo de corte ( $GN/m^2$ )
Acero 0.25% Carbono	82.2
Acero 0.75% Carbono	81.1
Acero endulzado 0.75% Carbono	77.8
Hierro fundido	60.0
Cobre	48.3
Latón 70/30	48.3
Aluminio	26.1

Ejemplo 2.5.2 T. D.

El aparato mostrado en la figura 2.5.2. fue utilizado para determinar el módulo de corte de un hule (elastómero). Cuando la carga media fue de  $100N$ , la deflexión fue de  $1.2mm$ . Calcular el módulo de corte del hule.

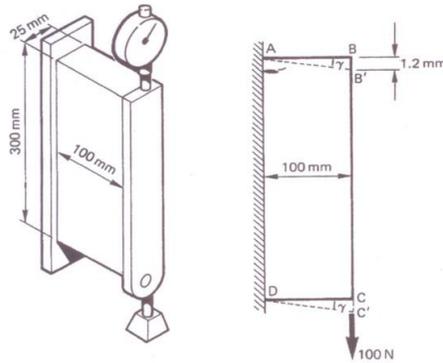


Figura 2.5.2. Aparato para Determinar el módulo de Corte

*Solución:*

Datos:  $F = 100N$ ,  $a = 1.2mm$ ,  $h = 100mm$ ,  $L = 300mm$ ,  $w = 25mm$

Determinar:  $G$  (Módulo de corte de hule)=?

Expresiones algebraicas principales a utilizar  $G = \frac{\tau}{\gamma}$ ,  $\tau = \frac{F}{A}$ ,  $\gamma = \frac{a}{h}$

Refiriéndonos a la figura 2.5.2 y a las expresiones algebraicas.

$$A = L \times W = 300mm \times 25mm$$

$$= 7500mm^2, \text{ por lo que}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{100N}{7500mm^2} = 0.0133N/mm^2$$

$$\text{de } \gamma = \frac{a}{h} = \frac{1.2mm}{100mm} = 0.012rad$$

$$\therefore G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{0.0133N/mm^2}{0.012rad}$$

$$= 1.11N/mm^2 \text{ o } 1.11MN/m^2$$

Por lo que el módulo del hule (caucho) es  $1.11MN/mm^2$

## 2.6. Relación de Poisson (Deformación Unitaria Lateral en Tracción y Compresión)

Experimentos como el ensayo de materiales a la tracción o compresión muestran que aun siendo muy pequeñas las deformaciones que sufren las probetas en la dirección longitudinal sus dimensiones laterales cambian. Un alargamiento en la dirección longitudinal produce una contracción en la dirección transversal y a la inversa el acortamiento en la dirección longitudinal es acompañada por una expansión lateral. Consecuentemente un cuerpo bajo tracción se alarga y se hace más delgado (figura 2.17), y bajo compresión se acorta y se hace más gruesa. Las deformaciones unitarias laterales en tracción o compresión son proporcionales a las deformaciones unitarias longitudinales.

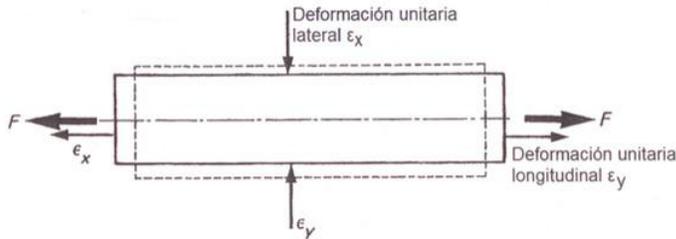


Figura 2.17. Compresión lateral debido a fuerza longitudinal

Si la deformación unitaria longitudinal se indica por  $\epsilon_x$  y la deformación unitaria lateral por  $\epsilon_y$ , entonces, como se ha encontrado de los experimentos,  $\epsilon_y$  es solamente una fracción de  $\epsilon_x$ , es decir,

$$\epsilon_y = \nu \epsilon_x$$

El factor constante  $\nu$  (nu) es conocido como *relación de Poisson*.

La *relación de Poisson* en tracción se define como

$$\nu = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\text{Deformación unitaria lateral a la compresión}}{\text{Deformación unitaria longitudinal a la tracción}}$$

y en compresión

$$\nu = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\text{Deformación unitaria lateral a la tracción}}{\text{Deformación unitaria longitudinal a la compresión}}$$

Poisson (1781-1840) pensó que la relación  $\nu$  era la misma e igual a 0.25 para todos los materiales. Sin embargo, subsecuentes experimentos mostraron que la relación de Poisson es diferente para diferentes materiales, variando desde 0 hasta 0.5. Valores numéricos promedio de esta relación para algunos materiales están dadas en la tabla 2.4. En la práctica para diseño  $\nu$  se toma como 0.3 para el acero; más allá del límite elástico  $\nu$  se incrementa hasta 0.5.

Tabla 2.4. Relación de Poisson para algunos materiales

MATERIAL	$\nu$	MATERIAL	$\nu$
Corcho	0.00	Cobre	0.34
Acero al carbono	0.24 a 0.28	Bronce	0.35
Aceros cromo-níquel	0.25 a 0.30	Hule (caucho)	0.47
Aluminio	0.26 a 0.36	Cera de parafina	0.50

Usando esta relación de Poisson, es posible determinar el cambio o variación en volumen de una barra bajo tracción o compresión.

El volumen de una barra de sección transversal cuadrada antes del alargamiento es

$$v_0 = a^2 L$$

El volumen de la barra después del alargamiento es

$$v_1 = [a(1 - \nu\varepsilon)]^2 l(1 + \varepsilon)$$

o

$$v_1 = a^2 l(1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon - 2\nu^2\varepsilon^2 + \nu^2\varepsilon^2 + \nu^2\varepsilon^3)$$

Despreciando los términos conteniendo los factores  $\varepsilon^2$  y  $\varepsilon^3$  por ser cantidades muy pequeñas tendiendo a cero, obtenemos:

$$v_1 = a^2 l (1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon)$$

Por lo que el incremento en volumen es

$$v_1 - v_0 = a^2 l (1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon) - a^2 l = a^2 l \varepsilon (1 - 2\nu)$$

El incremento en volumen unitario es

$$\frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{a^2 l \varepsilon (1 - 2\nu)}{a^2 l} = \varepsilon (1 - 2\nu)$$

Puesto que  $\nu < 0.5$ , entonces  $1 - 2\nu > 0$ , y el incremento en volumen es positivo para todos los materiales, tal que, el volumen siempre aumenta bajo tracción y esto es comprobado por experimentos. Sólo para la cera de parafina (para la cual  $\nu = 0.5$  que el volumen permanece sin cambio alguno).

Existe una relación entre las tres constantes elásticas  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  dada por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Esta expresión algebraica resulta del análisis de la Ley de Hooke generalizada; de la cual sólo dos de estas constantes son independientes, que pueden obtenerse por experimentos (ensaye de materiales); la tercera constante se determina de esta expresión algebraica. Por ejemplo, es más conveniente y confiable determinar los módulos  $E$  y  $G$  por experimentos, y después la relación de Poisson es calculada despejando  $\nu$  de esta expresión, como:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1$$

Por consiguiente para un material determinado se tiene:

$$\text{Si } G = \frac{2}{5}E, \quad \nu = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\text{Si } G = \frac{3}{8}E, \quad \nu = \frac{1}{3} = 0.33$$

Ejemplo 2.6.1. T. D.

Una barra de sección  $20\text{mm}$  por  $20\text{mm}$  y  $1\text{m}$  de largo está sujeta a una fuerza de tracción de  $200\text{kN}$ . Si los módulos elásticos del material son  $E=200\text{kN/mm}^2$  y  $G=85\text{kN/mm}^2$ , calcular la reducción aproximada en las dimensiones de la sección de la barra debidas a la carga aplicada en la dirección axial.

Solución:

Datos:  $a \times a = 20\text{mm} \times 20\text{mm}$ ,  $L = 1\text{m}$ ,  $F = 200\text{kN}$ ,  $E = 200\text{kN/mm}^2 = 200 \times 10^9\text{N/m}^2$

$$G = \frac{85\text{kN}}{\text{mm}^2} = 85 \times 10^9\text{N/m}^2$$

Calcular aproximadamente  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_a$

Modelos matemáticos principales  $\nu = \left(\frac{E}{2G} - 1\right)$ ,  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F}{EA} = \frac{F}{E(a \times a)}$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x, \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_a = -\nu\varepsilon_x$$

$$\text{de } \nu = \left(\frac{E}{2G} - 1\right) = \left(\frac{200\text{kN/mm}^2}{2(85\text{kN/mm}^2)} - 1\right) = 0.176 \Rightarrow \nu = 0.176 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{de } \varepsilon_y = \frac{F}{E(a \times a)} = \frac{200 \times 10^3\text{(N)}}{(200 \times 10^9\text{N/mm}^2)(20 \times 20\text{mm}^2)} = \frac{1}{400} = 0.0025$$

$$\text{y de } \varepsilon_a = -\nu\varepsilon_x = -0.176 \times 0.0025 = -0.00044$$

de aquí que la reducción en las dimensiones de las sección son:

$$\text{en la dirección } y = \varepsilon_y \times a_y = 0.00044 \times 20 = 0.0088\text{mm}$$

$$\text{en la dirección } z = \varepsilon_z \times a_z = 0.00044 \times 20 = 0.0088\text{mm}$$

### 2.7. Esfuerzos en Dos Dimensiones (Esfuerzos Bidimensionales)

Considere el elemento mostrado sujeto a esfuerzo en la figura 2.18a. Las deformaciones unitarias inducidas en el elemento por  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , cada una actuando solamente. Son mostradas en la figura 2.18b y 2.18c respectivamente. La figura 2.18 d ilustra el resultado total o deformaciones unitarias resultantes  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ .

Refiriéndonos a la figura 2.18d, la deformación unitaria resultante en la dirección  $\sigma_x$  esta dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Y la deformación unitaria resultante en la dirección  $\sigma_y$  esta dada por:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

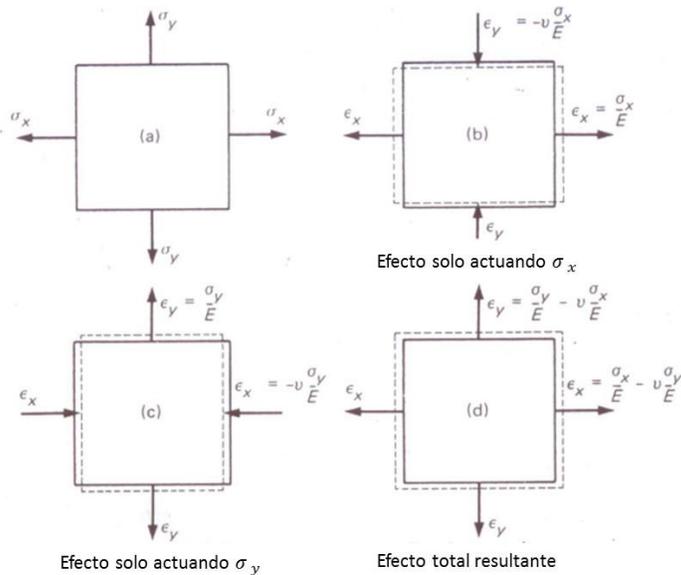


Figura 2.18. Esfuerzo en dos dimensiones

### 2.7.1. Cálculo de Recipientes de Pared Delgada

Un buen ejemplo de esfuerzo en dos direcciones acontece en el lado exterior de un recipiente de pared delgada sujeta a presión interna (presión manométrica).

Recipientes de pared delgada son recipientes cuyos espesores de pared es pequeña comparada con las dimensiones de recipiente y el radio de curvatura de las paredes no son menores a 10 veces su espesor.

En el diseño de recipientes de pared delgada se supone que las paredes delgadas no resisten flexión y que ellas desarrollan solamente esfuerzos de tracción y compresión los que son distribuidos uniformemente a través del espesor de la pared. Bajo estas suposiciones el diseño de tanques, calderas de vapor, cilindros de máquinas, etc., producen resultados bastante satisfactorios.

Los recipientes de pared delgada están formados principalmente por superficies de revolución en las que no existen discontinuidad o dobleces agudos, como el recipiente simétrico al eje axial general figura 2.19a de la cual es cortado un elemento limitado por dos líneas meridionales y dos líneas

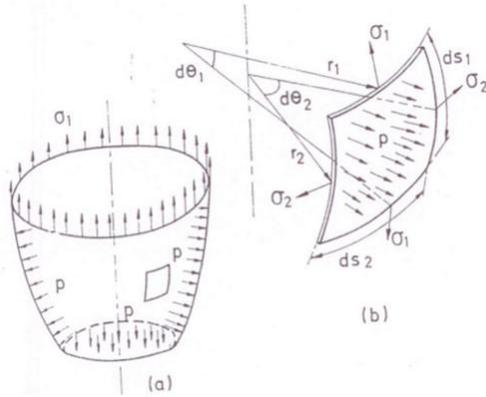


Figura 2.19

perpendiculares a las meridianas mostrado en la figura 2.19b con la notación siguiente:

- $\sigma_1$  = Esfuerzo de tracción en dirección meridional, esfuerzo meridional.
- $\sigma_2$  = Esfuerzo de tracción a lo largo de un círculo paralelo, esfuerzo de cincho.
- $r_1$  = Radio de curvatura meridional.
- $r_2$  = Radio de curvatura perpendicular a una meridiana.
- $t$  = Espesor de la pared.

Las fuerzas actuando sobre los lados del elemento; en la dirección meridional, son iguales a  $\sigma_1 t dS_1$ , y en la dirección perpendicular a los meridianos, son iguales a  $\sigma_2 t dS$ . Estas fuerzas tienen componentes hacia dentro dirigida a sus centros de curvatura. Las componentes radiales son  $2\sigma_1 t dS_2 \sin(d\theta_1/2)$  y  $2\sigma_2 t dS_1 \sin(d\theta_2/2)$ . Para valores pequeños de  $d\theta$  la fuerza total radial será:

$$\sigma_1 t dS_2 d\theta_1 + \sigma_2 t dS_1 d\theta_2 = \sigma_1 t dS_2 \frac{dS_1}{r_1} + \sigma_2 t dS_1 \frac{dS_2}{r_2}$$

La fuerza radial debida a la presión,  $p$ , es;

$$p dS_1 dS_2$$

Así, del equilibrio del elemento,

$$\sigma_1 t dS_2 \frac{dS_1}{r_1} + \sigma_2 t dS_1 \frac{dS_2}{r_2} = p dS_1 dS_2$$

Por lo que

$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p}{t} \quad \text{Ecuación de Laplace}$$

En general  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son ambas diferentes y desconocidas por lo que otra ecuación tiene que ser formulada a la situación pertinente, además de la ecuación de Laplace, para resolver los esfuerzos.

Aplicaremos la ecuación de Laplace para diseñar, recipientes de pared delgada de las formas más generales; esféricas y cilíndricas.

(i) Recipientes esféricos de pared delgada

El caso más simple de aplicación de la ecuación de Laplace puede ser en los recipientes esféricos. La simetría respecto a cualquier eje implica que  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  y por consiguiente  $r_1 = r_2 = r$ ; por lo tanto el esfuerzo circunferencial en cualquier dirección es:

$$\sigma = \frac{pr}{2t}$$

(ii) Recipientes cilíndricos de pared delgada

Este caso particular considera los principios de equilibrio más que el uso de la ecuación de Laplace para demostrar la utilización adicional de los diagramas de cuerpo libre (*dcl*).

*Equilibrio axial.* La fuerza actuando en cada extremo cerrado del cilindro debido a la presión interna,  $p$ , Figura 2.20b se obtiene del producto de la presión y el área sobre la cual actúa. De esta manera

$$Fuerza Axial = p\pi r^2$$

La parte del recipiente mostrada en el diagrama de cuerpo libre (*dcl*), figura 2.20b, esta simplemente en equilibrio axial bajo la acción de fuerza aplicada ( $p\pi r^2$ ) y el esfuerzo axial  $\sigma_x$  en el material, la presión radial mostrada no tiene fuerza resultante. El área de la sección transversal del material es

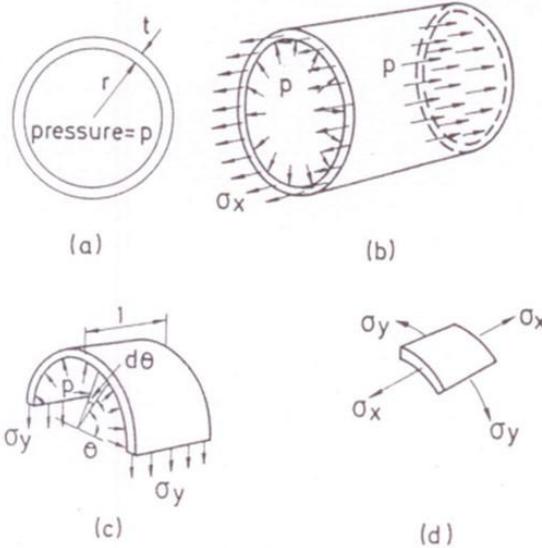


Figura 2.20

aproximadamente  $2\pi r t$ , por consiguiente la fuerza interna es  $\sigma_x \times 2\pi r t$ , y por la condición de equilibrio.

$$2\pi r t \sigma_x = \pi r^2 p$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{pr}{2t} \rightarrow \text{Esfuerzo axial o longitudinal}$$

*Equilibrio Circunferencial.* Considerando la mitad de un anillo de ancho unitario del cuerpo cilíndrico como el mostrado en el diagrama de cuerpo libre figura 2.20c la presión interna  $p$ , actuando hacia afuera deberá estar en equilibrio con el esfuerzo circunferencial,  $\sigma_y$ , como se muestra. Tomando una pequeña tira de esta mitad de anillo sustentando un ángulo  $d\theta$  mostrando en este  $dcl$ ; la componente de la fuerza radial actuando sobre este elemento de longitud unitaria es  $p \times 1 \times rd\theta$ ; por consiguiente la fuerza vertical total debido a la presión es

$$\int_0^\pi pr \sin\theta d\theta = 2pr$$

Es conveniente observar que la fuerza vertical puede también encontrarse considerando la presión  $p$  actuando sobre el área proyectada en el diámetro. Este hecho también demuestra que la fuerza axial es independiente de la forma de los cierres extremos del recipiente.

La fuerza interna requerida para equilibrar a la fuerza vertical, es obtenida del esfuerzo  $\sigma_y$  actuando en los dos extremos del elemento de longitud unitaria (mitad de anillo). De aquí que la fuerza interna es  $\sigma_y \times 2 \times t \times 1$ . Teniéndose por lo tanto  $2t\sigma_y = 2rp$ ; o

$$\sigma_y = \frac{pr}{t} \rightarrow \text{Esfuerzo circunferencial o anular}$$

Comparando las ecuaciones para  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  se observa que el esfuerzo circunferencial es el doble del esfuerzo axial, la figura 2.20d muestra un elemento pequeño de la cubierta del recipiente cilíndrico sujeto a esfuerzos axial (longitudinal) y circunferencial (anular).

Ejemplo 2.7.1.1. T. D.

El casco cilíndrico de una caldera (generador de vapor) es hecho de placa de acero de 12mm de espesor, soportando una presión del vapor de  $1.3MN/m^2$  abs. Los coeficientes de las juntas longitudinal y circunferencial son respectivamente de 75 y 35 por ciento. Si el esfuerzo de tracción en la cubierta (casco) no debe sobrepasar  $105MN/m^2$  encontrar el diámetro máximo permisible para una presión atmosférica =  $88kN/m^2$ .

*Solución*

$$\text{Datos: } t = 12mm = 0.012m, p_{abs} = \frac{1.3MN}{m^2}, \eta_c = 75\%, \eta_L = 35\% = 0.35, \sigma_T = 105MN/m^2$$

Determinar diámetro máximo permisible  $D = 2r$

$$\text{Modelos matemáticos principales: } \eta_L = \frac{\sigma_L}{\sigma_{Tmax}}; \eta_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{Tmax}}; p = p_{abs} - p_{atm}$$

$$\sigma_L = \frac{pr_L}{2t}; \sigma_c = \frac{pr_c}{t}$$

$$\text{de } \eta_L = \frac{\sigma_L}{\sigma_{Tmax}} \Rightarrow \sigma_L = \eta_L \sigma_{Tmax} = 0.35 \times 105 = 36.75MN/m^2$$

$$\text{de } \eta_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{Tmax}} \Rightarrow \sigma_c = \eta_c \sigma_{Tmax} = 0.75 \times 105 = 78.75MN/m^2$$

$$\text{de } p = p_{abs} - p_{atm} \Rightarrow p = 1300 - 88 = 1212kN/m^2 \quad \text{manométricos}$$

$$\text{de } \sigma_L = \frac{pr_L}{2t} \Rightarrow r_L = \frac{2t\sigma_L}{p} = \frac{2(12 \times 10^{-3}) \times (36.75 \times 10^6)}{1.212 \times 10^6} = 0.73m$$

$$\text{de } \sigma_c = \frac{pr_c}{t} \Rightarrow r_c = \frac{t\sigma_c}{p} = \frac{(12 \times 10^{-3}) \times (78.75 \times 10^6)}{1.212 \times 10^6} = 0.78m$$

Para satisfacer ambas condiciones el diámetro no debe exceder de

$$D = 2 \times 0.73 = 1.46m$$

Como antecedente al tema 2.8, presentamos un resumen de modelos matemáticos (formulas) principales necesarias para la Unidad II.- **Esfuerzo Simple, Deformación Unitaria y Elasticidad.**

$$\text{Esfuerzo simple (esfuerzo axial de tracción o compresión)} \sigma = \frac{\text{Fuerza } P}{\text{Área } A} = \frac{P}{A} \text{ en } \frac{N}{m^2}$$

Deformación unitaria  $\varepsilon = \frac{\text{variación en longitud}}{\text{longitud original}} = \frac{x}{l} = \frac{\Delta L}{l}$

Módulo de Young  $E = \frac{\text{Esfuerzo axial}}{\text{Deformación unitaria}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ en } \frac{N}{m^2} \rightarrow \{\text{Ley de Hooke para esfuerzo axial}\}$

Esfuerzo de corte (esfuerzo tangencial)  $\tau = \frac{\text{Fuerza de corte}}{\text{Área resistente al corte}} = \frac{F}{A} \text{ en } \frac{N}{m^2}$

Coefficiente de seguridad o factor de seguridad para elección de esfuerzos admisibles o de diseño  $[\sigma] = [\sigma_{adm.}] = \frac{\sigma_{lim.}}{[n]}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{siendo } [\sigma] \text{ esfuerzo admisible al corte } [n] \text{ coeficiente o factor de seguridad} \\ \text{y } [\sigma_{lim}] \text{ esfuerzo límite del material} \end{array} \right\}$

$\{ \text{para materiales frágiles, } \sigma_{lim} = \sigma_{\text{límite de resistencia}} \}$

$\{ \text{para materiales plásticos, } \sigma_{lim} = \sigma_{\text{límite de fluencia}} \}$

$[\tau] = (0.70 \dots 0.80)[\sigma], \quad [\tau] \text{ esfuerzo admisible o diseño para corte}$

Sistema de esfuerzos axiales estáticamente indeterminados:

Barra compuesta por dos cuerpos de diferente material "a" y "b" dispuestos concéntricamente y sujetos a un esfuerzo de compresión por una fuerza F en la que

$\varepsilon_a = \varepsilon_b; F_a + F_b = F \text{ como } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ y } F = \sigma A \text{ se tiene entonces } \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b} \text{ y } F = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b$

Esfuerzos debidos a cambios de temperatura en barras de longitud "L" en (m) como

$x = \Delta L = L\alpha\Delta\theta - \text{variación a cambio de longitud en (m)}$

$\left\{ \begin{array}{l} l \rightarrow \text{longitud original} \\ \alpha \rightarrow \text{coeficiente lineal } (^{\circ}\text{C}^{-1}) \\ \Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1) \text{ cambio de temperatura } ^{\circ}\text{C} \end{array} \right\}$

Por lo que para una expansión completamente restringida  $\sigma = E\alpha\Delta\theta$  en la que

$\alpha\Delta\theta = \frac{\sigma}{E} = \text{deformación unitaria para esfuerzos por temperatura}$

Para una expansión parcialmente restringida a un valor  $x_1 = \Delta l_1$

$\text{Deformación unitaria total directa} = \alpha\Delta\theta - \frac{x_1}{L} = (\text{Deformación unitaria por temperatura} - \text{Deformación unitaria por esfuerzo } \sigma)$

Pero como, Deformación unitaria  $\epsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma = E \left( \alpha \Delta\theta - \frac{x_1}{l} \right)$

Para incremento de temperatura y esfuerzo de tracción (o decremento de temperatura y un esfuerzo de compresión)

$$\epsilon = \alpha \Delta\theta \pm \frac{\sigma}{E}$$

Efecto de cambio de temperatura en barras compuestas con elementos concéntricos de diferente material "a" y "b" y con la misma longitud L.

$$\underbrace{(\alpha_a - \alpha_b)\Delta\theta}_{\substack{\text{Diferencia de las} \\ \text{deformaciones unitarias por} \\ \text{temperatura}}} = \underbrace{\left( \frac{\sigma_a}{E_a} + \frac{\sigma_b}{E_b} \right)}_{\substack{\text{Suma de las deformaciones} \\ \text{unitarias debidas a esfuerzos}}}$$

*considerando  $\alpha_a > \alpha_b$*

Como  $F_a = F_b \rightarrow \sigma_a A_a = \sigma_b A_b$

Para esfuerzos de corte en elementos de unión como tornillos, pernos, remaches, etc.

$$\tau = \frac{F}{A_{corte}} < [\tau]; \text{ para elementos de unión a doble corte } \tau = \frac{F}{2A_{corte}} \leq [\tau]$$

$$A_{corte} = \frac{\pi}{4} d^2 \text{ (d diámetro de los tornillos, remaches, pernos, etc.)}$$

Para esfuerzos de aplastamiento en placas o barras unidas por elementos de unión.

$$\sigma_{aplast} = \frac{F}{A_{aplast}} \leq [\sigma_c], A_{aplast} = d\delta$$

donde  $\left\{ \begin{array}{l} d \rightarrow \text{diámetro del elemento de unión} \\ \delta \rightarrow \text{espesor de la placa} \end{array} \right\}$

Relación de Poisson:  $\epsilon = v \epsilon_x$  en la que  $v$  - relación de poisson

Es decir  $v = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria longitudinal}}$ ; para metales  $0.25 \leq v \leq 0.33$

Esfuerzos axiales en dos direcciones

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - v \frac{\sigma_y}{E} \quad \text{y} \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - v \frac{\sigma_x}{E}$$

Recipientes de pared delgada sujetos a una presión interna

$$\text{Para un recipiente esférico de pared delgada } \sigma = \frac{Pr}{2t}$$

Para un recipiente cilíndrico de pared delgada  $\sigma_{axial} = \sigma_{longitudinal} = \frac{Pr}{2t}$

$$\sigma_{circunferencial} = \frac{pr}{t}$$

En las que:  $\left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow \text{presión interna (manométrica) en } \frac{N}{m^2} \\ r \rightarrow \text{radio de la esfera o cilindro en m} \\ t \rightarrow \text{espesor de la pared del recipiente en m} \end{array} \right\}$

## 2.8. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

### Ejemplos de Discusión

2.1.e.d. Un tubo de hierro fundido de 3m de longitud, esta completamente lleno en su interior con concreto y se usa como un tirante vertical. Si el diámetro exterior del tubo es 450mm con una pared de 35mm de espesor, determine la carga de compresión máxima que puede soportar este tirante compuesto, si el esfuerzo en el concreto no debe de sobrepasar de  $2N/mm^2$ . ¿Cuánto se acortara en su longitud el tirante bajo esta carga?. Para el hierro fundido,  $E = 100GN/m^2$ ; para el concreto,  $E = 10GN/m^2$ .

Solución:

Sea el subíndice  $a$  referido al hierro fundido y el subíndice  $b$  al concreto.

Datos:  $L = 3m$ ,  $D_a = 450mm$ ,  $e_a = 35mm$ ,  $d_a = 450 - 70 = 380mm = d_b$ ,

$$\sigma_b = 2N/mm^2, E_a = 100GN/m^2 = 100 \times 10^9 N/m^2, E_b = 10GN/m^2 = 10 \times 10^9 N/m^2$$

Determinar:  $F = ?$  carga máxima de compresión;  $x = \Delta l = ?$  Decremento de longitud.

Modelos matemáticos principales a utilizar  $\left\{ \begin{array}{l} E_a = E_b \Rightarrow \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b} \dots \dots \dots (i) \\ F = F_a + F_b = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b \dots (ii) \end{array} \right.$

de (i)

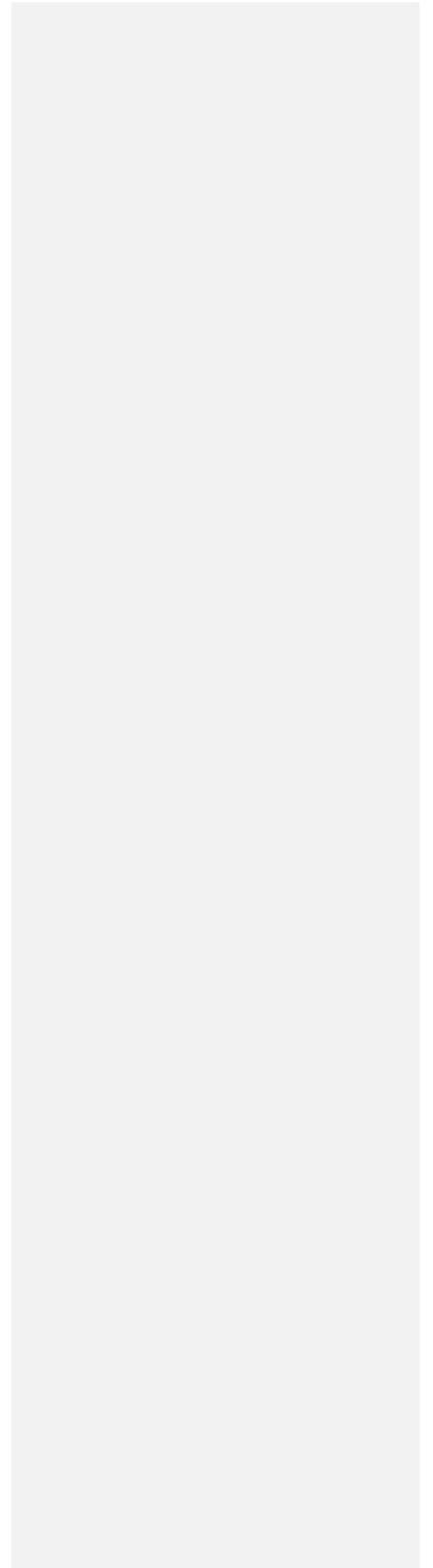
$$\sigma_a = \frac{\sigma_b E_a}{E_b} = \frac{2N/mm^2 \times 100 \times 10^9 N/m^2}{10 \times 10^9 N/m^2} = 20N/mm^2, \sigma_a = 20 \times 10^6 N/m^2$$

de (ii)

donde;  $A_a = \left(\frac{\pi}{4}\right) (450^2 - 380^2) mm^2 = 45.6 \times 10^3 mm^2$

y  $A_b = \left(\frac{\pi}{4}\right) (300^2) = 113.4 \times 10^3 mm^2$

$$\begin{aligned} \therefore F &= (20N/mm^2 \times 45.6 \times 10^3 mm^2) + (2N/mm^2 \times 113.4 \times 10^3 mm^2) \\ &= 1.14 \times 10^6 N \quad o \quad 1.14MN \end{aligned}$$



También de (i)  $E = \frac{x}{l} = \frac{\sigma}{E}$ ; donde  $l = 3m$  y considerando el concret

$$\sigma_b = 2 \times 10^6 N/m^2, \quad E_b = 10 \times 10^9 N/m^2$$

$$\therefore x = \frac{l\sigma_b}{E_b} = 3m \times \frac{2 \times 10^6 N/m^2}{10 \times 10^9 N/m^2} = 6 \times 10^{-4} m \quad \text{o} \quad x = 0.6mm$$

2.2.e.d. Una columna de concreto de sección transversal cuadrada de  $250mm$  por  $250mm$ , es requerida para soportar una carga axial de  $875kN$ . Determine el número mínimo de varillas de acero, cada una de  $6mm$  de diámetro, que deben ser requeridas para reducir el esfuerzo en el concreto a  $8N/mm^2$ . Para el acero,  $E = 200GN/mm^2$ ; para el concreto  $E = 12GN/m^2$

*Solución:*

Considerando el subíndice  $a$  referido al acero, el subíndice  $b$  referido al concreto y  $n$  es el número de varillas de acero requeridas.

Datos:  $L \times L = 3 + 250mm \times 250mm$ ,  $F = 875kN = 875 \times 10^3 N$ ,  $d_v = 6mm$ ,

$$\sigma_b = 8N/mm^2, \quad E_a = 200GN/m^2 = 200 \times 10^9 N/m^2, \quad E_b = 12GN/m^2 = 12 \times 10^9 N/m^2$$

Determinar:  $n =$  (número de varillas de acero) =?

Expresiones algebraicas principales a utilizar:

Deformación unitaria en el acero = Deformación unitaria en el concreto

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b} \dots \dots \dots (i)$$

Fuerza total = fuerza en el acero + fuerza en el concreto

$$F = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b \dots (ii)$$

de (i)

$$\sigma_a = \sigma_b \left( \frac{E_a}{E_b} \right) = 8N/mm^2 \times \frac{200 \times 10^9 N/m^2}{12 \times 10^9 N/m^2} = 133.3N/mm^2 = \sigma_a$$

de (ii)  $F = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b$

donde;  $F = 875kN = 875 \times 10^3 N$

$$A_a = \left( \frac{\pi}{4} \right) \times (6mm)^2 n = (28.27n)mm^2$$

$$y \quad A_b = (250mm)^2 - A_a = (62.5 \times 10^3 - 28.27n)mm^2$$

∴ Sustituyendo en (ii)

$$875 \times 10^3 = 133.3N/mm^2 \times (28.27n)mm^2 +$$

$$+8N/mm^2 \times (62.5 \times 10^3 - 28.27n)mm^2$$

$$875 \times 10^3 = 3768.4n + 510 \times 10^3 - 226.2n$$

∴  $n = 105.9$

Esto es: El mínimo número de varillas de acero requeridas es 106

2.3.e.d. La barra circular mostrada en la figura 2.21 esta sujeta a una carga de 150kN ¿Qué diámetro debe tener en la parte media esta barra, si su esfuerzo axial es 215MN/m<sup>2</sup>?  
 ¿Qué longitud la parte media de la barra tendrá, si el alargamiento total de la barra bajo la carga dada fuera 0.2mm? Tomar  $E = 206GN/m^2$

Solución:

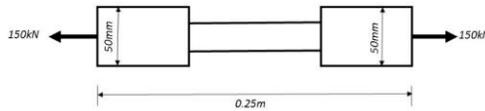


Figura 2.21

Considerando los subíndices  $\alpha$  para la porción (parte) media y  $\theta$  para las dos porciones extremas.

Datos:  $F = 150kN = 150 \times 10^3N$ ,  $\sigma = 215MN/m^2 = 215 \times 10^6N/m^2$ ,  $E = 206GN/m^2 = 206 \times 10^9N/m^2$

$$l = l_\alpha + l_\theta = 0.25m, \Delta l = 0.2mm = 0.0002m, d_\theta = 50mm = 0.05m$$

Determinar:  $d_\alpha = ?$  y  $\Delta l_\alpha = ?$  para  $\Delta l = 0.2mm$

Expresiones algebraicas principales:

$$\sigma = \frac{F}{A} \dots \dots (1), \quad \sigma = \epsilon F \dots \dots (2), \quad E = \frac{\Delta l}{l} \dots \dots (3)$$

De (1) para la porción media  $\sigma = \frac{F}{A_\alpha} \Rightarrow A_\alpha = \frac{F}{\sigma} = \frac{150 \times 10^3N}{215 \times 10^6N/m^2}$

$$A_\alpha = 0.698 \times 10^{-3}m^2$$

∴ Diámetro requerido  $d_\alpha = \left[ \frac{4}{\pi} \times A_\alpha \right]^{1/2} = \sqrt{\left( \frac{4}{\pi} \times 0.648 \times 10^{-3} \right) m^2} = 0.0298m$

$$d_\alpha = 29.8mm$$

De (3) y (2) el alargamiento  $\Delta l_\alpha = l_\alpha \times \frac{\sigma}{E} = l_\alpha m \times \frac{215 \times 10^6 N/m^2}{206 \times 10^9 N/m^2} = 1.04 l \times 10^{-3} m$

y el alargamiento total de las dos porciones extremas:

$$\Delta l_\beta = l_\beta \times \frac{\sigma}{E} = (0.25 - l_\alpha) \times \frac{\sigma}{E} = (0.25 - l_\alpha) \times \frac{F}{A_\beta E} \text{ por lo que}$$

$$\begin{aligned} \Delta l_\beta &= \frac{(0.25 - l_\alpha) m \times 150 \times 10^3 N}{\frac{1}{4} \pi \times (5 \times 10^{-2} m)^2 \times 206 \times 10^9 N/m^2} \\ &= 0.371(0.25 - l_\alpha) \times 10^{-3} mm \end{aligned}$$

Como el alargamiento total de la barra = Alargamiento de la porción media + Alargamiento de las dos porciones extremas

o

$$0.2 \times 10^{-3} m = 1.04 l_\alpha \times 10^{-3} m + 0.371(0.25 - l_\alpha) \times 10^{-3} m$$

de la que

$$0.6691 l_\alpha = 0.2 - 0.093 = 0.107$$

$$\therefore l_\alpha = 0.160 m$$

La porción media de la barra será de 160 mm de longitud.

2.4.e.d. Una vía de ferrocarril es tendida tal que no tiene esfuerzo en los rieles a 20°C. Calcular el esfuerzo en los rieles a -6°C si toda la contracción es evitada. Tomar  $E = 206 GN/m^2$  y  $\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ C$ . Sin embargo, si hay 6 mm de tolerancia a la contracción por riel, ¿Cuál es el esfuerzo a -6°C? Los rieles son de 27 m de largo.

Solución:

Datos:  $\theta_1 = 20^\circ C$ ,  $\theta_2 = -6^\circ C$ ,  $\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ C$ ,  $E = 206 GN/m^2 = 206 \times 10^9 N/m^2$ ,  $l = 27 m$

Determinar:  $\sigma_{\theta_2 = -6^\circ C} = ?$  y  $\sigma'_{\theta_2 = -6^\circ C} = ?$  si  $\Delta l_T = 6 mm$  es permitido o tolerado

Modelos matemáticos a utilizar:

$$\Delta l_\theta = \alpha l \Delta \theta \dots \dots (1), \quad \sigma = \alpha l \Delta \theta E \dots \dots (2),$$

Para el esfuerzo de tracción en los rieles si toda la contracción es evitada, de (2)

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_2 = -6^\circ C} &= \alpha \Delta \theta E = 12 \times 10^{-6} \times [20 - (-6)] \times (206 \times 10^9 N/m^2) \\ &= 64.3 MN/m^2 = 64.3 \times 10^6 N/m^2 \end{aligned}$$

La contracción "libre" de un riel es

$$\text{de (1) } \Delta l_{\theta} = \alpha l \Delta \theta = 12 \times \frac{10^{-6}}{^{\circ}\text{C}} \times 27\text{m} \times 26^{\circ}\text{C} = 8.42 \times 10^{-3}\text{m} \\ = 8.42\text{mm}$$

y de la Ley de Hooke  $\sigma = \varepsilon E$  para un alargamiento de  $(8.42-6)\text{mm}$

$$\sigma'_{\theta_2, -6^{\circ}\text{C}} = \varepsilon' \times E = \frac{(\Delta l_{\theta} - \Delta l_T)}{l} \times E = \frac{(8.42 - 6) \times 10^{-3}\text{m}}{27\text{m}} \times (206 \times 10^9)\text{N/m}^2 \\ = \frac{(2.42 \times 10^{-3})\text{m}}{27\text{m}} \times (206 \times 10^9)\text{N/m}^2 \\ = 18.48\text{MN/m}^2 = 18.48 \times 10^6\text{N/m}^2$$

2.5.e.d. El ensamble mostrado en la figura 2.22 consiste de un cilindro hueco de latón amordazado entre dos bridas por una espiga de acero. El cilindro es de  $60\text{mm}$  de diámetro exterior y  $45\text{mm}$  de diámetro interior y la espiga es de  $12\text{mm}$  de diámetro. A la temperatura de  $10^{\circ}\text{C}$  el esfuerzo de tracción en la espiga es de  $60\text{N/mm}^2$ . ¿Cuál es el esfuerzo de compresión en el material del cilindro? Si la temperatura del ensamble ahora se incrementa a  $40^{\circ}\text{C}$ , calcular los esfuerzos totales en los materiales del cilindro y de la espiga. Ignorar el efecto de temperatura en las bridas. Para el acero,  $E = 200\text{kN/mm}^2$  y  $\alpha = 11.5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ . Para el latón,  $E = 90\text{kN/mm}^2$  y  $\alpha = 17 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$

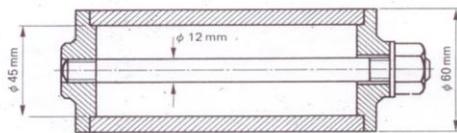


Figura 2.22

*Solución:*

Asignando el subíndice  $A$  al latón y el subíndice  $B$  al acero.

Datos:  $D_A = 60\text{mm}$ ,  $d_A = 45\text{mm}$ ,  $d_B = 12\text{mm}$ ,  $\sigma_B = 60\text{N/mm}^2$  a  $\theta_1 = 10^{\circ}\text{C}$

$$\theta_2 = 40^{\circ}\text{C}, \quad E_A = 90\text{kN/mm}^2 = 90 \times 10^3\text{N/mm}^2, \quad \alpha_A = 17 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C},$$

$$E_B = 200\text{kN/mm}^2 = 200 \times 10^3\text{N/mm}^2, \quad \alpha_B = 11.5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$$

Determinar:  $\sigma_{A_{10^{\circ}\text{C}}} = ?$ ,  $\sigma_{A_{40^{\circ}\text{C}}} = ?$ ,  $\sigma_{B_{40^{\circ}\text{C}}} = ?$

Expresiones algebraicas principales a utilizar:

Fuerza sobre el cilindro de latón = Fuerza sobre la espiga de acero

$$\sigma_A A_A = \sigma_B A_B \dots \dots (1)$$

$$y \varepsilon_{A_{Total}} = \varepsilon_{B_{Total}} \Rightarrow (\alpha_A - \alpha_B) \Delta\theta = \frac{\sigma_A}{E_A} + \frac{\sigma_B}{E_B} \dots \dots (2)$$

$$\text{de (1) } \sigma_A = \sigma_B \times \frac{A_B}{A_A} \dots \dots (3)$$

$$\text{donde } A_A = \left(\frac{\pi}{4}\right) \times (60^2 - 45^2) \text{mm}^2 = 1237 \text{mm}^2$$

$$y \quad A_B = \left(\frac{\pi}{4}\right) \times (12 \text{mm})^2 = 113.1 \text{mm}^2$$

$$\therefore \sigma_A = \frac{113.1 \text{mm}^2}{1237 \text{mm}^2} \times \sigma_B = 0.091 \sigma_B$$

A una temperatura de 10°C

$$\sigma_{B_{10^\circ C}} = 60 \text{N/mm}^2$$

$$\sigma_{A_{10^\circ C}} = 0.091 \times 60 \text{N/mm}^2$$

$$= 5.46 \text{N/mm}^2 = 5.46 \times 10^6 \text{N/m}^2$$

Esto es, a una temperatura de 10° C, el esfuerzo de compresión en el cilindro es  $5.46 \times 10^6 \text{N/m}^2$

Sustituyendo  $\sigma_A = 0.091 \sigma_B$  en (2) tenemos

$$(\alpha_A - \alpha_B) \Delta\theta = 0.091 \sigma_B / E_A + \sigma_B / E_B$$

$$\therefore \sigma_B = \frac{(\alpha_A - \alpha_B) \Delta\theta}{0.091/E_A + 1/E_B} \dots \dots (4)$$

$$\text{donde } \alpha = 17 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}, \quad \alpha_B = 11.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

$$\dots \Delta\theta = 40^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C} = 30^\circ\text{C}$$

$$E_A = 90 \text{kN/mm}^2 = 90 \times 10^3 \text{N/mm}^2$$

$$E_B = 200 \text{kN/mm}^2 = 200 \times 10^3 \text{N/mm}^2$$

A una temperatura de 40°C sustituyendo valores en (4)

$$\sigma_{B_{40^\circ C}} = \frac{(17 - 11.5) \times 10^{-6}/^\circ\text{C} \times 30^\circ\text{C}}{0.091/(90 \times 10^3 \text{N/mm}^2) + 1/(200 \times 10^3 \text{N/mm}^2)}$$

$$= \frac{1.65 \times 10^{-4}}{(1.011 + 5) \times 10^{-6}} N/mm^2$$

$$= 27.45 N/mm^2$$

Es decir, el esfuerzo de tracción en la espiga se incrementa a  $27.45 N/mm^2$

$$\therefore \text{Esfuerzo total en la espiga a } 40^\circ C = 60 N/mm^2 + 27.45 N/mm^2$$

$$= 87.45 N/mm^2 = 87 \times 10^6 N/mm^2$$

y el esfuerzo total en el latón a  $40^\circ C = 0.091 \times 87.45 N/mm^2$

$$= 7.96 N/mm^2 = 7.96 \times 10^6 N/mm^2$$

es decir  $\sigma_{A_{40^\circ C}} = 7.96 \times 10^6 N/m^2$  y  $\sigma_{B_{40^\circ C}} = 87.45 \times 10^6 N/m^2$

Comentario [A2]:

2.6.e.d. Dos tiras de acero, A y B, de espesor  $\delta = 10mm$  y ancho  $b = 150mm$  son remachadas junto con dos placas cubiertas como se muestra en la figura 2.23. El diámetro de los remaches es  $d = 16mm$ , el espesor de las placas cubiertas es  $\delta_1 = 6mm$  su ancho es igual al de las tiras remachadas, es decir,  $150mm$ . Determine los esfuerzos en los remaches y en las tiras de acero si la carga de tracción  $F = 80kN$ .

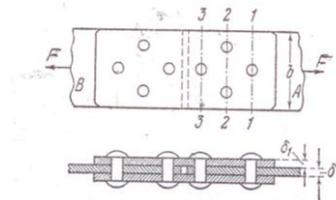


Figura 2.23. Junta a tope con doble cubrejunta

Solución:

Datos:  $\delta = 10mm$ ,  $b = 150mm$ ,  $d = 16mm$ ,  $\delta_1 = 6mm$ ,  $b_1 = 150mm$ ,  
 $N = 8$ remaches,  $N_A = 4$ remaches,  $N_B = 4$ remaches,  $F = 80kN$

Determinar: 1. Esfuerzos en los remaches  $\tau_R$ , 2. Esfuerzos en las tiras  
 $\sigma$  y  $\sigma_{apl}$

Expresiones algebraicas a utilizar:

$$\tau = \frac{F}{A_{cor}} \dots \dots (1), \quad \sigma = \frac{F}{A} \dots \dots (2), \quad \sigma_{apl} = \frac{F}{A_{apl}} \dots \dots (3)$$

1. Esfuerzos en los remaches, se tienen  $N_A = 4$ remaches en doble corte

$$\text{de (1) } \tau = \frac{F_A}{N_A \times 2A_{cor}} = \frac{80 \times 10^3 N}{4 \times 2 \times (0.725 \times 16^2) mm^2} = 49.76 N/mm^2 \cong 50 N/mm^2 \\ \cong 50 \times 10^6 N/m^2$$

2. Esfuerzos en las tiras remachadas *A* y *B*. En la sección 1-1 la fuerza total *F* se transmite a la tira *A*. Esta sección 1-1 esta debilitada por un (1) remache por consiguiente de (2) para esta sección.

$$\sigma_{1-1} = \frac{F_{1-1}}{A_{1-1}} = \frac{1F}{\delta(b-d)} = \frac{80 \times 10^3}{10(150-16)} = \frac{80000}{1340} 59.7 N/mm^2 = 59.7 MN/m$$

En la sección 2-2 la fuerza transmitida es solamente  $\frac{3}{4}F$  y la sección 2-2 es debilitada por dos remaches por lo que de (2), se tiene:

$$\sigma_{2-2} = \frac{F_{2-2}}{A_{2-2}} = \frac{\frac{3}{4}F}{\delta(b-2d)} = \frac{\frac{3}{4} \times 80 \times 10^3}{10(150-2 \times 16)} = 50.8 N/mm^2 = 50.8 MN/m^2$$

Por lo tanto, 15 por ciento menos que en la sección 1-1.

Para la sección 3-3 la fuerza transmitida es  $F - \frac{3}{4}F = \frac{1}{4}F$ , la área de la sección transversal de la tira es la misma como la de la sección 1-1 por lo que de (2)

$$\sigma_{3-3} = \frac{F_{3-3}}{A_{3-3}} = \frac{\frac{1}{4}F}{\delta(b-d)} = \frac{\frac{1}{4} \times 80 \times 10^3}{10(150-16)} = 15 N/mm^2 = 15 MN/m^2$$

Esta es, 75 por ciento menos que en la sección 1-1.

Determinación del esfuerzo de aplastamiento o apoyo en la tira debida a la presión ejercida por un remache; por lo que de (3)

$$\sigma_{v_{aplast}} = \frac{F_b}{A_b} = \frac{\frac{1}{4}F}{\delta d} = \frac{\frac{1}{4} \times 80 \times 10^3}{10 \times 16} = 125 N/mm^2 = 125 MN/m^2$$

2.7.e.d. En el empalme de dos barras rectangulares de madera de pino (figura 2.24). El ángulo entre ejes de las barras es  $\alpha = 30^\circ$ . La fuerza actuando a lo largo de la barra inclinada es  $F = 40 kN$ . El esfuerzo permisible por aplastamiento es  $[\tau] = 1.2 N/mm^2$  y su esfuerzo permisible por aplastamiento es  $[\sigma_b] = 6 N/mm^2$ . Si las dimensiones de la sección transversal de la barra horizontal son  $h = b = 150 mm$ , determine los valores *x* y *y* del extremo de esta barra necesarios para resistir los esfuerzos producidos por la aplicación de la fuerza  $F = 40 kN$ .

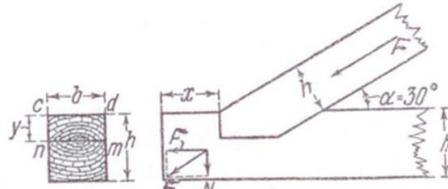


Figura 2.24

Solución:

Datos:  $F = 40kN = 40 \times 10^3 N$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $[\tau] = 1.2N/mm^2$ ,  $[\tau_b] = 6.0N/mm^2$   
 $h = b = 150mm$ ,

Determinar: Los valores de  $x$  y  $y$  mínimos

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$\tau_{max} = \frac{\text{Fuerza de corte}}{\text{Área de corte}} \leq [\tau] \dots \dots \dots (1)$$

$$\sigma_{max_{aplast}} = \frac{\text{Fuerza de aplastamiento}}{\text{Área de aplastamiento}} \leq [\sigma_b] \dots (2),$$

Por las condiciones del acoplamiento, la componente horizontal de la fuerza  $F$  produce esfuerzo de corte en el extremo (punta) de la barra horizontal y al mismo tiempo un esfuerzo de aplastamiento sobre la cara  $ncdm$  de la caja de la ensambladura de las barras.

La componente horizontal de  $F$  es  $F_1 = F \cos \alpha \dots (3)$ , por lo que la longitud  $x$  que se prolonga posterior a la ensambladura determinada por la ecuación (1)

$$\sigma_{max} = \frac{F_1}{A_{cort}} = \frac{F_1}{bx} \leq [\tau]$$

$$\therefore A_{cort} = bx \geq \frac{F \cos \alpha}{[\tau]} \Rightarrow x \geq \frac{F \cos \alpha}{b[\tau]} = \frac{(40 \times 10^3) \times \cos 30^\circ N}{150 \times 1.2 N/mm^2} = 192.5mm \approx 200mm$$

Por lo tanto  $x_{min} \approx 200mm$

De la ecuación (2)

$$\tau_{max_{aplast}} = \frac{F_1}{A_{aplast}} = \frac{F_1}{by} \leq [\sigma_b]$$

$$\therefore A_{aplast} = by \geq \frac{F \cos \alpha}{[\sigma_b]} \Rightarrow y \geq \frac{F \cos \alpha}{b[\sigma_b]} = \frac{(40 \times 10^3) \times \cos 30^\circ N}{150 \times \frac{6N}{mm^2}} = 38.5mm \approx 40mm$$

Considerando un valor para  $y_{min} \approx 40mm$

2.8.e.d. Determine las longitudes de las costuras de soldadura en la junta mostrada en la figura 2.25. Considerar que tanto las costuras laterales como la frontal son de igual longitud. El esfuerzo permisible de corte de la soldadura  $[\tau] = 126.9 \text{ MPa}$

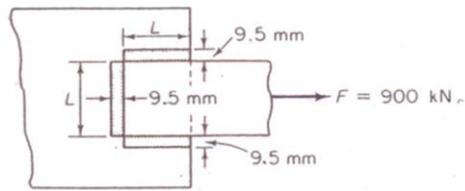


Figura 2.25

*Solución:*

Datos: de la figura 2.25;  $\delta = \delta_{lat} = \delta_{fr} = 9.5mm, F = 900kN; [\tau] = 126.9MPa = 126MN/m^2$

Determinar:  $L = L_{lat} = L_{fr} = ?$

Expresiones algebraicas principales a utilizar:

$$\tau = \frac{F}{lh} = \frac{F}{l \times 0.7\delta} \leq [\tau_{cor}] \dots \dots (i)$$

de (i)  $F \leq (l \times 0.7\delta)[\tau] \dots \dots (ii)$

donde:  $l = 2L_{lat} + 1l_{fr} = 3L, F = 900 \times 10^3N, \delta = 9.3 \times 10^{-3}m, [\tau] = 126.9 \times 10^6N/m$

sustituyendo valores en (ii)

$$900 \times 10^3N \leq (3Lm \times 0.7(9.5 \times 10^{-3}m)) \times 126.9 \times 10^6N/m^2 \dots \dots (iii)$$

$$\therefore 3Lm \geq \frac{900 \times 10^3N}{0.7(9.5 \times 10^{-3}m) \times 126.9 \times \frac{10^6N}{m^2}} \geq \frac{900 \times 10^3m}{843.9 \times 10^3} \geq 1.1m$$

Por lo que  $3L \geq 1.1 \Rightarrow L \geq \frac{1.1}{3} \geq 0.355m = 35.5cm$

2.7. Calcular el espesor mínimo de un recipiente cilíndrico de pared delgada de 1.2m de diámetro si está sujeto a una presión interna de  $1.75MN/m^2(17.5bares)$  y

- (a) El esfuerzo longitudinal no podrá ser mayor a  $28MN/m^2$
- (b) El esfuerzo circunferencial no podrá ser mayor a  $42MN/m^2$

*Solución:*

Datos:  $d = 1.2m, r = 0.6m, p = 1.75 \times 10^6N/m^2$

Determinar: (a)  $t$  (espesor de la pared) para  $[\sigma_L] = 28MN/m^2 = 28 \times 10^6N/m^2$

y (b)  $t$  para  $[\sigma_c] = 42MN/m^2 = 42 \times 10^6N/m^2$

Modelos matemáticos principales necesarios:

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t_L} \leq [\sigma_L] \dots \dots (A); \quad \sigma_c = \frac{pr}{t_c} \leq [\sigma_c] \dots \dots (B)$$

$$\text{de (A)} t_L \geq \frac{pr}{2[\sigma_L]} \geq \frac{(1.75 \times 10^6N/m^2) \times 0.6m}{2 \times (28 \times 10^6N/m^2)} \geq 0.0188m = 18.8mm$$

$$\text{de (B)} t_L \geq \frac{pr}{2[\sigma_c]} \geq \frac{(1.75 \times 10^6N/m^2) \times 0.6m}{2 \times (42 \times 10^6N/m^2)} \geq 0.025m = 25mm$$

2.8.e.d.(a) obtener la expresión algebraica para el incremento proporcional de la capacidad de un recipiente esférico de pared delgada debido a la presión interna a que puede estar sujeto (b) Calcular el incremento en volumen de un recipiente esférico de 1m de diámetro y 10mm de espesor de la cubierta, cuando esta sujeto a una presión interna de 1.4MN/m<sup>2</sup>(14bares). Tomar para el material del recipiente; E = 200GN/m<sup>2</sup> y v = 0.3

Solución:

Datos: d = 1m, t = 10mm = 0.010m, p = 1.4 ×  $\frac{10^6 N}{m^2}$ , E = 200 ×  $\frac{10^9 N}{m^2}$ , v = 0.3

Determinar: (a) Expresión algebraica para δV =?, y  
(b) Valor de δV para los datos proporcionados

Expresiones algebraicas principales a utilizar  $\sigma_c = \frac{pr}{2t} = \frac{pd}{4t}$  ... (A)

Volumen de una esfera  $V_{esf} = \frac{1}{6}\pi d^3$  ... (i),  $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ , ... (ii)

del tema 2.7  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - v \frac{\sigma_y}{E}$  ... (iii) y  $\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - v \frac{\sigma_x}{E}$  ... (iii)'

Para cualquier punto de cubierta esférica el esfuerzo  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_c$ ; para lo que la deformación unitaria circunferencial  $\epsilon_c$ , de las expresiones (iii) y (iii)'

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E} - \frac{v\sigma_c}{E} = \frac{\sigma_c}{E}(1 - v) \dots (1)$$

y sustituyendo (A) en (1)

$$\epsilon_c = \frac{pd}{4tE}(1 - v)$$

Si δd es el incremento en el diámetro, el incremento proporcional en volumen es:

$$\begin{aligned} a) \frac{\delta V}{V} &= \frac{\text{Volumen final} - \text{volumen inicial}}{\text{volumen inicial}} \\ &= \frac{\frac{1}{6}\pi(d+\delta d)^3 - \frac{1}{6}\pi d^3}{\frac{1}{6}\pi d^3} \\ &= \frac{d^3 + 3d^2(\delta d) + 3d(\delta d)^2 + (\delta d)^3 - d^3}{d^3} \\ &= 3 \frac{\delta d}{d} \text{ (desprecian los productos de cantidades pequeñas)} \\ &= 3x \text{ deformación unitaria circunferencial (diametral) } \epsilon_c \end{aligned}$$

tal que

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{3pd}{4tE}(1-v) \Rightarrow \delta V = V \left[ \frac{3pd}{4tE}(1-v) \right] \dots \dots (2)$$

b) Por lo que para determinar el valor de  $\delta V = V_f - V_0$

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{1}{6}\pi d^3 \times \frac{3pd}{4tE}(1-v) \\ &= \frac{\pi p d^4}{8tE}(1-v) \\ &= \frac{\pi \times (1.4 \times 10^6 N/m^2) \times (1m)^4}{8 \times (10 \times 10^{-3}m) \times (200 \times 10^9 N/m^2)} \times (1 - 0.3) \\ &= 1.924 \times 10^{-4} m^3 = 192.400 \times 10^3 mm^3 \cong (0.037\%)V_0 \end{aligned}$$

## 2.8. Ejercicios de Trabajo

2.1.e.t. Una barra compuesta de 350mm de longitud consiste de un tubo de cobre y soldado a tope en uno de sus extremos a una barra de acero. Las dimensiones del tubo son 30mm de diámetro exterior y 20mm de diámetro interior por 200mm de longitud, y la barra de acero es de 30mm de diámetro y 150mm de longitud. Si la barra soporta una carga axial de 4kN, determine:

- El esfuerzo en el cobre y en el acero.
- El cambio de longitud de la barra compuesta

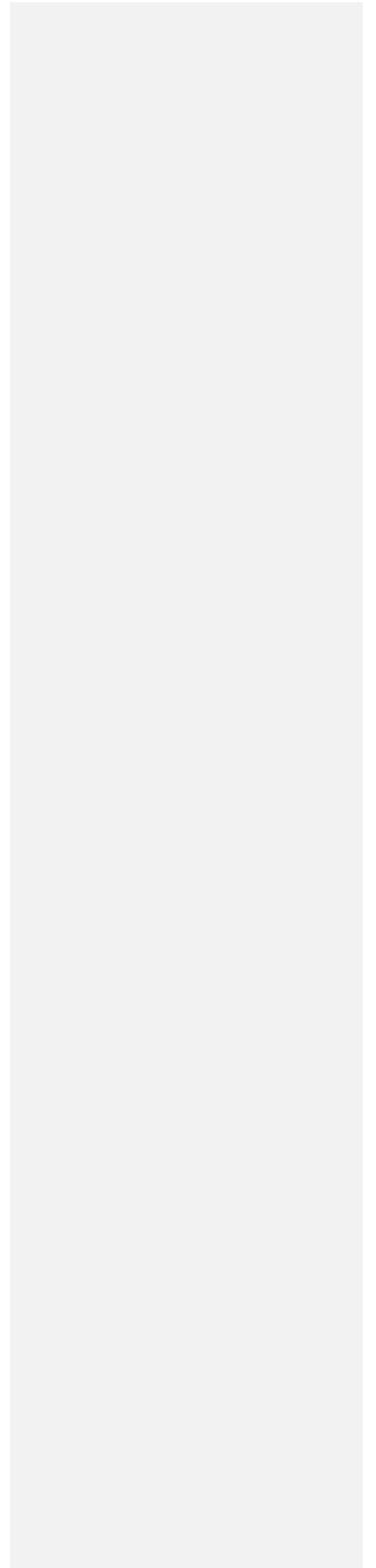
Para el acero  $E = 200GN/m^2$ ; para el cobre  $E = 120GN/m^2$

2.2.e.t. Un recipiente de acero de un filtro de aceite es sostenido en su lugar por una espiga roscada en un extremo de latón, de 10mm de diámetro y una longitud efectiva de 125mm. El diámetro exterior del recipiente de acero es de 55mm, de un espesor de 2.5mm y su longitud efectiva es de 125mm, si la fuerza de sujeción sobre la espiga a una temperatura de 15°C es de 1500N para sujetar al recipiente del filtro en su lugar.

¿A qué temperatura justamente el filtro empezará a fugar?

Despreciar el efecto del aumento de temperatura sobre la placa extrema del filtro y tomar E para el latón y acero como 90GN/m<sup>2</sup> y 200GN/m<sup>2</sup> respectivamente. Los coeficientes de expansión lineal para el latón y acero s respectivamente  $16 \times 10^{-6}C^{-1}$  y  $12 \times 10^{-6}C^{-1}$

2.3.e.t. Una columna de concreto de 250mm de diámetro y 3m de longitud, reforzada por varillas de acero, c/u de 10mm de diámetro y 3m de longitud. Si el esfuerzo máximo en el concreto no debe exceder de 5N/mm<sup>2</sup>, Calcular el número mínimo de varillas de acero requeridas para que esta columna reforzada de concreto pueda soportar una carga axial de 600kN.



¿Cuánto se acortará esta columna bajo esta carga?

Para el acero  $E = 200GN/mm^2$ ; para el concreto  $E = 10kN/mm^2$

2.4.e.t. Dos placas de acero están unidas por remaches, teniéndose 10 remaches de 8mm de diámetro en la junta remachada a traslape. Si el esfuerzo de corte en el material del remache esta limitado a  $5N/mm^2$ , determinar la fuerza de corte máxima que la junta puede soportar.

2.5.e.t. El perno de la horquilla en una eslinga de acero es de 30mm de diámetro, esta en doble corte. ¿Cuál será la carga máxima que el perno puede soportar si el esfuerzo de corte esta limitado a  $10N/mm^2$ ?

2.6.e. t. El esfuerzo de corte de una flecha de transmisión de potencia es de  $2.6N/mm^2$ . Si G para el material de la flecha es de  $79GN/m^2$ , determinar la deformación unitaria al corte.

2.7.e.t. En un punto de un cuerpo sujeto a esfuerzos; la deformación unitaria al corte se encontró ser  $4.8 \times 10^{-4}rad$ . Si el módulo de rigidez (módulo de corte) para el material es de  $60kN/mm^2$ . ¿Cuál fue el esfuerzo de corte aplicado?

2.8.e.t. En un experimento para determinar el módulo de corte de una aleación de hierro (ACERO) se tomaron las siguientes observaciones:

Esfuerzo de corte ( $N/mm^2$ )	→	5	10	15	20	25
Deformación unitaria al corte $rad \times 10^{-5}$	→	6.3	12.9	19.2	25.7	32

Construir una gráfica de esfuerzo de corte VS deformación unitaria al corte y de aquí determinar el módulo de corte para el acero

2.9.e.t. Una barra compuesta consiste de una tira o solera de bronce de 20mm de ancho y 4mm de espesor emparedada entre dos tiras de acero cada una de 20mm de ancho y 3mm de espesor, las tres tiras están sujetadas firmemente por dos remaches cada uno de 6mm de diámetro y separados a una distancia de 50mm. El esfuerzo de corte a la falla en el material del remache es de  $8.49N/mm^2$ . Si el ensamble fue hecho a una temperatura de  $16^\circ C$  y después es calentado.

¿A qué temperatura fallaran los remaches?

¿Cuál será la distancia entre los remaches en el momento de la falla?

Despreciar el efecto de la temperatura sobre el material de los remaches.

Para el acero  $E = 200kN/mm^2$ ; y  $\alpha = 11.5 \times 10^{-6}C^{-1}$

Para el bronce  $E = 90kN/mm^2$ ; y  $\alpha = 16 \times 10^{-6}C^{-1}$

2.10.e.t. Un cable de acero de diámetro 25mm y longitud de 4m esta sujeto a una fuerza de tracción de 30kN. Si el módulo de elasticidad y la relación de Poisson para el material son  $200GN/m^2$  y 0.28 respectivamente, determinar la longitud final y el diámetro del cable.

2.11.e.t. La holgura o juego diametral entre una flecha y su soporte tipo chumacera con diámetro de flecha de  $200\text{mm}$ , es de  $0.04\text{mm}$ , sin el módulo de elasticidad y la relación de Poisson para el material de la flecha son  $207\text{GN}/\text{m}^2$  y  $0.29$  respectivamente, determinar la fuerza axial que debe ser aplicada a la flecha para reducir el juego o claro diametral a  $0.01\text{mm}$ .

2.12.e.t. Un material esta sujeto a dos esfuerzos de tracción mutuamente perpendicular de magnitud  $40\text{N}/\text{mm}^2$  y  $60\text{N}/\text{mm}^2$  respectivamente. Si la relación de Poisson y el módulo de elasticidad son  $0.3$  y  $150\text{kN}/\text{mm}^2$  respectivamente, determinar las deformaciones unitarias totales en las direcciones de los esfuerzos.

2.13.e.t. En un punto de un cuerpo existe un esfuerzo de compresión de  $60\text{N}/\text{mm}^2$  y perpendicular a este esfuerzo se tiene una deformación unitaria por tracción de  $2 \times 10^{-4}$ .

Determinar:

- La magnitud y sentido del esfuerzo en el plano de la deformación unitaria a la tracción.
- La magnitud y sentido de la deformación unitaria en la dirección del esfuerzo de compresión.

Considerar para el material  $E = 207\text{kN}/\text{mm}^2$ ; y  $\nu = 0.28$

2.14.e.t. Una columna corta de concreto tiene una sección transversal cuadrada de  $400\text{mm}$  de lado y esta reforzado por cuatro varillas de acero de  $20\text{mm}$  de diámetro cada una. Si la relación de  $E_{\text{acero}}/E_{\text{concreto}}$  es de  $15:1$ , calcular el esfuerzo de compresión en el concreto cuando la columna soporta una carga axial de  $1.4\text{MN}$ .

2.15.e.t. Una junta o tope con doble cubre junta contiene un total de doce remaches de  $5\text{mm}$  de diámetro cada uno. Calcular el esfuerzo de corte de cada remache, cuando la junta esta sujeta a una fuerza de corte de  $1\text{kN}$ .

2.16.e.t. En un punto de un material hay una deformación unitaria a la tracción de  $8 \times 10^{-4}$  y perpendicular a esta deformación se tiene una deformación unitaria a la compresión cuyo valor es  $3 \times 10^{-4}$ . Si la relación de Poisson es  $0.3$  y el módulo de elasticidad es de  $150\text{GN}/\text{m}^2$ , calcule los esfuerzos en la dirección de las deformaciones unitarias.

2.17.e.t. Una tira de acero (solera) de  $50\text{mm}$  de ancho por  $10\text{mm}$  de espesor y  $200\text{mm}$  de longitud, esta sujeta a una fuerza de tracción axial de  $125\text{kN}$ . Si la relación de Poisson es  $0.3$  y  $E = 200\text{GN}/\text{m}^2$ , el cambio en el volumen de dicha tira de acero.

2.18.e.t. Un tubo de acero que tiene un diámetro exterior de  $75\text{mm}$  es metido a presión, sobre un cilindro de cobre de  $65\text{mm}$  de diámetro exterior y  $40\text{mm}$  de diámetro interior. Después de este ensamble, los extremos de este tubo compuesto son maquinados (CAREADOS) para dar una longitud total de  $150\text{mm}$ ; si el ensamble esta sujeto a un incremento de temperatura de  $50^\circ\text{C}$ , determinar el esfuerzo de corte en la interface cobre-acero, considerando que la expansión del cobre y del acero son las mismas.

Fundamentos de la Resistencia de Materiales

Para el acero  $E = 200GN/m^2$ ; y  $\alpha = 11.5 \times 10^{-6}C^{-1}$

Para el cobre  $E = 120GN/m^2$ ; y  $\alpha = 16.5 \times 10^{-6}C^{-1}$

2.19.e.t. Calcular la presión interna de seguridad a que puede estar sujeto un recipiente esférico de  $1.2m$  de diámetro y  $12mm$  de espesor de pared, si el esfuerzo de tracción es limitada a  $42MN/m^2$ .

2.20.e.t. a) Deduzca una expresión para el incremento proporcional de capacidad volumétrica de un recipiente cilíndrico de pared delgada, sujeto a una presión interna de un fluido.

b) Calcular el incremento de volumen interior en una cubierta cilíndrica de pared delgada de un generador de vapor (caldera) de  $2.4m$  de longitud y  $0.9m$  en diámetro, cuando esta sujeto a una presión interna de  $1.8MN/m^2$  ( $18 \text{ bares}$ ). El espesor de la pared de la cubierta es tal, que el esfuerzo máximo a la tracción es de  $21MN/m^2$  bajo esta presión; tomar  $E = 200GN/m^2$ ; y  $\nu = 0.28$  para el material de la cubierta cilíndrica.

### 3

## TORSIÓN DE FLECHAS CIRCULARES

### 3.0. Diagramas de Momentos de Torsión

3.0.1 **Introducción:** Cuando una flecha (árbol) transmite potencia, o un resorte absorbe energía, o una barra de torsión es usada para suministrar una fuerza de restauración, las propiedades elásticas de estos miembros o elementos resisten la aplicación de una fuerza de torcedura. Esta acción de torcedura es resistida por el material de estos elementos principalmente por el surgimiento de fuerzas de corte internas en el material y esta torcedura es conocida como *torsión*; un miembro sujeto a esta acción se dice estar en *torsión*.

La torsión siempre produce rotación, que se relaciona con la determinación tanto de los esfuerzos como de las deformaciones unitarias generadas por estas rotaciones.

Deberá quedar claro que la teoría desarrollada en esta Unidad 3 está limitada principalmente a casos de torsión en elementos de secciones transversales circulares.

3.0.2 **Ecuación Potencia-Momento de Torsión.** La torsión se produce cuando una flecha (árbol) recibe la carga de un par de fuerzas situadas en planos perpendiculares a su eje longitudinal figura 3.1.

El momento de estos pares de fuerza se conocen como *Momento de torsión o par de torsión* o simplemente *par*,  $T$ . Su suma algebraica de estos *pares* es nula si la flecha se halla en equilibrio y gira uniformemente. La magnitud del *par* (*par de torsión*)  $T$  se puede calcular por la potencia  $Pot$  en  $W$  que transmite la flecha y la frecuencia de rotación en *r.p.m.* Del curso de mecánica sabemos que la potencia

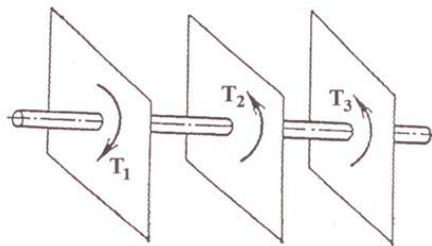


Figura 3.1.

Producida por el *par de torsiones* igual al *par*,  $T$ , multiplicado por la velocidad angular,  $\omega$ , es decir,

$Pot = T\omega$  ..... (i), en la que:

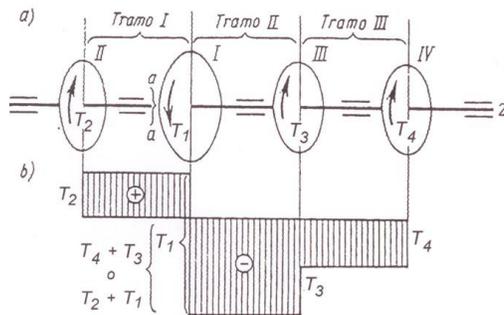
$Pot$  en watts (W),  $\omega$  en  $\frac{rad}{s}$ ,  $T$  en Nm y como  $\omega = \frac{2\pi n}{60} \left(\frac{rad}{s}\right)$ ,  $n$  en *rev/min*

de (i)  $Pot = T \left(\frac{2\pi n}{60}\right) \Rightarrow T = \frac{60Pot}{2\pi n} = 9.55 \frac{Pot}{n}$  ..... (ii)

3.0.3 **Construcción de Diagramas de Torsión.** Durante la torsión surge en las secciones transversales de la flecha un factor de fuerza interno, el *par resistente interno*, que es igual al *par externo*,  $T$ . Este se determina por el método de las secciones (ver tema 1.3).

Cuando la torsión se transmite desde un motor, por medio de una flecha de transmisión, a varias máquinas, el par de torsión no permanece constante a lo largo de dicha flecha. El carácter de la variación del *par de torsión* a lo largo de la flecha se puede representar con la mayor claridad valiéndose del *Diagrama de momentos de torsión*. Veamos cómo se construye este diagrama para una flecha teniendo acopladas varias poleas de transmisión de potencia (figura 3.2a); la polea I recibe el *par de torsión* del motor, las poleas II, III y IV la transmiten a las máquinas. El *par* que transmite cada polea a la flecha se calcula por la expresión algebraica (ii). El sentido del *par*  $T_1$  es contrario al de los pares  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ . Cuando el movimiento se estabiliza (la flecha gira uniformemente), de la condición de equilibrio y despreciando el rozamiento en los cojinetes, obtenemos:

$$\sum M_{iz} = \sum T_{iz} = 0; -T_2 + T_1 - T_3 - T_4 = 0$$



El *par de torsión* varía en las secciones de la flecha que transmiten los *pares externos* de las poleas. Dividimos la flecha en tres tramos (figura 3.2a) y determinamos los momentos de torsión (*pares de torsión*) en las secciones transversales de cada uno de ellos. El *par de torsión* en cualquier sección transversal del primer tramo entre las placas II y I, equilibra el *par de torsión exterior*  $T_2$  que actúa sobre la parte izquierda separada, es decir,

$$T_{t1} = T_2$$

Examinando la parte derecha, de la condición de equilibrio obtendríamos, como es natural, el mismo resultado. 8

$$T_{t1} = T_1 - T_3 - T_4 = T_2$$

Análogamente se calcula el par de torsión en las secciones transversales del segundo tramo de la flecha, entre las poleas I y III

$$T_{t2} = T_2 - T_1 = -T_3 - T_4$$

y en el tercer tramo, entre las poleas III y IV

$$T_{t3} = T_2 - T_1 + T_3 = -T_4$$

Así, el momento de torsión en cualquier sección transversal de la flecha es numéricamente igual a la suma algebraica de los momentos de torsión exteriores que actúan sobre la flecha en planos perpendiculares al eje de esta, aplicados por una parte de la sección considerada. El diagrama de momentos de torsión se construye tomando desde una horizontal (figura 3.2b) ordenadas proporcionales a los pares de torsión en las secciones transversales de los respectivos tramos de la flecha.

El signo del *par de torsión* en una sección transversal de la flecha se determina partiendo de los sentidos de los *pares de torsión exteriores*. El momento de torsión es positivo cuando los *pares de torsión exteriores* hacen girar el tramo separado en el sentido de las agujas del reloj, si se mira desde la sección.

Las ordenadas positivas del diagrama de momentos de torsión se toman hacia arriba, y las negativas, hacia abajo a partir de la línea horizontal, llamada eje o base del diagrama.

Ejemplo 3.0.1. T. D.

Construir el diagrama de momentos de torsión para el árbol de la figura 3.0.1.a), si la polea I recibe del motor la potencia  $P_1 = 52kW$  con una frecuencia de rotación del árbol  $n = 240r.p.m.$ , y las poleas II, III y IV toman las potencias  $P_2 = 15kW$ ,  $P_3 = 17kW$  y  $P_4 = 20kW$ .

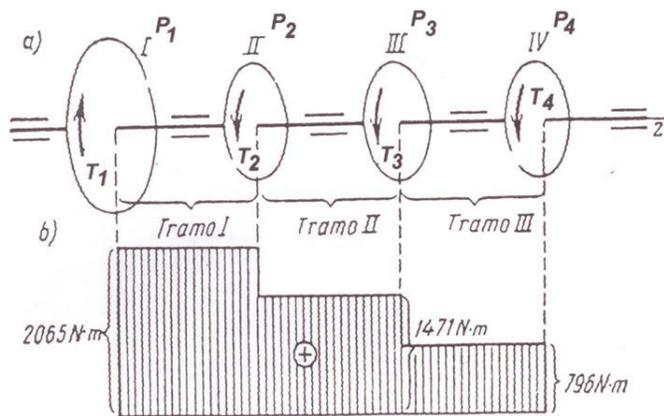


Figura 3.0.1

Solución:

Por la fórmula (ii) calculamos los valores de los pares que transmiten las poleas. El *par* transmitido por la polea I es:

$$T_1 = 9,55 \frac{P_1}{n} = 9,55 \frac{52 \cdot 10^3}{240} = 2067 Nm$$

Los pares transmitidos por las demás poleas son:

$$T_2 = 9,55 \frac{P_2}{n} = 9,55 \frac{15 \cdot 10^3}{240} = 596 Nm$$

$$T_3 = 9,55 \frac{P_3}{n} = 9,55 \frac{17 \cdot 10^3}{240} = 675 Nm$$

$$T_4 = 9,55 \frac{P_4}{n} = 9,55 \frac{20 \cdot 10^3}{240} = 796 Nm$$

Debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con las condiciones de equilibrio y despreciando el rozamiento en los cojinetes, tenemos:

$$\sum T_{iz} = 0; T_1 = T_2 + T_3 + T_4$$

o bien

$$2067 = 596 + 675 + 796$$

Dividimos el árbol de tres tramos (figura 3.0.1, a) y empezamos a construir el diagrama de momentos de torsión. Pasamos una sección transversal por el primer tramo, entre las poleas I y II, y analizamos la acción que ejerce la parte derecha separada sobre la parte izquierda. A la izquierda de dicha sección surge el momento torsional  $T_{t1} = T_1 = 2067 Nm$ ; el mismo valor se obtiene si se considera la acción que la parte izquierda ejerce sobre la parte derecha. Análogamente hallamos el momento de torsión en el segundo tramo, entre las poleas II y III:

$$T_{t2} = T_1 - T_2 = 2067 - 596 = 1471 Nm$$

Y e el tercer tramo, entre las poleas III y IV:

$$T_{t3} = T_1 - T_2 - T_3 = 2067 - 596 - 675 = 796 Nm$$

En la figura 3.01b, con los valores calculados de  $T_t$  se ha construido el diagrama de momentos torsionales.

### 3.1. Esfuerzo de Corte y Ángulo de Torsión

Si una fuerza tangencial  $F$  es aplicada en  $D$  a la flecha circular de radio  $r$ , mostrada en la figura 3.3.a, entonces un momento de torsión externo (*par*) de magnitud  $T = Fr$  será aplicado respecto a  $B$ .

En el extremo  $A$ , el cual está rígidamente sujeto, habrá un par igual y opuesto al que actúa en  $D$  para equilibrar la condición de equilibrio, representado por una fuerza tangencial en  $C$ , como se muestra en la figura 3.3.b. Ya que las líneas de acción de la fuerza tangencial en  $C$  y  $D$  están separadas,

estas fuerzas son fuerzas de corte (ver tema 2.5) y el desplazamiento angular de la línea  $CD$  a  $CE$  es la deformación unitaria de corte en un radio  $r$  sobre la longitud  $l$ .

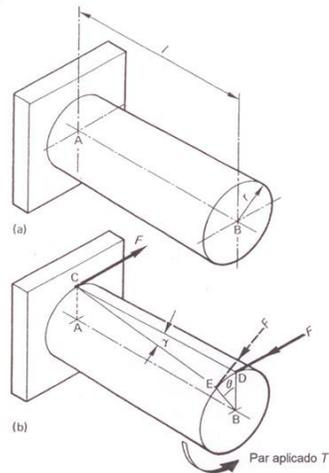


Figura 3.3.

Refiriéndonos a la figura 3.3.b,

Deformación unitaria al corte  $\gamma = \frac{DE}{l}$  (considerando  $\gamma$  muy pequeño)

pero  $DE = r\theta$ ; donde  $\theta$  se mide en radianes

$$\therefore \gamma = \frac{r\theta}{l} \dots \dots \dots (i)$$

es decir, Deformación unitaria de corte = radio x torsión por unidad de longitud.

Del tema 2.5.2, *modulo de corte* =  $\frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Deformación unitaria al corte}}$

es decir,  $G = \frac{\tau}{\gamma}$

$$\therefore \gamma = \frac{\tau}{G} \dots \dots \dots (ii)$$

Igualando (i) en (ii)

$$\frac{\tau}{G} = \frac{r\theta}{l}$$

o  $\frac{\tau}{\gamma} = \frac{G\theta}{l}$

Si se asume que la flecha permanece perfectamente circular durante la torsión y no hay cambio en la longitud o diámetro; por lo que, después de la torsión, la línea radial  $BE$  en la figura 3.3.b será perfectamente recta, y el ángulo de torsión  $\theta$  entre el centro de la flecha,  $B$ , y el punto en la circunferencia,  $E$ , será constante; la cual es una consideración razonable si la torsión por unidad de longitud es pequeña (típicamente un grado en una longitud igual a 15 diámetros); es decir para valores pequeños de la torsión por unidad de longitud, el término  $\frac{G\theta}{l}$  será constante.

$$\therefore \frac{\tau}{r} = \text{constante}$$

Si  $\tau_1, \tau_2$  y  $\tau_n$  son los esfuerzos de corte en los radios  $r_1, r_2$  y  $r_n$ , etc., entonces

$$\frac{\tau}{r} = \frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2} = \frac{\tau_n}{r_n} = \frac{G\theta}{L}$$

Ejemplo 3.1.1 T. D.

Cuando estando sujeta a un torque aplicado una flecha circular de longitud  $600\text{mm}$  se tuerce en un ángulo de  $2^\circ$ . Si el módulo de corte para el material de la flecha es  $80\text{GPa}$ , determine el esfuerzo de corte; (a) en el centro de la flecha, (b) en un radio de  $20\text{mm}$ . Si el esfuerzo de corte máximo en la flecha es  $120\text{MN/m}^2$ , ¿Cuál debe ser el diámetro exterior?

*Solución:*

$$\text{Datos: } l = 600\text{mm} = 0.6\text{m}, \theta = 2^\circ = \frac{2\pi}{180}\text{rad} = 0.035\text{rad}, G = 80 \times 10^9\text{N/m}^2, \\ \tau_{\max} = 120 \times 10^6\text{N/m}^2$$

Determinar: a)  $\tau$  en el centro de la flecha, b)  $\tau$  cuando  $r = 20\text{mm} = 0.020\text{m}$ , c)  $D$  cuando  $\tau_{\max} = 120\text{MN/m}^2 = 120 \times 10^6\text{N/m}^2$

de la expresión  $\frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l}$  se tiene:

$$\frac{\tau}{r} = \frac{80 \times 10^9\text{N/m}^2 \times 0.035\text{rad}}{0.6\text{m}} \\ = 4.67 \times 10^9\text{N/m}^3$$

a) En el centro de la flecha,  $r=0$

Por lo que el esfuerzo de corte  $\tau_{r=0} = 0$

b) Cuando  $r = 20\text{mm} = 0.020\text{m}$

$$\tau = 4.67 \times 10^9\text{N/m}^3 \times 0.02\text{m} \\ = 93.4 \times 10^6\text{N/m}^2 \text{ o } \tau = 93.4\text{MN/m}^2$$

Por lo que, el esfuerzo de corte para un radio de  $20\text{mm}$  es  $93.4\text{MN/m}^2$

c) Para un esfuerzo de corte máximo  $\tau_{max} = 120 \times M \text{ N/m}^2$

$$\frac{\tau}{r} = 4.67 \times 10^9 \text{ N/m}^3$$

$$\therefore r = \frac{\tau}{4.67 \times 10^9 \text{ N/m}^2}$$

Donde  $\tau = \tau_{max} = 120\text{MN/m}^2 = 120 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

Por lo tanto  $r = \frac{120 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{4.67 \times 10^9 \text{ N/m}^3}$

$$= 25.7 \times 10^{-3} \text{ m} \text{ o } 25.7\text{mm}$$

$\therefore$  el diámetro  $D = 2r$

$$= 2 \times 25.7\text{mm}$$

$$= 51.4\text{mm}$$

Es decir, ya que el esfuerzo de corte máximo  $\tau_{max}$  ocurre para el diámetro máximo, el diámetro exterior de la flecha  $D$ , es  $51.4\text{mm}$ .

### 3.2. Esfuerzo de Corte y el Momento Torsional Externo

La figura 3.4 a) muestra la sección transversal de una flecha circular sujeta a un par externo  $T$  y la figura 3.4 b) ilustra la variación del esfuerzo de corte a través de la sección transversal. El esfuerzo de corte varía desde cero en el centro o un valor máximo en el diámetro exterior.

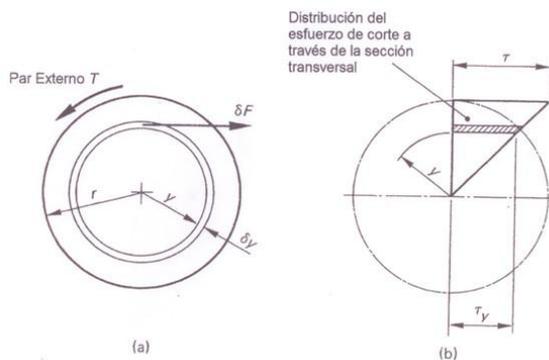


Figura 3.4



Refiriéndonos a la figura 3.4a), la fuerza tangencial  $\delta F$  a un radio "y", debido al esfuerzo de corte  $\tau_y$ , esta dada por:

$$\delta F = \tau_y \times (\text{área resistente al corte})$$

$$\therefore \text{área resistente al corte} = \text{área de sección anular elemental}$$

$$= 2\pi y \delta y$$

$$\therefore \delta F = (\tau_y)(2\pi y \delta y)$$

De la figura 3.2 b)

$$\frac{\tau_y}{y} = \frac{\tau}{r}, \text{ por la semejanza de triángulos}$$

$$\therefore \tau_y = \frac{\tau}{r} y$$

$$y \quad \delta F = \frac{\tau y}{r} (2\pi y \delta y)$$

$$= \frac{\tau}{r} (2\pi y^2 \delta y)$$

El momento con respecto al giro de las manecillas del reloj de esta fuerza con respecto al centro de la flecha esta dado por:

$$\delta M_\tau = \frac{\tau}{r} (2\pi y^2 \delta y)(y)$$

$$= \frac{\tau}{r} (2\pi y^3 \delta y)$$

Por lo tanto el momento total con respecto al giro de las manecillas del reloj con respecto al centro de la flecha esta dada por:

$$M_\tau = \sum \delta M_r$$

$$= \frac{\tau}{r} \sum 2\pi y^3 \delta y$$

Este momento se le conoce como el *momento interno de resistencia a la torsión*, y puesto que la flecha esta en equilibrio, es igual en magnitud pero en dirección opuesta al par externo  $T$  figura 3.4a.

$$\therefore M_r = T = \frac{\tau}{r} \int_0^r 2\pi y^3 dy$$

$$= \frac{\tau}{r} \left[ \frac{2\pi y^4}{4} \right]$$

$$\therefore T = \frac{\tau (\pi r^4)}{r \cdot 2}$$

El término  $\frac{\pi r^4}{2}$  es conocido como el momento segundo polar de área,  $J_p$ , respecto al eje de la flecha y tiene unidades de *metros a la cuarta* ( $m^4$ ).

Y para una barra (flecha) circular hueca, la figura 3.5a muestra la sección transversal de ésta, sujeta a un par torsional externo  $T$ , y la figura 3.5b ilustra la distribución del esfuerzo de corte en su sección transversal. El esfuerzo de corte varía de un valor mínimo en el diámetro interno a un valor máximo en el diámetro externo.

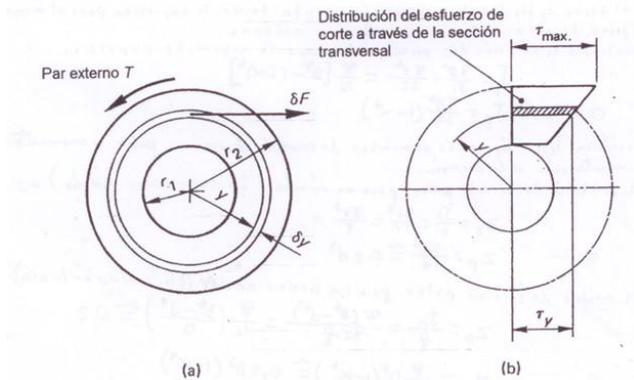


Figura 3.5. Distribución del Esfuerzo Cortante en una Flecha Hueca

Dicha expresión del momento total interno de resistencia a la torsión de la sección transversal dada por:

$$\therefore M_r = T = \frac{\tau}{r} \sum 2\pi y^3 \delta y$$

Y para la sección mostrada en la figura 3.5 a

$$T = \frac{\tau}{r} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi y^3 dy$$

$$= \frac{\tau}{r} \times \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4)$$

El término  $(\pi/2)(r_2^4 - r_1^4)$  es el momento segundo polar de área,  $J_p$  para una sección anular; es decir; para una flecha hueca.

### 3.2.1. Momento 2do Polar de Área y Módulo de Sección Polar para barras circulares sólidas y huecas.

De la expresión  $J_p = \frac{\pi r^4}{2}$ , sustituyendo  $\frac{d}{2} = r$  obtenemos una expresión alterna para el momento 2do polar de área para una barra (flecha) circular sólida.

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0.1d^4$$

Y de la expresión  $J_p = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4)$ , sustituyendo a  $\frac{D}{2} = r_2$  y  $\frac{d}{2} = r_1$  obtenemos una expresión alterna para el momento 2do polar de área para una barra (flecha) hueca.

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \cong 0.1(D^4 - d^4)$$

En el diseño de flechas huecas, es conveniente tener la expresión para el momento 2do polar de área anular en una forma alterna.

Denotando la relación  $d/D$  por  $\alpha$ , obtenemos la siguiente expresión

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} [(D^4 - (D\alpha)^4)]$$

o

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

La relación  $\frac{J_p}{r} = Z_p$  recibe el nombre de *módulo de sección polar o momento polar de resistencia a la sección*.

El módulo de sección polar para un módulo (flecha circular sólida) es

$$Z_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2}$$

o

$$Z_p = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0.2d^3$$

El módulo de sección polar para una sección anular (flecha circular hueca) es

$$Z_p = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \left( \frac{D^4 - d^4}{D} \right) \cong 0.2$$

o

$$Z_p = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - \alpha^4) \cong 0.2D^3 (1 - \alpha^4)$$

Ejemplo 3.2.1. T. D.

En una prueba de corte (torsión) sobre un material la falla ocurre cuando el esfuerzo fue de  $150 \text{ N/mm}^2$ , Usando un factor de seguridad de 4, determinar el diámetro mínimo de una flecha hecha de material el cual transmitirá una potencia de  $10 \text{ kW}$  cuando rota a  $1500 \text{ rpm}$ . Si la flecha es de  $1.2 \text{ m}$  de longitud, ¿Cuál será el ángulo de torsión? Tomar  $G = 79 \text{ GN/m}^2$ .

*Solución:*

Datos:  $\tau_{UR} = 150 \text{ N/mm}^2 = 150 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $F \cdot S = 4$ ,  $Pot = 10 \text{ kW}$ ,  $n = 1500 \text{ rev/min}$

$$l = 1.2 \text{ m}, G = 79 \text{ GN/m}^2 = 79 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Determinar:  $d_{min} = ?$  y  $\theta = ?$

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$Pot = T\omega \dots \dots (i), \frac{T}{\tau} = \frac{J_p}{r} = Z_p \dots \dots (ii), \tau = \frac{\tau_{U.R}}{F \cdot S} \dots \dots (iii)$$

$$Z_p = \frac{\pi d^3}{16} \text{ (flecha circular sólida)} \dots \dots (IV) \text{ y } \theta = \frac{\tau l}{rG} \dots \dots (V)$$

$$\text{de (i)} T = \frac{Pot}{\omega} = \frac{10 \times 10^3}{\frac{1500 \times 2\pi}{60}} = \frac{60 \times 10 \times 10^3}{1500 \times 2\pi} = 63.66 \text{ Nm}$$

$$\text{de (iii)} \tau = \frac{150 \times 10^6}{4} = 37.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

de (ii) Sustituyendo valores

$$\frac{63.66}{37.6 \times 10^6} = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 63.66}{\pi \times 37.6 \times 10^6}} = \sqrt[3]{8.62281 \times 10^{-6}} = 0.0205 \text{ m}$$

$$\therefore d = 20.5 \text{ mm}$$

Es decir, el diámetro mínimo de la flecha es  $20.5 \text{ mm}$  para este diámetro de flecha y el esfuerzo de corte máximo de la expresión (V) sustituyendo valores.

$$\theta = \frac{\tau l}{rG} = \frac{2\tau l}{dG} = \frac{2 \times 37.5 \times 10^6 \times 1.2}{0.0205 \times 79 \times 10^9} = 5.557 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\theta = 3.19^\circ$$

Es decir el ángulo de torsión  $\theta$  en una longitud de flecha de  $1.2 \text{ m}$  es  $3.19^\circ$ .

Ejemplo 3.2.2. T. D.

Una flecha hueca de diámetro externo de  $50 \text{ mm}$ , y diámetro interno de  $35 \text{ mm}$ , se tiene para transmitir un torque de  $70 \text{ Nm}$ . Si la flecha es de  $0.8 \text{ m}$  de longitud y el módulo de corte  $G = 80 \text{ GN/m}^2$ , determine (a) el esfuerzo de corte máximo, (b) el ángulo de torsión máximo.

Solución:

Datos:  $D = 50\text{mm} = 0.050\text{m}$ ,  $d = 35\text{mm} = 0.035\text{m}$ ,  $T = 70\text{Nm}$ ,  $l = 0.80\text{m}$ ,

$$G = 80\text{GN/m}^2 = 80 \times 10^9\text{N/m}$$

Determinar: (a)  $\tau = ?$ , (b)  $\theta = ?$  para  $r = \frac{D}{2}$

Expresiones algebraicas principales a utilizar:

$$\frac{T}{J_p} = \frac{G\theta}{l} = \frac{\tau}{r} \Rightarrow \tau = \frac{Tr}{J_p} \dots \dots (i) \text{ y } \theta = \frac{l\tau}{rG} \dots \dots (ii)$$

en la que  $J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \dots \dots (iii)$

$$\text{de (iii), } J_p = \frac{\pi}{32} = [(0.05\text{m})^4 - (0.035\text{m})^4] = 4.66 \times 10^{-7}\text{m}^4$$

a) El esfuerzo de corte máximo ocurre en el diámetro, es decir, cuando  $r = \frac{D}{2} = 0.025\text{m}$ , de (i)

$$\begin{aligned} \therefore \tau_{max} &= \frac{70\text{Nm} \times 0.025}{4.66 \times 10^{-7}\text{m}^4} \\ &= 3.75 \times \frac{10^6\text{N}}{\text{m}^2} \text{ o } 3.75\text{MN/m}^2 \end{aligned}$$

b) de (ii) ángulo de torsión,  $\theta$

$$\theta = \frac{0.8\text{m} \times 3.75 \times 10^6\text{N/m}^2}{0.025\text{m} \times 80 \times 10^9\text{N/m}^2} = 1.5 \times 10^{-3} = 0.0015\text{rad}$$

o

$$\theta = 85.94 \times 10^{-3} = 0.086^\circ \text{ o } \theta = 5.16'$$

Por lo que el ángulo de torsión máximo es  $5.16'$

### 3.3. Expresión General para Flechas Sólidas y Huecas

De la expresión que relaciona el esfuerzo de corte,  $\tau$  y el ángulo de torsión,  $\theta$ , del tema 3.1.

$$\frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \tag{a}$$

y de la relación entre el esfuerzo de corte,  $\tau$  y el momento de torsión externo,  $T$ , tema 3.2.

$$T = \frac{\tau}{r} \times \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\tau}{r} J_p \Rightarrow \frac{\tau}{r} = \frac{T}{J_p} \tag{b}$$

De las expresiones (a) y (b) se puede inferir la ecuación general de la torsión simple en función de  $J_p$  (momento 2do. polar de área) tanto para una flecha sólida como para una flecha hueca.

$$\frac{T}{J_p} = \frac{G\theta}{l} = \frac{\tau}{r} \quad (c)$$

Determinemos el ángulo de torsión  $\theta$  de una flecha circular como una forma alterna de expresión general para flechas (sólidas o huecas) a partir de las ecuaciones (a) y (b).

de la ecuación (b), tenemos:

$$\tau = \frac{Tr}{J_p} = \frac{T}{\frac{J_p}{r}} = \frac{T}{Z_p} \quad (b')$$

y de la ecuación (a), se obtiene:

$$\theta = \frac{l\tau}{rG} \quad (a')$$

sustituyendo  $\tau = \frac{Tr}{J_p}$ ; obtenemos en definitiva

$$\theta = \frac{l\tau}{rG} = \frac{lTr}{rGJ_p} = \frac{lT}{rGZ_p} = \frac{Tl}{GJ_p} \quad (d)$$

La magnitud del ángulo  $\theta$  se expresa en radianes. El ángulo de torsión se puede determinar por la expresión (d) únicamente en un tramo de la flecha cuya sección transversal sea constante y a condición de que el momento (par) de torsión no varíe a lo largo de dicho tramo.

### 3.3.1. Cálculos de resistencia y de rigidez a la torsión

La resistencia a la torsión de una flecha de sección transversal circular continua o anular se determina por la condición

$$\tau = T/Z_p \leq [\tau] \dots \dots \dots (e)$$

La fórmula (e) puede servir de base para tres tipos de cálculos.

1. *De comprobación de la resistencia* (cálculo de comprobación), cuando se conoce el momento de torsión máximo y las dimensiones de la sección trasversal de la flecha. El cálculo se hace directamente con la expresión (e).
2. *De elección de la sección* (cálculo de diseño). Despejando  $Z_p$  en la desigualdad (e), obtenemos la fórmula para hallar el momento polar de resistencia y, por lo tanto, el diámetro de la flecha, partiendo de la condición de resistencia.

$$Z_p \geq T/[\tau] \dots \dots \dots (f)$$

El diámetro necesario de la flecha una vez hallado el valor de  $Z_p$ , se determina partiendo de la expresión de  $Z_p$  para flecha sólida o hueca.

3. *De determinación del momento de torsión permisible*, cuando se conocen las dimensiones de la sección transversal de la flecha y se da el esfuerzo permisible,  $[\tau]$ .

$$[T] = Z_p[\tau] \dots \dots \dots (g)$$

El esfuerzo permisible del acero para flechas (según especificaciones de AISI) se toma entre los límites  $[\tau] = 30 \dots \dots 50MPa$

Además del cumplimiento de la condición de resistencia, cuando se diseñan flechas se requiere que estas tengan suficiente rigidez, es decir, que el ángulo de torsión no supere cierta magnitud dada. Así, en las transmisiones por engranajes, si los ángulos de torsión son grandes, los dientes de las ruedas se inclinan. Esto puede ocasionar la erosión de sus superficies y la rotura de la transmisión, porque la rigidez necesaria de las flechas debe asegurarse siempre en la práctica. Llamando  $\Phi$  el ángulo de torsión por unidad de longitud del árbol (ángulo de torsión unitario), se puede plantear la fórmula para el cálculo de comprobación de la rigidez de la flecha.

$$\Phi = \frac{\theta}{l} = \frac{M_t}{GJ_p} \leq [\Phi] \dots \dots \dots (h)$$

En dependencia del fin a que se destina la flecha, se toma  $[\Phi] = (0.45 \dots \dots 1.75) \cdot 10^{-2} rad/m$ , lo que corresponde a  $[\Phi] = (0.25 \dots \dots 1.0) grad/m$ .

Si se calcula el ángulo de torsión relativo en grados por  $1m$  de longitud de la flecha en vez de la expresión (h) obtenemos

$$\Phi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \left( \frac{T}{GJ_p} \right) \leq [\Phi^\circ] \dots \dots \dots (i)$$

Valiéndose de las expresiones, (h) y (i) se resuelven tres problemas análogos a los del cálculo de resistencia.

1. *De comprobación de la rigidez* (cálculo de comprobación), cuando se dan el momento de rotación, las dimensiones y el material de la flecha y el ángulo de rotación permisible.
2. *De elección de la sección por la condición de rigidez* (cálculo de diseño). De la desigualdad (h) se obtiene la expresión para determinar el momento polar segundo de área de sección de la flecha por la condición de la rigidez.

$$J_p \geq \frac{T}{G[\Phi]} \dots \dots \dots (j)$$

Una vez hallado el valor de  $J_p$ , el diámetro de la flecha se determina partiendo de las expresiones de  $J_p$  para flechas sólidas y huecas.

3. *De determinación del momento de torsión permisible* por la condición de rigidez

$$[T] = GJ_p \cdot [\Phi] \dots \dots \dots (k)$$

Ejemplo 3.3.1.1. T.D.

Por los datos del ejemplo 3.0.1.T.D. determinar el diámetro de la flecha que satisfaga las condiciones de resistencia y rigidez en el tramo en que el esfuerzo es mayor. El material de la flecha es acero es 1040 especificación AISI. El esfuerzo permisible de torsión  $[\tau] = 30MPa$ ; el ángulo de torsión permisible  $[\Phi] = 1 \cdot 10^{-2} rad/m = 10 \cdot 10^{-5} rad/mm$ , y el módulo de rigidez  $G = 8 \cdot 10^4 MPa$ .

*Solución:*

En el diagrama de momentos de torsión (véase la figura 3.0.1) puede verse que el momento de torsión máximo es  $M_t = 2067N \cdot m$ .

Por la condición de resistencia a la torsión [véase la expresión (f)] determinamos

$$Z_p = T/[\tau] = 2067 \cdot 10^3/30 = 68.8 \cdot 10^3 mm^3$$

Expresando el momento polar de resistencia por medio del diámetro de la flecha  $Z_p \approx 0.2d^3$ , hallamos el valor de éste.

$$d = \sqrt[3]{p/0.2} = \sqrt[3]{68.8 \cdot 10^3/0.2} \approx 70mm.$$

Por la condición de rigidez [véase la expresión (j)] determinamos el momento polar de inercia (momento 2do. Polar de área).

$$J_p = \frac{T}{G[\Phi]} = \frac{2067 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-5}} = 258 \cdot 10^4 mm$$

Por otra parte, expresando el momento polar de inercia por medio del diámetro de la flecha,  $J_p \approx 0.1d^4$ , hallamos el valor de este

$$d = \sqrt[4]{\frac{J_p}{0.1}} = \sqrt[4]{\frac{258 \cdot 10^4}{0.1}} = 71.8mm \approx 72mm.$$

En definitiva tomamos el diámetro de la flecha por la condición de rigidez

$$d = 72mm.$$

Antes del desarrollo del tema 3.4 se pone a consideración del alumno un resumen de los modelos matemáticos principales para solución a los ejemplos de discusión y ejercicios de trabajo de la Unidad III Torsión en Flechas Circulares.

De la expresión que relaciona el esfuerzo de cobre  $\tau$ , y el par externo  $T$ .

$$\frac{T}{J_p} = \frac{\tau}{r} \dots \dots (a)$$

y la expresión que relaciona al esfuerzo de corte,  $\tau$ , y el ángulo de torsión  $\theta$

$$\frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \dots \dots \dots (b)$$

Se infiere la ecuación general de la torsión para flechas circulares sólidas o huecas.

$$\frac{T}{J_p} = \frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \dots \dots \dots (c) \quad \text{o} \quad \frac{\tau}{r} = \frac{T}{J_p} = \frac{G\theta}{l} \dots \dots \dots (c')$$

donde:

$T$ =Momento de torsión (*par de torsión*) en Nm

$J_p$ =Momento segundo polar de área (*momento polar de inercia*) en  $m^4$

$\tau$ =Esfuerzo de corte en  $N/m^2$  a un radio  $r$  (m) del eje de la rotación.

$G$ =Modulo de rigidez (modulo de corte o de torsión) en  $N/m^2$

$\theta$ =Ángulo de torsión, en radianes en una longitud de  $l$  (m).

Para una flecha sólida de diámetro  $d$ ,  $J_p = \frac{\pi}{32} (d^4)$

Para una flecha hueca de diámetro exterior  $D$  y diámetro interior  $d$ .

$$J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

Como la potencia  $Pot$ , en *watts* ( $\frac{Nm}{s}$ ) transmitida por una flecha esta dada por:

$$Pot = T\omega = T \left( \frac{2\pi N}{60} \right) = \frac{TN}{9.55} (W) \text{ en lo que } \omega \text{ en } \frac{rad}{s} \text{ y } N \text{ en } rev/min$$

Se tiene  $T$  en función de  $Pot$  en *watts* y  $N$  en *rev/min*

$$T = 9.55 \left( \frac{Pot}{N} \right) \text{ en Nm, (1HP = 746watts)}$$

También de (a)  $\tau = \frac{Tr}{J_p} = \frac{T}{Z_p}$ , donde  $Z_p = \frac{J_p}{r} \rightarrow$  *modulo de sección polar en m<sup>3</sup>*

y de la expresión (b)  $\theta = \frac{l\tau}{rG} = \frac{lT}{rGZ_p} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{Tl}{GJ_p} \Rightarrow \frac{\theta}{l} = \phi = \frac{T}{GJ_p} = \frac{T}{rGZ_p}$

Comentario [A3]:

### 3.4. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

*Ejemplos de discusión*

3.1.e.d. La figura 3.1 a) muestra una flecha horizontal de transmisión de potencia por medio de bandas, teniendo tres poleas y soportada por cojinetes con rodamiento en A y B. Todas las

bandas de las poleas se consideran verticales. Determinar: la fuerza de tracción  $F$  del lado "flojo" de la banda perteneciente a la polea de radio de  $50\text{mm}$ ; las reacciones en los soportes  $A$  y  $B$ , y trazar el diagrama de momentos de torsión.

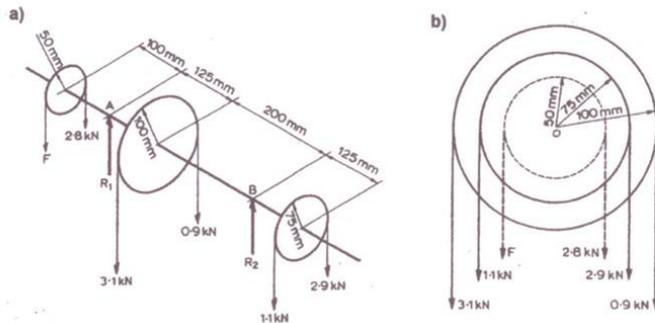


Figura 3.1

*Solución:*

Datos: datos dados en la figura 3.1

Determinar: a) Fuerza de tracción  $F$ ; b) reacciones  $R_1$  y  $R_2$ , c) trazar el diagrama de momentos de torsión.

a) Viendo la flecha desde el extremo derecho (figura 3.1 a) y tomando momento respecto al eje  $O$  de la flecha.

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= (3.1\text{kN} \times 10\text{mm}) + (1.1\text{kN} \times 75\text{mm}) + (F \times 50\text{mm}) - (2.8\text{kN} \times 50\text{mm}) - \\ &= (2.9\text{kN} \times 75\text{mm}) - (0.9\text{kN} \times 100\text{mm}) = 0 \\ &= 220\text{kNmm} - 135\text{kNmm} - 140\text{kNmm} + F(50\text{mm}) = 0 \\ \therefore F &= \frac{55\text{KNmm}}{50\text{mm}} = 1.1\text{KN} \end{aligned}$$

b) Considerando a la flecha como una viga simplemente soportada figura 3.1a soportando una carga puntual en cada polea igual a la suma de las dos fuerzas de tracción, la del lado flojo y la del lado tirante de la banda respectiva de cada polea.

Por lo que las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  se determina tomando momentos respecto a los puntos de cada soporte.

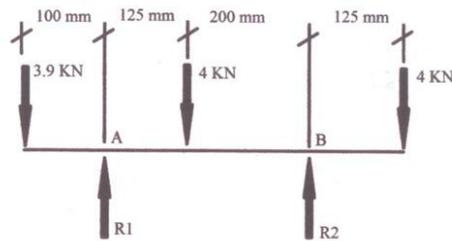


Figura 3.1 a

De la 3.1a

$$\sum M_A = (3.9kN \times 100mm) - (4kN \times 125mm) + (R_2 \times 325mm) - (4kN \times 450mm) = 0$$

$$\therefore R_2 = [-(390kNmm) + (500kNmm) + (1800kNmm)]/325mm$$

$$= \frac{1910kNmm}{325mm} = 5.877kN = 5877N$$

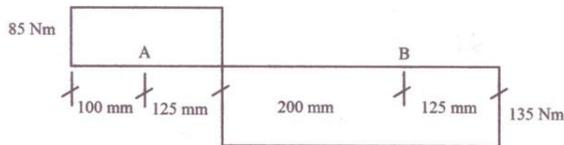


Diagrama de Momentos de Torsión

Figura 3.1 b

$$\sum M_B = (3.9kN \times 425mm) - (R_1 \times 325mm) + (4kN \times 200mm) - (4kN \times 125mm) = 0$$

$$\therefore R_1 = [(1657kNmm) + (800kNmm) - (500kNmm)]/325mm$$

$$= \frac{1957.5kNmm}{325mm} = 6.023kN = 6023N$$

c) El momento de torsión en el tramo de la flecha entre las poleas de 50mm de radio y 100mm de radio, figura 3.1 a con  $F=1.1kN$ s:

$$T_{50-100} = (2.8kN - 1.1kN) \times 50mm = 85N \cdot m$$

En forma similar el momento de torsión entre las placas de 100mm de radio y 75mm de radio considerando las fuerzas de tracción en la p Polea de 75mm de radio es:

$$T_{100-75} = (2.9kN - 1.1kN) \times 75mm = 135N \cdot m$$

3.2.e. d. La figura 3.2 a, muestra una flecha de acero a la que se sujetan firmemente tres discos. La flecha esta fija en su extremo izquierdo para evitar su rotación, pero libre a desarrollar una torsión a partir de la chumacera de su extremo derecho A relativo a E. Cada disco es de 300mm en diámetro. Fuerzas verticales actúan en las superficies exteriores de los discos de tal manera que los pares (momentos de torsión) son aplicados a la flecha. Trazar el diagrama de momentos de torsión de la flecha y determinar el ángulo de torsión de A relativo al extremo fijo E. Tomar  $G=80GPa$  para acero.

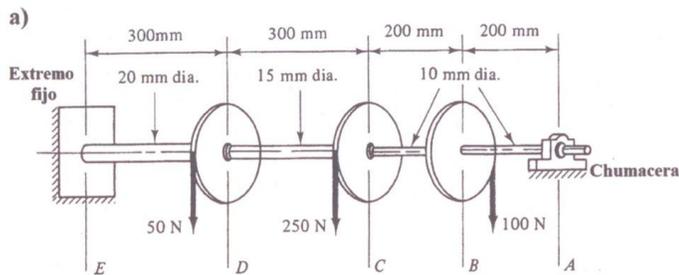


Figura 3.2(a)

Solución:

Datos:  $d_B = d_C = d_D = 30mm$ ,  $d_{AB} = d_{BC} = 10mm$ ,  $d_{CD} = 15mm$ ,  $d_{DE} = 20mm$

$F_B = 100N$ ,  $F_C = 250N$ ,  $F_D = 50N$ ,  $l_{AB} = l_{BC} = 200mm$ ,  $l_{CD} = l_{DE} = 300mm$

y  $G = 80 \times 10^9 N/m^2$

Determinar: Ángulo de torsión relativo de A/E trazando previamente el diagrama de momento (pares de torsión para la flecha).

El diámetro de la flecha y la magnitud del par aplicado varían a lo largo de la longitud total de la flecha. Sin embargo, para cada segmento AB, BC, CD y DE estas condiciones son constantes, por lo que la expresión del ángulo de torsión,  $\theta = Tl/GJ_p$  deberá aplicarse por separado a cada segmento de flecha, teniendo para T y  $J_p$  las siguientes expresiones.

$$T = rF \dots \dots (i) \quad ; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32} \dots \dots (ii)$$

Aplicando la expresión (i) a los discos B, C y D tenemos:

$$T_B = (150mm)(100N) = 15000N \cdot mm = -15N \cdot m$$

$$T_C = (150mm)(250N) = 37500N \cdot mm = 37.5N \cdot m$$

$$T_D = (150mm)(50N) = 7500N \cdot mm = 7.5N \cdot m$$

Para trazar el diagrama de momentos (pares) de torsión de la flecha es necesario determinar los pares (momentos) internos en cada segmento de la flecha;  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(CD)$  y  $(DE)$  aplicando el método de las secciones, (tema 1.3 y tomar el *dcl* de la parte derecha del corte imaginario de cada tramo o segmento

Para el segmento  $(AB)$  el par interno  $T_{AB} = 0Nm$

Para el segmento  $(BC)$  el par interno  $T_{BC} = 15Nm$

Para el segmento  $(CD)$  el par interno  $T_{CD} = T_C - T_B$   
 $= 37.5Nm - 15Nm$   
 $= 22.5Nm$

Para el segmento  $(DE)$  el par interno  $T_{DE} = T_D + T_C - T_B$   
 $= 7.5Nm + 37.5Nm - 15Nm$   
 $= 30Nm$

El soporte fijo en  $E$  será capaz de suministrar un par de torsión de resistencia que contrarreste la acción de este par de  $30Nm$  para mantener la flecha en equilibrio.

La figura 3.2b muestra el diagrama de los pares (momentos) de torsión determinados que actúan en los discos y en los segmentos de la flecha.

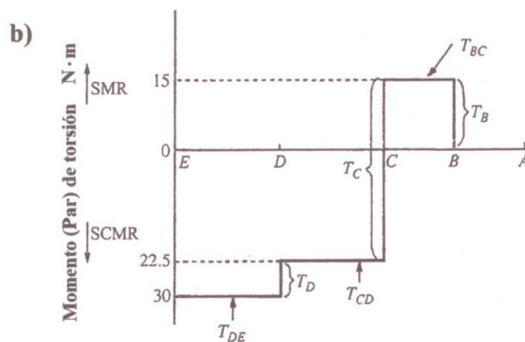


Figura 3.2b

Ahora se procede al cálculo del ángulo de torsión relativo de  $A/E$ ,

Para el segmento  $AB$

de  $\theta_{AB} = \frac{T_{AB}l_{AB}}{J_{pAB}G}$ , en la que:

$$T_{AB} = 0, \quad l_{AB} = 200mm, J_{pAB} = \frac{\pi d_{AB}^4}{32} = \frac{\pi(10mm)^4}{32} = 982mm^2 \quad y \quad E = 80 \times 10^9 N/m^2$$

$$\therefore \theta_{AB} = 0 \text{ radianes}$$

Para el segmento  $BC$

de  $\theta_{BC} = \frac{T_{BC}l_{BC}}{J_{PBC}G}$ , se sabe que:

$$T_{BC} = 15Nm, \quad l_{BC} = 200mm, \quad J_{PBC} = \frac{\pi d_{BC}^4}{32} = \frac{\pi(10mm)^4}{32} = 982mm^4 \quad \text{y} \quad E = 80 \times 10^9 N/m^2$$

$$\therefore \theta_{BC} = \frac{(15Nm)(200mm)}{(982mm^4)(80 \times 10^9 N/m^2)} \times \frac{(10^3)^3 mm^3}{m^3} = 0.038 rad(SMR)$$

Para el segmento  $CD$

de  $\theta_{CD} = \frac{T_{CD}l_{CD}}{J_{PCD}G}$ , y conociendo:

$$T_{CD} = 22.5Nm, \quad l_{CD} = 300mm, \quad J_{PCD} = \frac{\pi d_{CD}^4}{32} = \frac{\pi(15mm)^4}{32} = 4970mm^4 \quad \text{y} \quad E = 80 \times 10^9 N/m^2$$

$$\therefore \theta_{CD} = \frac{(22.5Nm)(300mm)}{(4970mm^4)(80 \times 10^9 N/m^2)} \times \frac{(10^3)^3 mm^3}{m^3} = 0.017 rad(SCMR)$$

Para el segmento  $DE$

de  $\theta_{DE} = \frac{T_{DE}l_{DE}}{J_{PDE}G}$ , siendo

$$T_{DE} = 30Nm, \quad l_{DE} = 300mm, \quad J_{PDE} = \frac{\pi d_{DE}^4}{32} = \frac{\pi(20mm)^4}{32} = 15708mm^4 \quad \text{y} \quad E = 80 \times 10^9 N/m^2$$

$$\therefore \theta_{DE} = \frac{(30Nm)(300mm)}{(15708mm^4)(80 \times 10^9 N/m^2)} \times \frac{(10^3)^3 mm^3}{m^3} = 0.007 rad(SCMR)$$

Concluyendo el esfuerzo de torsión relativo de  $A/E$  es:

$$\theta_{A/E} = \theta_{AB} + \theta_{BC} - \theta_{CD} - \theta_{DE}$$

$$\theta_{A/E} = 0 + 0.038 - 0.017 - 0.007 = 0.014 rad = 0.8^\circ$$

- 3.3.e.d. La flecha de transmisión para el avance automático de un torno tiene  $20mm$  de diámetro y es requerida para transmitir un par de torsión de  $1Nm$  al sistema de carros del porta herramientas. Despreciando el efecto del chavetero o cuñero; determine el ángulo de torsión y el esfuerzo de corte máximo en la flecha de transmisión cuando la longitud efectiva es  $1.8m$ . Considerar  $G=79GN/m^2$ .

Solución:

Datos:  $d = 20\text{mm} = 0.02\text{m}$ ,  $T = 1\text{Nm}$ ,  $l = 1.8\text{m}$ ,  $G = 79\text{GN/m}^2 = 79 \times 10^9\text{N/m}^2$

Determinar:  $\theta = ?$  y  $\tau_{max} = ?$

Expresiones algebraicas principales a utilizar; ecuación de la torsión simple:

$$\frac{T}{J_p} = \frac{G\theta}{l} = \frac{\tau}{r} \Rightarrow \theta = \frac{T \cdot l}{GJ_p} \dots \dots (i) \tau_{max} = \frac{Tr}{J_p} \dots \dots (ii)$$

De (i)  $\theta = \frac{T \cdot l}{GJ_p}$  en la que  $J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0.02\text{m})^4}{32} = 1.57 \times 10^{-8}\text{m}^4$

$$\therefore \theta = \frac{1\text{Nm} \times 1.8\text{m}}{79 \times 10^9\text{N/m}^2 \times 1.57 \times 10^{-8}\text{m}^4} = 1.45 \times 10^{-3}\text{rad} = 0.0833^\circ = 5'$$

Es decir el ángulo de torsión es de 5 minutos

$$\text{de (ii)} \tau_{max} = \frac{Tr}{J_p} = \frac{1\text{Nm} \times 0.01\text{m}}{1.57 \times 10^{-8}\text{m}^4} = 6.37 \times 10^3\text{N/m}^2, \text{ o } 637\text{kN/m}^2$$

Por lo que el esfuerzo de corte máximo es de  $637\text{kN/m}^2$ .

3.4.e.d. Una flecha sólida transmite una potencia de 30HP a 1000 rev/min. Si el esfuerzo permisible de corte es de 70 MPa y para el material de la flecha  $G=84\text{GPa}$ , determine el diámetro requerido de la flecha si a) en base únicamente al esfuerzo al corte; b) el ángulo de torsión permisible es 1.5 grados por metro de longitud de la flecha.

Solución:

Datos:  $Pot = 30\text{HP}$ ,  $N = 1000\text{rev/min}$ ,  $[\tau] = 70 \times 10^6\text{N/m}^2$ ,  $G = 84 \times 10^9\text{N/m}^2$

Determinar: a)  $d = ?$  en función de  $[\tau]$  y b)  $d = ?$  en función de  $\frac{\theta}{l}$

Expresiones algebraicas principales:

$$\frac{T}{J_p} = \frac{G\theta}{l} = \frac{\tau}{r} \dots \dots (i), \quad Pot = T\omega \dots \dots (ii), \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32} \dots \dots (iii)$$

Por lo que de (i) tenemos  $\frac{J_p}{r} = \frac{T}{\tau} \dots \dots (IV)$  y  $\frac{\theta}{l} = \frac{T}{J_p G} \dots \dots (V)$

de (ii)  $T = \frac{Pot}{\omega}$  y como  $1\text{HP} = 746\text{watts}$  y  $\omega = \frac{N \times 2\pi}{60} = \frac{1000 \times \pi}{30} = 104.72\text{rad/seg}$

Por lo que  $T = \frac{30 \times 746}{104.72} = 213.71\text{Nm}$

a) Determinar  $d = d([\tau])$

de (iv) con  $r = \frac{d}{2}$ ,  $J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi d^3}{16}$ , sustituyendo valores, se tiene:

$$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{213.71}{70 \times 10^6} \Rightarrow d^3 = \frac{16 \times 213.71}{\pi (70 \times 10^6)} = 1.555 \times 10^5 m^3$$

$$y \quad d = 2.496 \times 10^{-2} m = 24.96 mm = 25 mm$$

b) d en función de  $\frac{\theta}{l}$

$$\text{de (v)} J_p = \frac{T}{\left(\frac{\theta}{l}\right)G} \text{ y como } \frac{\theta}{l} \text{ en } \frac{rad}{m} = \frac{1.5 \times 2\pi}{360} = 2.618 \times 10^{-2} \frac{rad}{m}$$

$$\text{sustituyendo valores en } J_p = \frac{T}{\left(\frac{\theta}{l}\right)G}$$

$$\frac{\pi d^4}{32} = \frac{213.71}{2.618 \times 10^{-2} \times 84 \times 10^9}$$

$$\therefore d^4 = \frac{32 \times 213.71}{\pi (2.618 \times 10^{-2} \times 84 \times 10^9)} = 9.9 \times 10^{-7} = 99 \times 10^{-8} m^4$$

$$y \quad d = 3.154 \times 10^{-2} m = 31.54 mm$$

por lo que el diámetro de la flecha es limitado por la deflexión angular (ángulo de torsión por unidad de longitud).

3.5.e.d. Una flecha sólida de una aleación de cobre (bronce) 50mm de diámetro esta linealmente acoplada a una flecha de acero con el mismo diámetro exterior, figura 3.5. Determinar el diámetro interno de esta flecha de acero si el ángulo de torsión por unidad de longitud es de 75% del ángulo respectivo de la flecha sólida.

¿Cuál será el par de torsión máximo que puede transmitir esta flecha (barra circular) compuesta, si el esfuerzo límite de corte en las partes de la aleación de cobre y la del acero son  $50 MN/m^2$  y  $75 MN/m^2$  respectivamente? Considerando que  $G_{Acero} = 2.2 G_{Bronce}$  y  $T_{Bronce} = T_{Acero} = T$

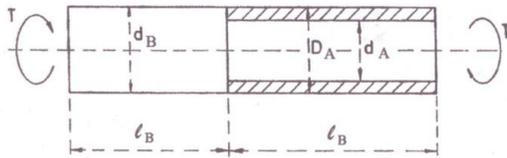


Figura 3.5e.d.

Solución:

$$\text{Datos: } d_B = 50\text{mm}, D_A = 50\text{mm}, \frac{\theta_A}{l_A} = 0.75 \frac{\theta_B}{l_B}$$

Determinar:  $d_A = ?$  y  $T_{max}$  si  $\tau_{B_{lim}}$  y  $\tau_{A_{lim}}$ , son  $50\text{MN/m}^2$  y

$75\text{MN/m}^2$  respectivamente

Expresiones algebraicas (modelos matemáticos) principales a utilizar.

$$\frac{T}{J_p} = \frac{G\theta}{l} = \frac{\tau}{r} \dots \dots (i) \text{ como } r = \frac{d}{2} \text{ de (i) se tiene}$$

$$\frac{T}{J_p} = \frac{G\theta}{l} \Rightarrow \frac{\theta}{l} = \frac{T}{GJ_p} \dots \dots (ii) \text{ y } T = \frac{J_p}{\frac{d}{2}} \hat{l} = Z_p \hat{l} \dots \dots (iii)$$

Por lo que para la flecha compuesta de este ejemplo de:

$$\frac{\theta_A}{l_A} = 0.75 \frac{\theta_B}{l_B} \Rightarrow \frac{T_A}{J_{pA} G_A} = 0.75 \frac{T_B}{J_{pB} G_B} \dots \dots (a)$$

y como  $G_A = 2.2G_B$ ,  $T_A = T_B = T$ , de (a), se obtiene

$$J_{pB} = 2.2 \times 0.75 J_{pA} \dots \dots (b)$$

Sustituyendo valores en (b), se tiene:

$$\frac{\pi d_B^4}{32} = 2.2 \times 0.75 \frac{\pi}{32} (D_A^4 - d_A^4)$$

$$\frac{\pi 50^4}{32} = 2.2 \times 0.75 \left(\frac{\pi}{32}\right) (50^4 - d_A^4)$$

$$50^4 = (2.2 \times 0.75 \times 50^4) = (2.2 \times 0.75 \times d_A^4) \Rightarrow d_A = \left(\frac{0.65 \times 50^4}{2.2 \times 0.75}\right)^{1/4} = 39.6mm$$

El par de torsión que soportará la parte sólida de bronce de la flecha será:

$$\text{de (iii)} T_B = \frac{\pi d_B^3}{16} \tau = \frac{\pi \times 50^3}{16 \times 10^9} (50 \times 10^6) = 1227Nm$$

El par de torsión que soportará la parte hueca de material acero, será:

$$\text{de (iii)} T_A = \frac{\pi}{16} \left(\frac{D_A^4 - d_A^4}{D_A}\right) \tau = \frac{\pi}{16} \left(\frac{50^4 - 39.6^4}{50 \times 10^9}\right) \times 75 \times 10^6 = 1116Nm$$

por lo que el máximo par de torsión permisible es  $T_{max} = 1116Nm$

3.6.e.d. Una flecha hueca teniendo un diámetro exterior de 50mm y un diámetro interior de 25mm, transmitiendo potencia a 2000 rev/min. Si el esfuerzo de corte permisible es de 140 MPa, y la deflexión angular (ángulo de torsión) es de tres grados por metro de longitud de flecha, determine la capacidad de transmisión de potencia en HP de la flecha. Emplear  $G = 84 \times 10^9 Pa$ , para el material de la flecha.

Solución:

Datos:  $D = 50mm = 0.050m$ ,  $d = 25mm = 0.025m$ .  $N = 2000R.P.M.$

$$[\tau] = 140 \times 10^6 N/m^2, \quad [\theta] = \frac{\theta}{l} = 3^\circ/m = 5.236 \times 10^{-2} rad/m, \quad G = 84 \times 10^9 N/m^2$$

Determinar: Pot en HP de transmisión.

Modelos matemáticos principales necesarios:

$$\text{De } \frac{T}{J_p} = \frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \Rightarrow T = \frac{\tau J_p}{r} \dots \dots (a), \quad T = \frac{\theta}{l} (GJ_p) \dots \dots (b)$$

$$\text{Para la flecha hueca } J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \dots \dots (c) \text{ y como } r = \frac{D}{2}, \quad Z_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \dots \dots (d)$$

de (a)  $Z_p \geq \frac{T}{[\tau]} \Rightarrow [T] = Z_p [\tau]$  por la condición de resistencia

de (b)  $J_p \geq \frac{T}{G \left[ \frac{\theta}{l} \right]} \Rightarrow [T] = G J_p \left[ \frac{\theta}{l} \right]$  por la condición de rigidez

Potencia en Watts  $Pot = \frac{TN}{9.55}$ ,  $N$  en R.P.M y  $1HP = 746Watts$

$$\text{de(c)} J_p = \frac{\pi(0.050^4 - 0.025^4)}{32} = 5.752 \times 10^{-7} m^4$$

$$\text{de(a)} T = \frac{140 \times 10^6 \times 5.752 \times 10^{-7}}{0.025} = 3221 Nm$$

$$\text{Por lo que por la condición de resistencia } Pot = \frac{3221 \times 2000}{(9.55) \times (746)} = 904 HP$$

$$\text{de(b)} T = 5.236 \times 10^{-2} \times 84 \times 10^9 \times 5.752 \times 10^{-7} = 2530 Nm$$

$$\text{y por la condición de rigidez } Pot = \frac{2530 \times 2000}{(9.55) \times (746)} = 710 HP$$

3.7.e.d. ¿Cuál es el ángulo de torsión, en grados, en una flecha hueca de longitud de  $3m$ ,  $150mm$  y  $90mm$  de diámetro externo y diámetro interior respectivamente, cuando esta sujeta a un momento (par) de torsión el que produce un esfuerzo de corte máximo de  $70MN/m^2$ ? Considerar  $G=77GN/m^2$ .

Determinar también el esfuerzo de corte en los puntos de la circunferencia interna de esta flecha, trazando un diagrama mostrando la distribución del esfuerzo de corte a través de la sección transversal.

*Solución:*

$$\text{Datos: } l = 3m, \quad D = 150mm = 150 \times 10^{-3}m, \quad d = 90mm = 90 \times 10^{-3}, \quad \tau_D = 70MN/m^2$$

$$\tau_D = 70 \times 10^6 N/m^2, \quad G = 77GN/m^2 = 77 \times 10^9 N/m^2$$

Determinar:  $\theta = ?$  en grados,  $\tau_d = ?$  y trazar el diagrama de distribución de los esfuerzos de torsión (corte) a través de la sección transversal.

Modelos matemáticos principales:

$$\frac{T}{J_p} = \frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \Rightarrow \frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \dots \dots \dots (a), \quad \frac{\tau}{r} = \frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2} = \frac{\tau_n}{r_n} = \frac{G\theta}{l} \dots \dots \dots (b)$$

$$\text{de (a)} \quad \theta = \frac{\tau l}{rG} = \frac{70 \times 10^6 N/m \times 3m}{75 \times 10^{-3} m \times 77 \times 10^9 N/m^2}$$

$$= 0.0364 \text{radianes} \approx 2.08^\circ \approx 2^\circ 5'$$

$$\text{de (b)} \frac{\tau_D}{\frac{D}{2}} = \frac{\tau_d}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \tau_d = \frac{d\tau_D}{D} = \frac{90 \times 10^{-3} \text{ m} \times 70 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{150 \times 10^{-3}}$$

$$= 42 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

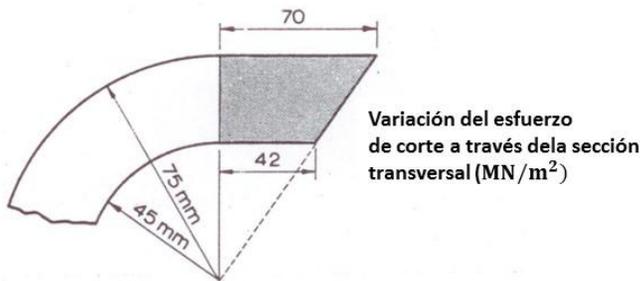


Figura 3.7. Distribución del Esfuerzo de Corte en la Flecha Hueca

La figura 3.7 representa el diagrama de distribución de los esfuerzos de corte de la sección transversal de la flecha hueca entre los radios  $r=45\text{mm}$  y  $r=75\text{mm}$ .

3.8e.d. Determinar la potencia que puede ser transmitida por una flecha circular hueca, de  $250\text{mm}$  de diámetro exterior y  $150\text{mm}$  de diámetro interno, girando a  $50\text{rev/min}$ ; si el momento (par) de torsión máximo es de  $40$  por ciento más grande que el par de torsión medio (promedio aritmético) y el esfuerzo de corte no deberá sobrepasar de  $69\text{MN/m}^2$ .

También encontrar el valor del ángulo de torsión máximo en una longitud de flecha de  $4.6\text{m}$ . Tomar  $G=79\text{GN/m}^2$ .

Solución:

Datos:  $D = 250\text{mm} = 0.25\text{m}$ ,  $d = 150\text{mm} = 0.15\text{m}$ ,  $N = 50\text{rev/min}$

$$T_{\max} = \frac{140}{100} T_{\text{prom}}, \quad \tau_{\max} = \frac{69\text{MN}}{\text{m}^2} = 69 \times \frac{10^6 \text{N}}{\text{m}^2}, \quad l = 4.6\text{m}, \quad G = 79\text{GN/m}^2$$

$$G = 79 \times 10^9 \text{N/m}^2$$

Determinar:  $Pot = ?$ ,  $\theta_{\max} = ?$  para  $l = 4.6\text{m}$

Modelos matemáticos principales necesarios:

$$Pot = T \left( \frac{2\pi N}{60} \right) \dots \dots (a); \quad T = \frac{\tau J_p}{r} \dots \dots (b); \quad J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \dots \dots (c); \quad \theta$$

$$= \frac{\tau l}{rG} \dots \dots (d)$$

$$\text{de (c)} J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} [(0.25)^4 - (0.15)^4] = 3.338 \times 10^{-4} m^4$$

$$\begin{aligned} \text{de (b)} T_{max} &= \frac{\tau J_p}{r_{max}} \text{ para } r_{max} = \frac{D}{2} \\ &= \frac{(60 \times 10^6 N/m^2) \times (3.338 \times 10^{-4} m^4)}{0.125 m} \\ &= 1.84258 \times 10^5 Nm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo que } T_{prom} &= \frac{100}{140} \times (1.84258 \times 10^5 Nm) \\ &= 1.31613 \times 10^5 Nm \approx 1.32 Nm \end{aligned}$$

De aquí la flecha puede transmitir una potencia en *Watts*.

$$\text{de (a)} \quad Pot = \frac{\pi NT}{60} = \frac{2\pi \times 50 \times (1.32 \times 10^5)}{60} = 689 \times 10^3 W = 689 KW$$

$$\begin{aligned} \text{y de (d)} \theta_{max} &= \frac{\tau l}{rG} = \frac{(69 \times 10^6 N/m^2) \times 4.6 m}{(0.125 m) \times (70 \times 10^9 N/m^2)} \\ &= 32.14 \times 10^{-3} rad \approx 0.032 rad \approx 1.84^\circ \end{aligned}$$

3.9.e.d. Una flecha hueca de acero, de 200mm y 300mm de diámetro interno y externo respectivamente, será remplazada por una flecha sólida de bronce (aleación de cobre). Si el módulo polar (momento polar) de sección tiene el mismo valor para ambas flechas. Calcular el diámetro de la flecha sólida y el *cociente* de las rigidez torsional de ambas flechas considerando

$$G \text{ del acero} = 2.4 \times G \text{ del bronce.}$$

Si en forma alterna; la rigidez torsional tiene el mismo valor para ambas flechas, calcular el *cociente* de los *módulos polar* (momentos polar de resistencia).

*Solución:*

*Datos:* Subíndices *A* para flecha de acero y *B* para la flecha de bronce

$$D_A = 300mm = 0.3m, \quad d_A = 200mm = 0.2m, \quad G_A = 2.4G_B$$

Determinar  $d_B = ?$  para  $Z_{pA} = Z_{pB}$  y  $\frac{G_A J_{pA}}{G_B J_{pB}} = ?$  para  $G_A = 2.4G_B$

$$\text{En forma alterna } \frac{Z_{pA}}{Z_{pB}} = ? \text{ para } G_A J_{pA} = G_B J_{pB}$$

Expresiones algebraicas principales necesarias:

de  $\frac{T}{J_p} = \frac{\tau}{r} \Rightarrow \frac{J_p}{r_{max}} = Z_p = \frac{T}{\tau_{max}} \dots \dots (a)$  Ec. módulo polar

y de  $\theta = \frac{Tl}{GJ_p} \Rightarrow GJ_p = \frac{Tl}{\theta} = \frac{T}{\frac{\theta}{l}} \dots \dots (b)$  Ec. rigidez torsional

$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4)$  para flecha sólida y  $J_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$  para flecha hueca  
Para la flecha hueca de acero

$$J_{pA} = \frac{\pi}{32} [(0.5)^4 - (0.2)^4] = \left(\frac{65\pi}{32} \times 10^{-4}\right) m^4$$

Si se considera que el módulo polar tiene el mismo valor para ambas flechas, entonces:

$Z_{pA} = Z_{pB} \Rightarrow y \frac{J_{pA}}{r_{max}} = \frac{J_{pB}}{r_{max}} \dots \dots (i)$

de (i)  $\frac{(65\pi \times 10^{-4} / 32)m^4}{0.15m} = \frac{\pi d_B^4 / 32}{d_B / 2}$

$$\frac{\pi(65 \times 10^{-4})m^4}{32(0.15)m} = \frac{\pi d_B^3}{16} \Rightarrow d_B = \left[ \left( \frac{65 \times 10^{-4}}{2(0.15)} \right) m^3 \right]^{1/3} = 0.279m$$

Es decir  $d_B = 0.279m = 279mm$

Por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cociente de la rigidez torsional} \\ \text{de ambas flechas} \end{array} \right\} = \frac{G_A \times J_{pA}}{G_B \times J_{pB}}$$

$$\text{de la expresión (i)} = \frac{G_A}{G_B} \times \frac{r_{Amax}}{r_{Bmax}}$$

$$= 2.4 \times \frac{(300/2)mm}{(279/2)mm} = 2.58$$

es decir, la rigidez torsional de la flecha hueca de acero es 2.58, la rigidez torsional de la flecha sólida de bronce  $[(G_A J_{pA}) = 2.58(G_B J_{pB})]$

Si la rigidez torsional tiene el mismo valor para ambas flechas (flecha hueca de acero y flecha sólida de bronce), entonces

$$G_A \times J_{pA} = G_B \times J_{pB} \dots \dots (ii)$$

de (ii)  $J_{pB} = \frac{G_A}{G_B} \times J_{pA}$

$$\frac{\pi d_B^4}{32} = 2.4 \times (65\pi \times 10^{-4} / 32) \Rightarrow d_B = [2.4 \times (65\pi \times 10^{-4} / 32)]^{1/4}$$

$$= 0.353m = 353mm$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cociente de los módulos polar} \\ \text{(momentos polar de resistencia)} \end{array} \right\} = \frac{Z_{pA}}{Z_{pB}} = \frac{\frac{J_{pA}}{r_{Amax}}}{\frac{J_{pB}}{r_{Bmax}}}$$

$$= \frac{J_{pA} \times r_{Bmax}}{r_{Amax} \times J_{pB}}$$

y de acuerdo a la ecuación (ii)

$$= \frac{G_B}{G_A} \times \frac{r_{Bmax}}{r_{Amax}}$$

$$= \frac{1}{2.4} \times \frac{(353/2)mm}{(300/2)mm} = 0.491$$

Por lo tanto el módulo polar de la flecha hueca de acero es  $0.491$  el módulo polar de la flecha sólida de bronce [ $Z_{pA} = 0.491Z_{pB}$ ]

3.10.e.d. Dos flechas son conectadas en forma colineal por medio de un *cople rigido*, teniendo 12 pernos uniformemente distribuidos en una circunferencia de paso de  $250mm$  de diámetro. El esfuerzo de corte máximo es limitado a  $55MN/m^2$  en las flechas y a  $21MN/m^2$  en los pernos. Si una de las flechas es sólida,  $50mm$  en diámetro y la otra es hueca,  $100mm$  de diámetro externo, calcular el diámetro interno de esta flecha hueca y el diámetro de los pernos de manera que ambas flechas y el acoplamiento sean todos de igual resistencia-

*Solución:*

Datos:  $12P$  en  $d_{circ_{12P}} = 250mm$ ,  $\tau_{max_s} = \tau_{max_h} = 55MN/m^2 = 55 \times 10^6 N/m^2$

$$\tau_{max_p} = 25MN/m^2 = 21 \times 10^6 N/m^2, \quad d_s = 50mm, \quad D_h = 100mm$$

Determinar  $d_h = ?$  y  $D_p = ?$  cuando  $T_s = T_h = T_{circ_{12P}}$

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$Z_p = \frac{J_p}{r_{max}} = \frac{T}{\tau_{max}} \dots \dots \dots (i), \quad J_{ps} = \frac{\pi}{32} (d_s^4) \dots \dots \dots (ii)$$

$$J_{ph} = \frac{\pi}{32} (D_h^4 - d_h^4) \dots \dots \dots (iii), \quad T = F_x r \dots \dots \dots (IV), \quad \tau = \frac{F}{A} \dots \dots \dots (V)$$

Para la flecha sólida de (i)

$$T_s = \tau_{max_s} \left( \frac{J_{ps}}{r_{max_s}} \right) = 55 \times 10^6 N/m^2 \times \left[ \frac{\pi}{32} \frac{(50 \times 10^{-3}m)^4}{25 \times 10^{-3}m} \right]$$

$$= 430\pi(Nm)$$

Para la flecha hueca  $r_{max_h} = 100mm, T_h = T_s = 430\pi Nm$

$$\tau_{max_h} = 55 \times 10^6 N/m^2, r_{max_h} = 50 \times 10^{-3} m$$

de la ecuación (i) y (iii)  $J_{ph} = \frac{T_h \times r_{max_h}}{\tau_{max_h}}, J_{ph} = \frac{\pi}{32} (D_h^4 - d_h^4)$

$$\frac{\pi}{32} (100^4 - d^4) \times 10^{-12} m^4 = \frac{(430\pi Nm) \times (50 \times 10^{-3} m)}{55 \times 10^6 N/m^2}$$

$$\frac{\pi}{32} (100^4 - d^4) \times 10^{-12} \times 10^{-12} mm^4 = \left( \frac{\pi(430 \times 50 \times 10^{-3})}{55 \times 10^6} \right) \times 10^{12} mm^4$$

$$(100^4 - d^4) mm^4 = 32 \left( 3.909 \times 10^{12} \times \frac{10^{-3}}{10^6} \right) \times 10^{12} mm^4$$

$$= 12.5091 \times 10^3 \times 10^{-3} \times 10^{-6} \times 10^{12} mm^4$$

$$= 1250 \times 10^4 mm^4$$

$$d^4 = 100^4 - 1250.1 \times 10^4 mm^4$$

$$= 8950 \times 10^4 mm^4 \Rightarrow d = 96.7m \quad \text{El diámetro interno de la flecha}$$

hueca es 96.1mm.

Como el acoplamiento transmite el mismo *par de torsión*  $T_p = T_s$  y puesto que se tienen 12 pernos en el cople, el *par de torsión* transmitido por cada perno es:

$$T_p = \frac{430\pi}{12} Nm$$

y de (IV) la fuerza en cada perno actuando en el radio de 125mm es:

$$F_p = \frac{430\pi/12 Nm}{0.125m} = 286.7\pi N$$

La figura 3.10 muestra las fuerzas de corte que actúan en los pernos del acoplamiento.

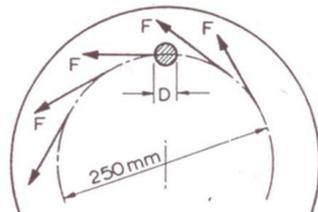


Figura 3.10

Los pernos están en corte simple y por consiguiente, asumiendo un esfuerzo de corte uniforme, de acuerdo con (V),

$$\begin{aligned} \text{Área de cada perno} &= \frac{\text{Fuerza de corte en cada perno}}{\text{Esfuerzo de corte en los pernos}} \\ &= \frac{286.7\pi N}{21 \times 10^6 N/m^2} \\ &= 13.66\pi \times 10^{-6} m^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente el diámetro requerido para los pernos es:

$$\begin{aligned} D_p &= \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \times \text{Area}_b\right)} = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \times 13.66\pi \times 10^{-6} m^2\right)} \\ &= 0.0074 m = 7.4 mm \end{aligned}$$

### Ejercicios de Trabajo

- 3.1. e.t. La figura 3.1(e.t.) muestra una flecha con tres ruedas dentadas (engranes) soportada por cojinetes en A y B. Las fuerzas se consideran verticales. Calcular la fuerza P, las reacciones en A y B y trazar a una escala conveniente el diagrama de momentos de torsión a que están sujetas las partes de la flecha.

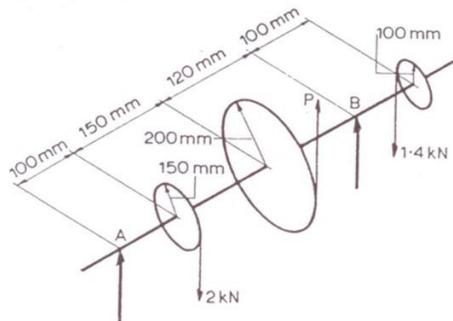


Figura 3.1 (e.t.)

- 3.2.e.t. Una flecha circular sólida, 50mm de diámetro y 2m de longitud la cual esta sujeta a un par de torsión aplicado de 85Nm. Determinar el esfuerzo de corte máximo y el corte de torsión. Tomar G como 80GN/m<sup>2</sup>.
- 3.3.e.t. Una flecha circular sólida transmite 15kW, girando a una velocidad angular de 3000 rev/min. Si el ángulo de torsión por unidad de longitud y el máximo esfuerzo de corte no deben exceder

*1.5 grados/metro y  $50MN/m^2$  respectivamente, determinar el diámetro mínimo requerido para la flecha, considerar  $G=80GN/m^2$ .*

3.4.e.t. Una flecha sólida,  $100mm$  de diámetro y  $470mm$  de longitud, transmite  $4kW$  cuando rota a  $1500rev/min$ . Si  $G=60 kN/mm^2$ , determinar el esfuerzo de corte máximo y el ángulo de torsión en el Material de la flecha.

3.5.e.t. El par de torsión en una flecha rotativa fue determinada por medición del ángulo de torsión. Si el diámetro de la flecha sujeta a la prueba fue de  $70mm$  y el ángulo de torsión por unidad de longitud fue de  $0.5grados/metro$ , determinar el par de torsión aplicado. Que potencia transmite la flecha, si ésta rotando a  $600rev/min$ . Tomar  $G=78 GN/m^2$ .

3.6.e.t. El esfuerzo de corte máximo y el ángulo de torsión, en el material de una flecha no debe exceder de  $40N/mm^2$ , y  $2^\circ$  respectivamente. Si el diámetro de la flecha es de  $45mm$  y el modelo de corte es  $79kN/mm^2$ , determinar la longitud máxima de la flecha. Cuanta potencia transmitirá la flecha cuando este rotando a  $900rev/min$ .

3.7.e.t. Una flecha hueca de diámetro externo e interno de  $80mm$  y  $50mm$  respectivamente con una longitud  $2m$ . Si el esfuerzo de corte máximo en el material de la flecha no debe exceder  $55MN/mm^2$  determinar la potencia que la flecha transmite cuando esta rota (gira) a  $2000rev/min$ . Cuál será el ángulo de torsión en la flecha a esta velocidad. Tomar  $G=80 GN/m^2$ .

3.8.e.t. Una flecha hueca teniendo una relación de diámetro externo a diámetro interno de 2:1, esta sujeta a un par de torsión de  $1500Nm$ . Si el esfuerzo de corte máximo en el material de la flecha no excede de  $70MN/m^2$  determinar los diámetros exterior e interior de la flecha.

3.9.e.t. Si la flecha del ejercicio anterior se reemplaza por una flecha sólida teniendo el mismo diámetro externo e igual longitud, determine (a). El esfuerzo de corte máximo cuando la flecha sólida esta sujeta a un par de torsión de  $1500Nm$ , (b). El incremento en porcentaje de la masa de la flecha.

3.10.e.t. El esfuerzo de corte máximo en una flecha hueca no excede de  $60MN/m^2$ . Si la relación (razón) entre el diámetro interior y el diámetro exterior es 1:2, demostrar que el diámetro exterior

$$\text{esta dado por } D = \sqrt{\frac{P}{1156N}} \text{ metros}$$

Donde  $P$ =potencia medida en kiloWatts y  $N$ =velocidad (rapidez de rotación) de la flecha en  $rev/min$ . Determinar las dimensiones de tal flecha transmitiendo  $9000kW$  a  $600rev/min$ ., y el ángulo de torsión por unidad de longitud. Tomar  $G=80GN/m^2$ .

3.11.e.t. ¿Por qué es ventajoso usar una flecha hueca en vez de una flecha sólida para transmitir potencia?.

Una flecha sólida de  $80mm$  de diámetro es remplazada por una flecha hueca hecha del mismo material y de igual longitud. Si el diámetro externo de la flecha hueca es  $100mm$  y el esfuerzo de corte máximo en ambas flechas permanece el mismo para el mismo par de torsión aplicado,

calcular el diámetro del barreno o agujero de la flecha hueca. Para las dos flechas, comparar (a) Las masas, (b) el ángulo de torsión.

- 3.12.e.t. Una flecha circular sólida de diámetro  $20\text{mm}$  y longitud  $375\text{mm}$  se usa como indicador de torsión por la medición del ángulo de torsión. Si el ángulo máximo de torsión para un par de torsión aplicado  $T$  es  $1.5^\circ$ , encontrar la magnitud de  $T$ . Al aumentar la sensibilidad del dispositivo de tal forma que para el mismo par de torsión aplicado  $T$  el ángulo de torsión es  $3^\circ$ , la flecha es reemplazada por una flecha hueca hecha del mismo material y teniendo las mismas dimensiones externas. ¿Cuál será la medida del barreno (diámetro interior) de la flecha.  $G=60\text{ GN/m}^2$ .

3.13.e.t. Una flecha hueca con diámetro exterior  $100\text{mm}$  y barreno (diámetro interior)  $60\text{mm}$ , longitud  $1.6\text{m}$ . Si el esfuerzo de corte máximo y el ángulo de torsión no excede de  $60\text{N/mm}^2$  y  $2^\circ$  respectivamente, determine la rapidez máxima de rotación de la flecha cuando transmite  $900\text{kW}$ . Tomar  $G=80\text{ kN/mm}^2$ .

3.14. e.t. Una flecha esta restringida a un ángulo de torsión de  $1^\circ$  en una longitud igual a veinte diámetros. Si el módulo de corte en tal flecha es  $80\text{ GN/m}^2$ . Determinar el esfuerzo de corte.

3.15.e.t. Los siguientes resultados fueron obtenidos de un ensaye de torsión a una probeta metálica de diámetro  $6\text{mm}$  usando un medidor de torsión con una longitud calibrada de  $50\text{mm}$ :

Par de torsión aplicado (Nm)	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Ángulo de torsión (rad)	0.013	0.025	0.039	0.053	0.066	0.078	0.092	0.112	0.130

Trazar una gráfica de *par de torsión* versus *ángulo de torsión*, empleando esta gráfica para determinar el módulo de corte.

3.16.e.t. Una flecha hueca con relación del diámetro exterior al diámetro interior de  $4:3$  transmite una potencia media de  $100\text{kW}$  girando a  $400\text{ rev/min}$ . Si el *par de torsión* máximo es  $1.36$  el *par de torsión medio* y el esfuerzo de corte no debe exceder de  $80\text{N/mm}^2$ , determinar las dimensiones de la flecha hueca ( $D$  y  $d$ ).

3.17.e.t. Determine el esfuerzo de corte máximo en una flecha de acero de una hélice marina, de diámetro externo  $400\text{mm}$  y diámetro interno  $200\text{mm}$  cuando esta sometido a un *par de torsión externo* de  $450\text{ kNm}$ . Si el módulo de corte del acero es  $80\text{kN/mm}^2$ , encontrar el ángulo de torsión en una longitud igual a  $20$  veces el diámetro. Determine el diámetro de una flecha sólida fabricada del mismo material y sujeta al mismo esfuerzo de corte máximo.

3.18.e.t. Una flecha hueca de  $150\text{mm}$  y  $75\text{mm}$  de diámetros, transmitiendo  $750\text{ kW}$  con una rapidez angular de  $15\text{ rad/s}$ . Un medidor de torsión registro un ángulo de  $2.3^\circ$  en una longitud de  $3\text{m}$ . Determine la deformación unitaria de corte en las fibras exteriores de la flecha y el módulo de rigidez del material.

3.19.e.t. Una flecha de acero de longitud  $6\text{m}$  esta sujeta firmemente en cada extremo. Un par de torsión de  $1.25\text{kNm}$  es aplicado a la flecha en una sección a  $2.4\text{m}$  de uno de los extremos. ¿Qué valores tienen los pares de torsión "fijos" en los extremos?

Si el diámetro de la flecha es de  $40\text{mm}$ , ¿Qué valores tienen los esfuerzos de corte máximos en las dos porciones de la flecha? Calcular el ángulo de torsión para la sección donde el par de torsión  $1.25\text{kNm}$  es aplicado tomar  $G = 82\text{GN/m}^2$ .

3.20.e.t. En las secciones transversales de una flecha sólida de acero surgen un *par de torsión*  $T=2000\text{Nm}$ . El diámetro de la flecha es  $d=65\text{mm}$ , y el módulo de rigidez  $G=0.8 \times 10^5\text{ MPa}$ . Comprobar la resistencia y la rigidez de la flecha si el esfuerzo de corte permisible

$[\tau] = 40 \text{ MPa}$  y el ángulo de torsión por unidad de longitud permisible  $\left[\frac{\theta}{l}\right] ([\phi]) = 0.25 \text{ grados/m}$

## 4 FLEXIÓN DE VIGAS

### 4.1. Consideraciones Generales

4.1.1. *Introducción* Una *viga* puede definirse como un miembro estructural o elemento de máquina sujeto a *cargas* (fuerzas) transversales, las cargas aplicadas provocan flexión (pandeo) a la viga, y esta flexión produce esfuerzos en el material de la viga, y, para una carga dada, la cantidad de deflexión depende acerca del modo en que la viga es soportada y la distancia entre los soportes (luz o claro de la viga)

### 4.1.2. Carga, Soporte y Reacciones

**Carga.** La figura 4.1 muestra una representación usual de las principales cargas aplicadas a vigas:

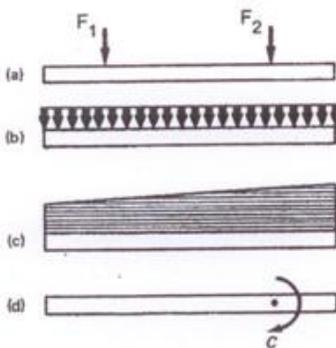


Fig.4.1

Fig.4.1

(a) muestra *cargas puntuales* o concentradas.

(b) muestra una *carga uniformemente distribuida* (CUD) La que puede estar desplegada en todo o parte del claro.

(c) muestra una carga variando uniformemente en el total o parte del claro.

(d) muestra un *par* aplicado a cualquier punto a lo largo del claro.

**Soporte.** Las vigas son frecuentemente clasificadas de acuerdo al sistema de soporte. Tipos de soporte y su clasificación son mostrados en la figura 4.2. Los soportes de vigas pueden ser divididas en tres tipos básicos de acuerdo a su construcción:

- (1) Soporte de bisagra inmóvil;
- (2) Soporte de bisagra móvil
- (3) Soporte fijo

En cada clase de viga el soporte se considera rígido; los tipos de soporte son presentados con su "dcl" respectivo.

Tipos de Soportes de Viga

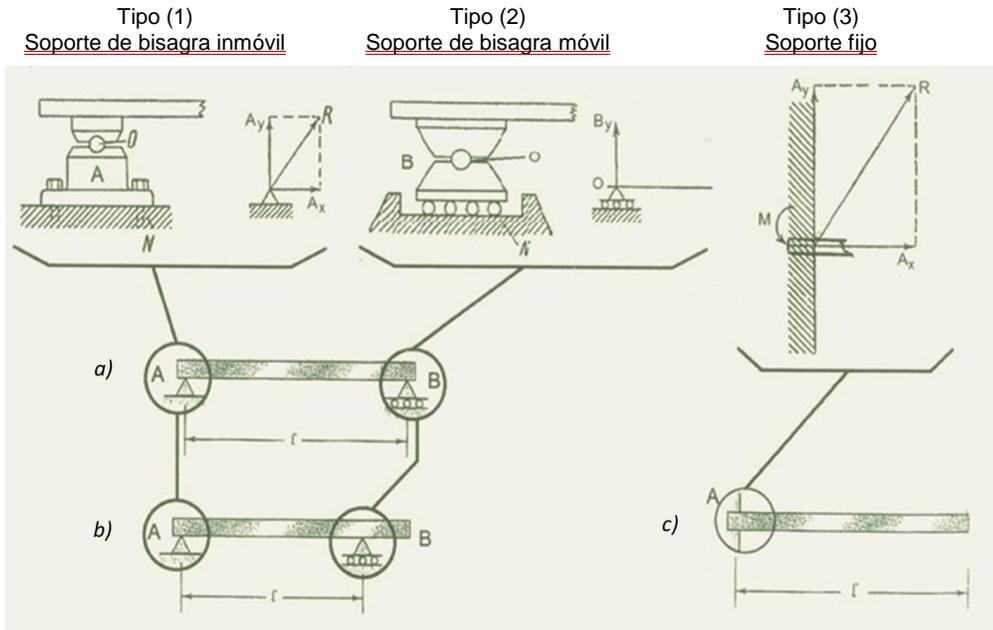


Figura 4.2. Vigas estáticamente determinadas

Figura 4.2.

- (a) Muestra una viga *simplemente soportada* con un soporte tipo (1) en un extremo, impidiendo el movimiento, en la dirección vertical y horizontal, pero no la rotación, y un soporte tipo (2) en el otro extremo que impide solo el movimiento vertical; estos dos tipos de soporte no imponen ninguna resistencia a la forma de la deflexión de la viga.
- (b) Muestra una viga *simplemente soportada volada en un extremo*. Esta viga es soportada del mismo modo que la viga *simplemente soportada* (4.2(a)). Esta clase de viga puede estar *volada* en ambos extremos.
- (c) Muestra una viga en *voladizo* (cantiléver) con un soporte fijo, tipo (3), en un extremo y el otro extremo libre, este soporte tipo (3) tiene la capacidad para impedir la rotación del extremo libre provocada por el momento que producen las cargas aplicadas a la viga.

Las vigas clasificadas como (a), (b), (c), con uno o más soportes que los indicados se denominan vigas estáticamente indeterminadas no contemplado su análisis en este curso.

Arreglos de los métodos de carga y tipos de soporte de las vigas estáticamente determinadas son presentadas en tres (3) ejemplos, figura 4.3.

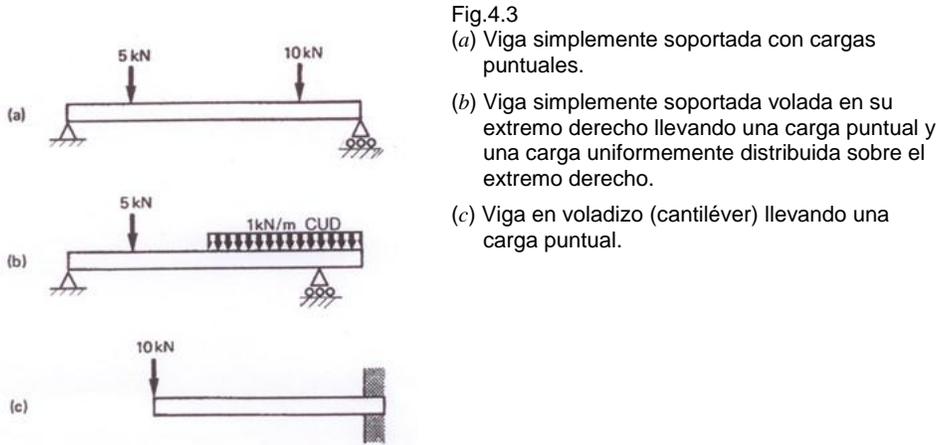


Fig.4.3

- Fig.4.3
- (a) Viga simplemente soportada con cargas puntuales.
  - (b) Viga simplemente soportada volada en su extremo derecho llevando una carga puntual y una carga uniformemente distribuida sobre el extremo derecho.
  - (c) Viga en voladizo (cantiléver) llevando una carga puntual.

**Reacciones:** Como las deformaciones unitarias de todo tipo, estudiadas en *Resistencia de Materiales*, se asumen ser muy pequeñas, el cambio producido por la deformación en la posición de las fuerzas externas actuando sobre una viga, puede despreciarse en la determinación de las reacciones en los soportes.

En el caso de una viga sujeta a fuerzas en el mismo plano que contiene al eje de la viga y coincidiendo este plano con el de la sección transversal de la viga. Las *reacciones* en los soportes, se determinan del mismo modo como de cualquier cuerpo rígido, sujeto a cargas externas estando en equilibrio por soportes; aplicando las condiciones de equilibrio estático para sistemas de fuerzas coplanares referidas en coordenadas  $x, y$ , es decir:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_0 = 0$$

Si las fuerzas aplicadas a la viga son perpendiculares a su eje, la ecuación  $\sum F_x = 0$  resulta una identidad y solamente dos ecuaciones de la Estática son necesarias para determinar las reacciones.

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_0 = 0$$

La figura 4.4 expone algunos arreglos de carga en vigas estáticamente determinadas para la aplicación de las condiciones de equilibrio en la determinación de las fuerzas de reacción en su o sus soportes respectivos.

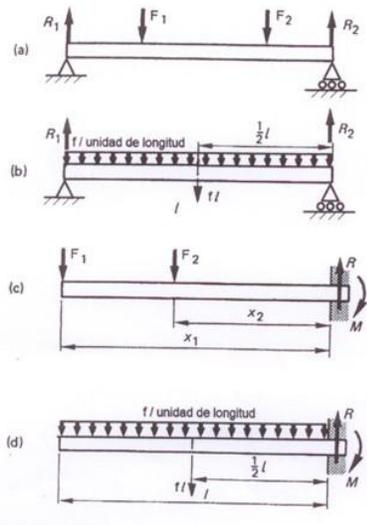


Fig.4.4

Fig.4.4

(a) *Viga simplemente soportada llevando cargas puntuales.* Las reacciones transversales  $R_1$  y  $R_2$  se encuentran con las ecuaciones  $\sum Fy = 0$ ,  $MS-1izq=0$  o con  $MS-1izq=0$  y  $MS-2der=0$

(b) *Viga simplemente soportada llevando una carga uniformemente distribuida.* Las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  son determinadas con las mismas ecuaciones que para el caso (a) con  $wl$  equivalente al centro de gravedad.

(c) *Viga en voladizo llevando cargas puntuales;* de la expresión  $\sum Fy = 0$ , la reacción  $R$  del soporte es la suma de las cargas  $R = F_1 + F_2$  y con  $\sum M = 0$ , el momento de restricción del soporte es la suma de los momentos de las cargas;  $M = F_1x_1 + F_2x_2$ .

(d) *Viga en voladizo llevando una carga uniformemente distribuida;* con las ecuaciones de equilibrio se determina la reacción  $R$  y el momento  $M$  en el soporte fijo como  $R = wl$  y  $M = wl \times \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}wl$ .

## 4.2. Fuerzas Cortantes y Momentos Flexionantes

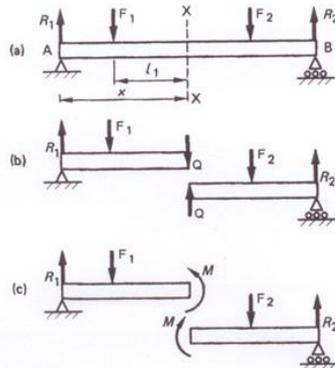


Figura 4.5

Considere una viga simplemente soportada  $AB$  llevando dos cargas concentradas (puntuales)  $F_1$  y  $F_2$  (figura 4.5). Sean  $R_1$  y  $R_2$  las reacciones en los soportes izquierdo y derecho respectivamente. Para determinar las fuerzas elásticas internas (factores de fuerza internos) en cualquier sección transversal de la viga aplicaremos el procedimiento general, esto es, el método de las secciones (Tema 1.3) para

la cual, imagine la viga ser cortada a través de una sección  $X-X$  a una distancia  $x$  del extremo  $A$ . La primera condición de equilibrio,  $\sum F = 0$ , aplicada a la porción izquierda (o a la derecha) de la viga muestra que, si  $R_1 \neq F_1$ , una fuerza  $Q$  deberá existir a través de la sección (figura 4.5b), con la fuerza  $Q$  actuando en la porción izquierda siendo aplicada en la porción derecha y viceversa. Por lo que de:

$$\sum F = 0, \quad R_1 - F_1 - Q = 0$$

de donde

$$Q = R_1 - F_1$$

La resultante  $Q$  de las fuerzas internas la cual es aplicada a la porción restante de la viga y numéricamente igual a la suma algebraica de las fuerzas externas actuando a la izquierda o a la derecha de la sección considerada es llamada la *fuerza transversal o de corte en la sección*.

La segunda condición de equilibrio,  $\sum M = 0$ , aplicada a la porción izquierda (o a la porción derecha) muestra que un momento  $M$  debe encontrarse en la sección  $X-X$  (figura 4.5c), el momento en la parte izquierda que es ejercida por la porción derecha y viceversa. El momento  $M$  es una acción interna de resistencia del material de la viga al momento total externo el cual provoca que la viga se flexione; por lo que es nombrado *Momento flexionante* en la sección  $X-X$ . De aquí que el valor de  $M$  se determina tomando momentos respecto a la sección  $X-X$ , para las fuerzas externas actuando en una porción,

$$\sum M_{XX} = 0, \quad -R_1x + F_1l_1 + M = 0$$

$$\therefore M = R_1x - F_1l_1$$

De la 2da. Condición de equilibrio, la suma de los momentos respecto al centro de la sección, de todas las fuerzas actuando en la porción izquierda deberá ser igual y opuesta a la suma de los momentos de las fuerzas actuando en la porción derecha respecto al centro de la sección, de lo anterior podemos inferir la conclusión resultante de:

El *momento flexionante*  $M$  en cualquier sección de la viga es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas actuando a la izquierda, o a la derecha, de la sección considerada.

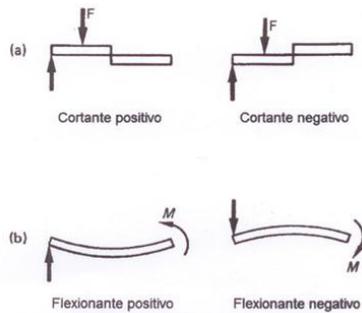


Fig.4.6

Es importante para el tema 4.2.1 indicar la dirección de las acciones de la fuerza cortante y el momento flexionante, lográndose esto, con la siguiente convención de signos:

1. Fuerza de corte: figura 4.6(a). Si la porción izquierda tiende a moverse hacia *arriba*, con respecto a la derecha, bajo la acción de las fuerzas externas, la fuerza de corte es tomada como *positiva*. Si la porción izquierda tiende a moverse hacia *abajo*, la fuerza de corte es tomada como *negativa*.
2. Momento flexionante: figura 4.6(b) si la porción de la viga tiende a tomar la forma *cóncava*, el momento flexionante es considerado como *positivo* y, si esta tiende a tomar la forma *convexa*, el momento flexionante se considera *negativo*.

Además se deben conocer algunas relaciones, matemáticas importantes entre las cargas que operan sobre una viga, la fuerza cortante,  $Q$ , y el momento flexionante,  $M$ . Estas relaciones son de gran utilidad cuando se analizan la fuerza cortante y el momento flexionante a lo largo de la viga, siendo especialmente convenientes para la elaboración de los diagramas de fuerza cortante y del momento flexionante (Tema 4.2.1) también las expresiones matemáticas generales nos pueden dar una visión en la localización de las secciones de la viga donde los momentos de flexión máximos ocurren. Para obtener dichas relaciones matemáticas generales, considere el *dcl*, figura 4.8 de una pequeña rebanada de viga de longitud  $dx$ , llevando una carga uniforme por unidad de longitud,  $w$ .

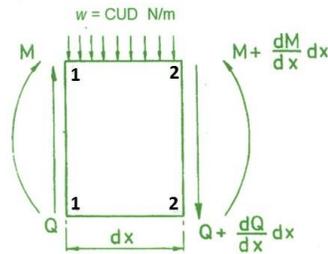


Figura 4.8

De la figura 4.8

Del equilibrio vertical:  $\sum F_y = 0$ , tenemos

$$-Q + wdx + \left( Q + \frac{dQ}{dx} dx \right) = 0$$

$$w + \frac{dQ}{dx} = 0$$

$$\therefore w = -\frac{dQ}{dx} \dots \dots \dots (i)$$

Del equilibrio de momentos:  $\sum M_{2-2} = 0$ , se tiene

$$-M - Qdx + wdx \frac{dx}{2} + \left( M + \frac{dM}{dx} dx \right) = 0$$

Despreciando  $(dx)^2 - Q + \frac{dM}{dx} = 0$

$$\therefore Q = -\frac{dM}{dx} \dots \dots \dots (ii)$$

De la ecuación (i) se desprende que, entre las dos secciones (1-1) y (2-2)

$$\int_1^2 dQ = \int_1^2 -w dx$$

o

$$Q_2 - Q_1 = \int_1^2 -w dx \dots \dots \dots (ia)$$

de esta manera el *cambio o variación* en fuerzas de corte en cualquiera de dos secciones puede obtenerse del *área bajo* la curva de distribución de carga entre estas.

De la ecuación (ii)

$$\int_1^2 dM = \int_1^2 Q dx$$

o

$$M_2 - M_1 = \int_1^2 Q dx \dots \dots \dots (iia)$$

Finalmente de la ecuación (i) vemos que donde quiera que la carga es continua,  $Q$  será diferenciable (se puede derivar) por lo que

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -w(x) \dots \dots \dots (iii)$$

De las ecuaciones (ii) y (iia) se infiere las siguientes conclusiones significativas:

- 1) La pendiente de la curva del diagrama de momentos flexionantes en un punto,  $\frac{dM}{dx}$ , debe ser igual a la fuerza de corte en ese punto.
- 2) La variación o cambio en momento flexionante entre cualquiera de dos secciones de una viga es igual a el área de diagrama de fuerzas cortantes entre estas dos secciones.
- 3) Los momentos flexionantes máximos y mínimos se tendrán en la sección donde la fuerza cortante sea cero.

#### 4.2.1. Diagrama de Fuerzas Cortantes, y Momentos Flexionantes

Los valores de la fuerza cortante,  $Q$ , y el momento flexionante,  $M$ , para una carga dada en la viga, dependerá de la posición de la sección elegida. Los valores máximos determinaron la medida y forma de la sección transversal de la viga, puesto que la mayoría de los miembros estructurales tienden, por una razón de costo, tener secciones transversales continuas. Como una simplificación para determinar los valores máximos (positivos y negativos) de  $Q$  y  $M$  y su posición a lo largo del claro de la viga en donde estos ocurren, es habitual trazar graficas mostrando la variación de los valores de

las fuerza  $Q$  y los momentos  $M$  a lo largo del claro de la viga. Estas graficas son llamadas *Diagramas de fuerzas cortantes* y *Diagramas de momentos flexionantes*. La obtención de los mismos es entendido mejor por los siguientes ejemplos típicos demostrativos (e.d).

Ejemplo 4.2.1.1.e.d. Una viga simplemente soportada de 4m de claro soportando cargas concentradas (puntuales) de 10, 5 y 20kN, respectivamente en los puntos B, C, D los cuales están a 1, 2, 3m del soporte izquierdo como se muestra en la figura 4.2.1.1.e.d.(a). Calcular las reacciones en los soportes y construye los diagramas de fuerzas cortantes  $Q$ , y momentos flexionantes,  $M$ .

Solución:

Datos:  $F_B = 10kN$ ,  $F_C = 5kN$ ,  $F_D = 20kN$ ,  $l_{AB} = 1m$ ,  $l_{AC} = 2m$ ,  $l_{AD} = 3m$

Determinar: 1)  $R_1$  y  $R_2$ ; 2) Elaborar el diagrama de fuerzas cortantes  $Q$ , y 3) Diagrama de momentos flexionantes  $M$ .

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$\sum F_y = 0 \dots \dots (i) \quad \sum M_0 = 0 \dots \dots (ii)$$

Estas condiciones de equilibrio (i) y (ii) están referidos a un Sistema de coordenadas rectangulares  $oxyz$  con el eje longitudinal de la viga como eje  $ox$  y teniendo solo fuerzas transversales en el eje  $oy$ .

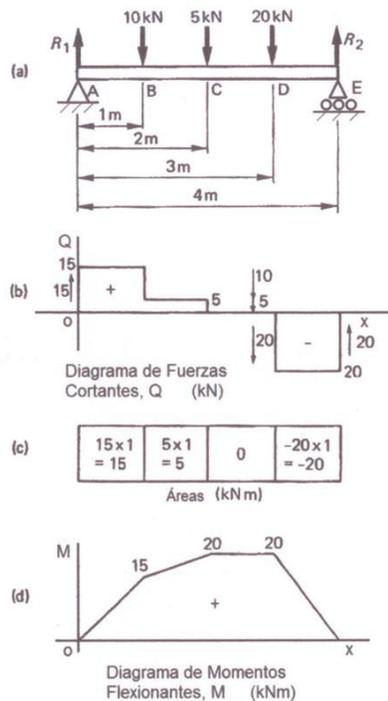


Figura 4.2.1.1.e.d.

1) Reacciones de los soportes (dcl figura 4.2.1.1.a)

De (ii) tomando momentos respecto al soporte izquierdo (A)

$$\begin{aligned} 4R_2 &= (10 \times 1) + (5 \times 2) + (20 \times 3) \\ &= 80 \\ \therefore R_2 &= 20kN \end{aligned}$$

y de (i)

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 + 5 + 20 \\ &= 15kN \end{aligned}$$

2) Diagrama de fuerzas cortantes,  $Q$

Se aplicará el método de las secciones, tema 1.3, a los tramos de la viga; A-B, B-C, C-D y D-E; eligiendo una sección X-X, intermedia en cada tramo; a una distancia  $x$  del extremo izquierdo  $A$  ( $R_1 = 15kN$ ); variando su posición desde el extremo izquierdo al extremo derecho en cada tramo; para determinar el valor de  $Q$  en las secciones transversales de los extremos, con la correspondiente variación de esta fuerza cortante  $Q$  en cada uno de estos tramos, componentes de la viga.

$$+\uparrow \sum Fy = 0; \text{ en:}$$

A - B;  $0 \leq x \leq 1 \rightarrow 15 - Q_x = 0$ : Para  $x = 0, Q_0 = 15kN(+)$ ; para  $x = 1, Q_1 = 15kN(+)$ ,  
Estos valores de  $Q$  en tramo A-B representan la recta con pendiente  $=0$  paralela al eje longitudinal  $x$  de la viga.

B - C;  $1 \leq x \leq 2 \rightarrow 15 - 10kN - Q_x = 0$ : Para  $x = 1, Q_1 = 15 - 10 = 5kN(+)$ ; para  $x = 2, Q_2 = 15 - 10 = 5kN(+)$ , También los valores de  $Q$  para el tramo B-C representan una recta paralela al eje  $x$ .

C - D;  $2 \leq x \leq 3 \rightarrow 15 - 10kN - 5kN - Q_x = 0$ : Para  $x = 2, Q_2 = 0kN$ ; para  $x = 3, Q_3 = 0kN$ .  
Para los valores  $Q_1$  y  $Q_2$ , para el tramo CD, se representan por una recta a lo largo del eje  $x$  de la viga.

D - E;  $3 \leq x \leq 4 \rightarrow 15 - 10kN - 5kN - 20kN - Q_x = 0$ : Para  $x = 3, Q_3 = -20kN$ ; para  $x = 4, Q_4 = -20kN$ .  $x = 4$  es el punto E; la fuerza  $R_2$ , provoca que  $Q_4$  se reduzca a 0 ya que  $Q_4 = -20kN + 20kN = 0$ .  
Como los valores  $Q_3$  y  $Q_4 = -20kN$ , para el tramo D-E, de nuevo estos valores se representan por una línea recta paralela al eje  $x$  de la viga.

Con estos resultados obtenidos de las fuerzas  $Q$  para cada tramo de la viga, se ha trazado el correspondiente *diagrama de fuerzas cortantes*  $Q$ , con los correspondientes valores de las áreas bajo la gráfica de estas fuerzas, figura 4.2.1.1(b) y (c).

## 3) Diagrama de momentos flexionantes

Considerando los mismos tramos de la viga para aplicar el método de las secciones; como en el caso de las fuerzas cortantes  $Q$ ; vamos a determinar los momentos flexionantes,  $M$ , en las secciones transversales de los extremos de cada uno de los tramos  $A-B$ ,  $B-C$ ,  $C-D$  y  $D-E$ , con su correspondiente variación de estos momentos flexionantes.

$\sum M = 0$ ; en:

$A - B$ ;  $0 \leq x \leq 1 \rightarrow 15x - M_x = 0 \Rightarrow M_x = (15kN)x \rightarrow$  ecuación de una recta.  
Resultando: para  $x = 0$ ,  $M_0 = 0$ ; para  $x = 1$ ,  $M_1 = 15kNm(+)$ .

$B - C$ ;  $1 \leq x \leq 2 \rightarrow 15x - 10kN(x - 1) - M_x = 0 \Rightarrow M_x = [(15 - 10)x + 10]kNm$ .  
Esta ecuación también representa una recta.  
Resultando: Para  $x = 1$ ,  $M_1 = 15kNm(+)$ ; para  $x = 2$ ,  $M_2 = 20kNm(+)$

$C - D$ ;  $2 \leq x \leq 3 \rightarrow 15x - 10kN(x - 1) - 5kN(x - 2) - M_x \Rightarrow M_x = [(15 - 10 - 5)x + (10 + 10)]kNm$   
Esta ecuación de  $M_x$  también es una recta con pendiente cero.  
Resultando: para  $x = 2$ ,  $M_2 = 20kNm(+)$ ; para  $x_3$ ,  $M_3 = 20kN(+)$

$D - E$ ;  $3 \leq x \leq 4 \rightarrow 15x - 10kN(x - 1) - 5kN(x - 2) - 20kN(x - 3) - M_x \Rightarrow M_x =$   
 $= [(15 - 10 - 5 - 20)x + (10 + 10 + 60)]kNm$

Por lo que la gráfica para  $M$  es una línea recta.  
Resultando: Para  $x = 3$ ,  $M_3 = 20kNm(+)$ ; para  $x = 4$ ,  $M_4 = 0kNm$ .

Con los resultados obtenidos de  $M$  para cada tramo de la viga, se ha trazado el *diagrama de momentos flexionantes*, figura 4.2.1.1.(d). Comparando los valores de  $M$  con la tabla de las áreas bajo la gráfica de las fuerzas cortantes  $Q$  entre dos secciones transversales contiguas (figura b4.2.1.1.(c)) es igual a la variación de momentos flexionantes entre estas dos secciones.

Ejemplo 4.2.1.2.e.d. Una viga simplemente soportada de 4m de claro sosteniendo una carga uniformemente distribuida,  $C.U.D.$ , de  $5kN/m$  en todo su claro como es mostrado en la figura 4.2.1.2.e.d.(a). Calcular las reacciones en los soportes y construir los diagramas de fuerzas de corte,  $Q$ , y de momentos flexionantes para la viga.

*Solución:*

Datos:  $C.U.D = w = 5kN/m$ ,  $l = 4m = (A - B) + (B - C) + (C - D) + (D - E)$

Determinar: 1)  $R_1$  y  $R_2$ ; 2) Construir el diagrama de fuerzas cortantes  $Q$ , y 3) Diagrama de momentos flexionantes  $M$ .

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$\sum F_y = 0 \dots \dots (i) \quad \sum M_0 = 0 \dots \dots (ii)$$

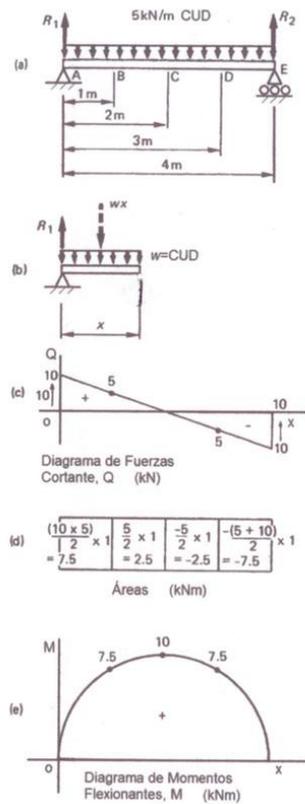


Figura 4.2.1.2.e.d.

1). Reacciones de los soportes (dcl figura 4.2.1.2.a)

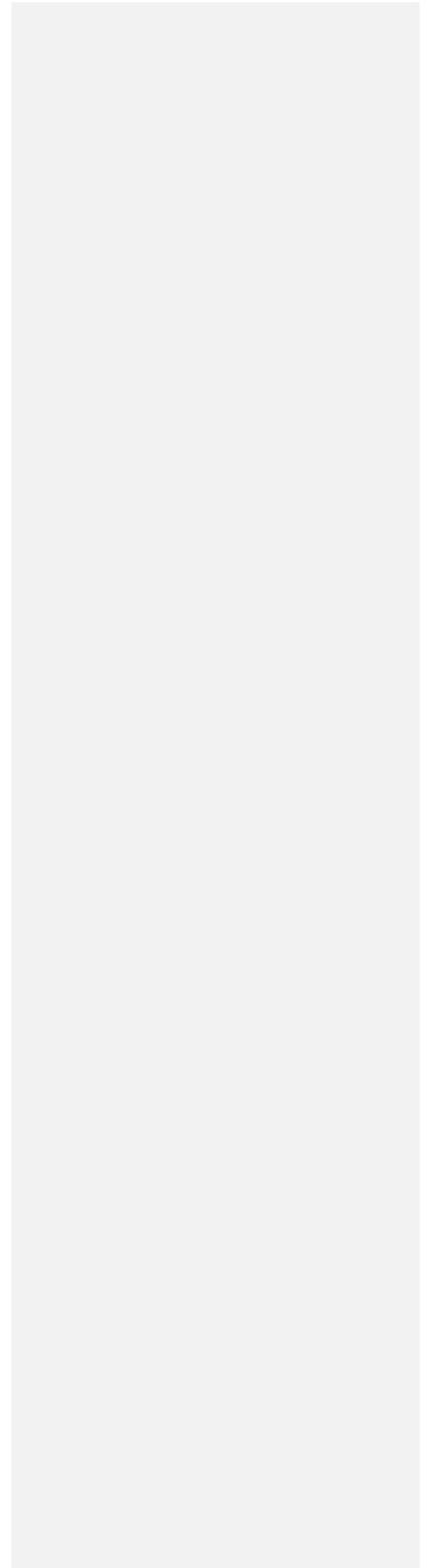
De (ii) Considerando la carga puntual equivalente,  $4wa$  la carga total uniformemente distribuida, actuando a la mitad del claro; tomando momentos respecto al soporte (A), se tiene:

$$4R_2 = 2 \times 4w$$

$$\therefore R_2 = 10 \text{ kN}$$

y de (i)  $R_1 + R_2 - 4w = 0$

$$R_1 = 20 - 10 = 10 \text{ kN}$$



2). Diagrama de fuerzas cortantes,  $Q$

Tomando el caso general, con la sección  $X-X$ , a una distancia  $x$  indefinida del soporte izquierdo  $A$  con una  $CUD$ ,  $w$ , como se muestra en la figura 4.2.1.2 (b):

de (i) con la carga sobre esta porción de viga =  $5xkN$

$$Q = 10[kN] - 5[kN/m]x[m] \rightarrow \text{ecuación de una recta} \dots\dots(a)$$

Aplicando la ecuación (a) en solo uno de los tramos componentes del claro de la viga;  $A-B$ ,  $B-C$ ,  $C-D$  y  $D-C$ ; con la carga  $w = 5[kN/m]$  en cada uno de ellos, tenemos:

$$+\uparrow \sum Fy = 0; \text{ en:}$$

$A - B; 0 \leq x \leq 1 \rightarrow 10 - 5x - Q_x = 0$ : Para  $x = 0$ ,  $Q_0 = 10kN(+)$ ; para  $x = 1$ ,  $Q_1 = 5kN(+)$ ,  
Estos valores de  $Q$  en tramo  $A-B$  representan una variación de  $Q$  rectilínea, con una pendiente  $-5kN/m$ .

$B - C; 1 \leq x \leq 2 \rightarrow 10 - 5x - Q_x = 0$ : Para  $x = 1$ ,  $Q_1 = 5kN(+)$ ; para  $x = 2$ ,  $Q_2 = 0kN$   
También estos valores  $Q$  para el tramo  $B-C$  representan una variación rectilínea con pendiente  $-5kN/m$ .

$C - D; 2 \leq x \leq 3 \rightarrow 10 - 5x - Q_x = 0$ : Para  $x = 2$ ,  $Q_2 = 0kN$ ; para  $x = 3$ ,  $Q_3 = -5kN(-)$ .  
Estos valores de  $Q$  en el tramo  $C-B$ , da la misma valoración de  $Q$  que en el tramo  $B-C$ .

$D - E; 3 \leq x \leq 4 \rightarrow 10 - 5x - Q_x = 0$ : Para  $x = 3$ ,  $Q_3 = -5kN(-)$ ; para  $x = 4$ ,  $Q_4 = -10kN(-)$ ; la reacción  $R_2$  en la sección  $E$  provoca que  $Q_4$  se reduzca a 0, ya que  $Q_{4r} = -20kN + 20kN = 0$ .  
Los valores  $Q_3$  y  $Q_4$  para este tramo  $D-E$  representa la misma recta que tienen los tramos anteriores.

Con los resultados obtenidos para las fuerzas  $Q$  en cada uno de los tramos componentes de la longitud de la viga, se ha trazado el correspondiente *Diagrama de fuerzas cortantes* figura 4.2.1.1(c). Como en el ejemplo 4.2.1.1.T. D. bajo este diagrama de  $Q$  se muestra una tabla de los valores correspondientes de las áreas bajo la gráfica de  $Q$ , figura 4.2.1.2(d).

3). Diagrama de momentos flexionantes

Refiriéndonos al caso general (figura 4.2.1.2(b), de acuerdo a (ii),  $\sum M_{X-X} = 0$ .

$$M_x = R_1x - wx \cdot \frac{1}{2}x = R_1x - \frac{1}{2}wx^2 \text{ Ecuación de una parábola.}$$

$$\text{Sustituyendo valores (a); } M_x = (10[kN])x[m] - \frac{1}{2}(5[kN/m])x^2[m^2](b)$$

Aplicando la ecuación (b) en cada uno de los tramos componentes del claro de la viga;  $A-B$ ,  $B-C$ ,  $C-D$ , y  $B-C$  con la carga  $w = 5[kN/m]$  en cada tramo tenemos:

$\sum M = 0$ ; en:

$$\left. \begin{array}{l} A - B; 0 \leq x \leq 1 \rightarrow \\ B - C; 1 \leq x \leq 2 \rightarrow \\ C - D; 2 \leq x \leq 3 \rightarrow \\ D - E; 3 \leq x \leq 4 \rightarrow \end{array} \right\} 10x - \frac{1}{2}(5)x^2 - M_x: \begin{cases} \text{Para } x = 0, M_0 = 0; \text{ para } x = 1, M_1 = 7.5kNm(+) \\ \text{Para } x = 1, M_1 = 7.5kNm(+); \text{ para } x = 2, M_2 = 10kNm(+) \\ \text{Para } x = 2, M_2 = 10kNm(+); \text{ para } x = 3, M_3 = 7.5kNm(+) \\ \text{Para } x = 3, M_3 = 7.5kNm(+); \text{ para } x = 4, M_4 = 0kNm \end{cases}$$

Se ha trazado el *diagrama de momentos flexionantes* con los resultados obtenidos de  $M$  para cada tramo, figura (4.2.1.2(e)). Como la ecuación (b) representa la curva cuadrática "parábola" la gráfica para una viga con  $C.U.D = w[N/m]$

Se trazará una parábola en la porción en que este aplicada.

Comparando los valores de  $M$  con la tabla de áreas del diagrama de  $Q$ , se puede apreciar que estas áreas representan el cambio en los valores de  $M$  entre las secciones transversales.

En estos ejemplos típicos demostrativos (4.2.1.1. y 4.2.1.2) se mostró como los valores de las fuerzas cortantes,  $Q$  y el momento flexionante,  $M$ , son obtenidos para una sección transversal particular de la viga. Este procedimiento para encontrar estos valores nos indican un método más general de esquematizar el *Diagrama de momentos flexionantes* y además indicar la posición donde ocurren los valores del momento flexionante máximo. (La comparación de esta proposición requiere el manejo de las expresiones matemáticas de las relaciones importantes entre las cargas que operan, sobre la viga, la fuerza cortante  $Q$  y el momento flexionante  $M$ ). Este método se resume como sigue:

1. El diagrama de  $Q$  se puede obtener partiendo del extremo izquierdo de la viga y "recorriendo las fuerzas externas siguientes", es decir, trazando la magnitud en la dirección en que estas fuerzas actúan.
2. Las áreas bajo el diagrama de  $Q$  entre las secciones transversales requeridas, son tabuladas. El valor del área es igual al cambio o variación en momento flexionante entre las secciones correspondientes.
3. La sección transversal de la viga en la que la fuerza cortante  $Q$  cambia de signo da la posición del momento flexionante máximo  $M_{m\acute{a}x}$ .  
Cambiando de (+) a (-) nos da  $+M_{m\acute{a}x}$   
Cambiando de (-) a (+) nos da  $-M_{m\acute{a}x}$

Para finalizar con el tema 4.2.1; en el caso de una mezcla o combinación de cargas concentradas (puntuales) y cargas uniformemente distribuidas,  $C.U.D$ ; los diagramas de  $Q$  y  $M$  se pueden trazar directamente usando el procedimiento antes mencionado o por medio de el *Principio de Superposición*. Este medio consiste en separar la carga total aplicada a la viga en los dos tipos; cargas puntuales y cargas uniformemente distribuidas,  $C.U.D$ . Luego trazar los diagramas de  $Q$  y  $M$  para cada tipo de carga, finalmente sumar las ordenadas de  $Q$  y  $M$  correspondientes para cada sección de los dos tipos de carga, dando el diagrama combinado tanto de  $Q$  como de  $M$ . El siguiente ejemplo ilustra este caso de cargas combinadas.

Ejemplo 4.2.1.3 T. D. Una viga simplemente soportada de  $4m$  claro llevando cargas concentradas de  $10,5$  y  $20 kN$  en los puntos  $B$ ,  $C$ , y  $D$  respectivamente, las cuales están a  $1$ ,  $2$ , y  $3m$  del soporte

izquierdo, A y una carga uniformemente distribuida de  $5kN/m$  sobre todo el claro, como se muestra en la figura 4.2.1.3 .Determine el valor máximo del momento flexionante y la posición en el claro de la viga donde éste ocurre.

*Solución:*

Datos:  $l = 4m, F_B = 10kN, F_C = 5kN, F_D = 20kN, l_{AB} = 1m, l_{AC} = 2m, l_{AD} = 3m, w = \frac{5kN}{m}$  C. U. D.

Determinar:  $M_{m\acute{a}x} = ?$  y  $x_{m\acute{a}x} = ?$

Para determinar  $M_{m\acute{a}x}$  y  $x_{m\acute{a}x}$  se requiere calcular 1) Las reacciones y trazar: 2) Diagrama de  $Q$ , 3) diagrama de  $M$  y 4) Verificación por el método de superposición de efectos.

Se utilizan las condiciones de equilibrio:  $\sum F_y = 0 \dots \dots (i)$  y  $\sum M_0 = 0 \dots \dots (ii)$

1). Reacciones de los soportes (del *dcl* figura 4.2.1.3.a)

de (ii) Tomando momentos con respecto al soporte izquierdo (A):

$$\begin{aligned} 4R_2 &= (10[kN] \times 1[m]) + (5[kN] \times 2[m]) + (20[kN] \times 3[m]) + (5[kN/m] \times 4[m] \times 2[m]) \\ &= 120[kNm] \\ \therefore R_2 &= 30kN \end{aligned}$$

y de (i)

$$\begin{aligned} R_1 &= 10[kN] + 5[kN] + 20[kN] + (5[kN/m] \times 4[m]) - 30[kN] \\ &= 25[kN] \end{aligned}$$

2). Diagrama de fuerzas cortantes,  $Q$

Trazando las fuerzas externas en la dirección de su acción sobre la viga; de acuerdo con el convenio de signos para fuerzas cortantes, iniciando por el soporte izquierdo perteneciente al tramo A-B, y como la C.U.D.(w) produce un cambio (variación) en la fuerza cortante interna  $Q$  entre dos secciones separadas una distancia  $\Delta x$  a una tasa o razón  $w = 5kN/m$  dada por la expresión  $(Q_2 - Q_1) = -w(x_2 - x_1)$ , esta condición se aplicará para trazar las fuerzas cortantes  $Q$  desde el tramo A-B hasta el último tramo D-E en que se divide el claro de la viga para obtener el diagrama de fuerzas cortantes mostrado en la figura (4.2.1.3(b)).

La tabla de las áreas correspondientes a los tramos A-B, B-C, C-D y D-E bajo la gráfica de  $Q$  se muestra en la figura (4.2.1.3(c)).

3). Diagrama de momentos flexionantes,  $M$

Tomando en consideración que el momento flexionante,  $M$ , en los soportes de una viga simplemente soportada, es nula ( $M_A = M_E = 0$ ), y que el área bajo el diagrama de  $Q$  entre dos secciones transversales, su valor es igual al cambio (variación) en momento flexionante ( $M_2 - M_1) = \int_1^2 Q dx$ . Por lo que con los valores de la tabla de áreas figura (4.2.1.3(c)), se determinan los momentos flexionantes de las secciones de los extremos de cada tramo de viga, empezando por el tramo  $A-B$  terminando con el tramo  $D-E$ , para luego trazar el diagrama de momentos flexionantes mostrado en la figura 4.2.1.3(d).

En este diagrama se puede apreciar que el momento flexionante máximo,  $M_{max} = 30 kNm(+)$  localizada en el punto medio del claro de la viga posición donde el diagrama de  $Q$  cambia de signo de (+) a (-).

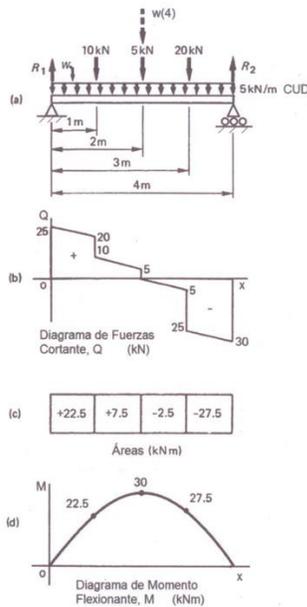


Figura 4.2.1.3 e.d.

4). Verificación por el método del principio de superposición de efectos

Teniendo los diagramas de  $Q$  y de  $M$  para cargas concentradas y  $C.U.D.$  por separado, como en los ejemplos 4.2.1.1.T.D y 4.2.1.2. T.D., se procede a sumar las ordenadas  $Q$ , cargas concentradas, con los de  $Q$ ,  $C.U.D.$ , así como también las ordenadas de  $M$ , cargas concentradas con las de  $M$ ,  $C.U.D.$ , de sus respectivos diagramas de  $Q$  y  $M$  para cada sección transversal considerada, para obtener los diagramas de  $Q$  y  $M$  para cargas combinadas, siendo estos diagramas idénticos con los de la figura 4.2.1.3(b), y (4.2.1.3(d)), respectivamente.

### 4.3. Distribución del Esfuerzo Normal en Flexión

En los temas 4.2 y 4.2.1 se contemplaron los factores de la fuerza internos (fuerzas cortantes y momentos flexionantes). El objeto de este tema 4.3 es estudiar los *esfuerzos* dentro de una viga cargada y determinar relaciones entre cantidades apropiadas.

El material de la viga puede ser considerada formada por fibras apretadas a lo largo de la viga, como en una tabla de madera, cuando la viga es cargada (figura 4.9(a)), la viga se flexiona en una curva de radio  $R$ . Las fibras en el lado convexo se alargan y están de este modo en TRACCIÓN y aquellas que están a lo largo del lado cóncavo están siendo contraídas y por lo tanto están en COMPRESIÓN. El material en las capas esta en esfuerzo directo (normal).

La capa llamada **Superficie Neutra** ( $SN$ ) en la que las fibras ni son alargadas, ni son contraídas, cortan cada sección transversal de la viga a través de su *Eje Neutro* ( $EN$ ) figura 4.9(b).

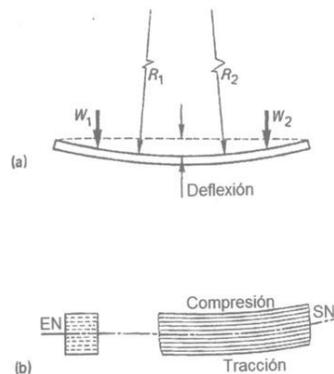


Figura 4.9

La deflexión en cualquier punto a lo largo del claro es el desplazamiento vertical de la viga desde su posición inicial. Para una rigidez alta del material de la viga, la deflexión deberá ser solamente una pequeña porción del claro; en caso de edificios menos que 1/500 del claro y en puentes menos que 1/1200 de claro, son valores en ocasiones utilizados.

Para la determinación de los esfuerzos de flexión y su variación dentro de la viga; se presenta un marco de referencia sencillo basado en las siguientes *suposiciones*:

1. La viga se considera inicialmente recta; esto garantiza que la naturaleza de los esfuerzos corresponden a la teoría.
2. La sección transversal de la viga es simétrica respecto al plano de flexión, esto afirma que la viga no se tuerce y por tanto no altera la distribución del esfuerzo.
3. El material es homogéneo en su composición en toda la viga; el esfuerzo directo es proporcional a la deformación unitaria y  $E$  tiene el mismo valor para la tracción como para la compresión.
4. Ninguna fuerza longitudinal actúa sobre la viga; por lo tanto, el motivo de los esfuerzos inducidos en la viga solamente son debido a la flexión provocada por las cargas transversales externas,

5. Las secciones transversales planas permanecen planas cuando la viga es flexionada; esto asegura que la geometría de la flexión sea simple.

Sea la figura 4.10 que representa una viga simplemente soportada mostrando una pequeña longitud antes y después de estar sujeta a flexión simple.

La pequeña longitud  $ABCD$  antes de flexionarse se convierte en  $A'B'C'D'$  al flexionarse la viga y por consiguiente la superficie neutra  $SN$  se convierte en  $N'S'$ .

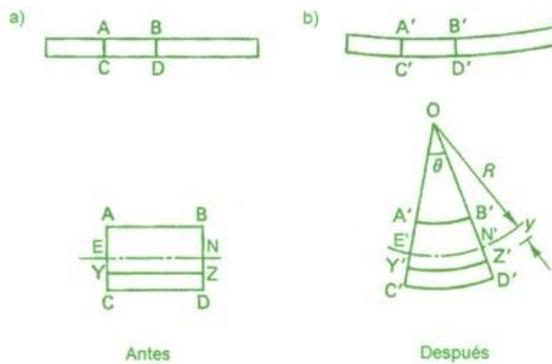


Figura 4.10

Las secciones planas  $A'C'$  y  $B'D'$  cuando se prolongan se intercambian en  $O$  a una distancia  $R$  desde  $S'N'$ ; el ángulo entre estas secciones planas es  $\theta$  en radianes. Considere la capa de fibras  $YZ$  a una distancia  $Y$  de  $SN$  que viene a ser  $Y'Z'$  en la situación de deformación; por consecuencia.

$$\text{Deformación unitaria en la capa } YZ = \frac{Y'Z' - YZ}{YZ}$$

De la geometría de la figura 4.10 inferior izquierda, nos da,

$$Y'Z' = (R + Y)\theta \quad \text{y} \quad YZ = SN = S'N' = R\theta$$

$$\begin{aligned} \text{Por consiguiente: deformación unitaria } YZ &= \frac{(R+Y)\theta - R\theta}{R\theta} \\ &= \frac{R\theta + Y\theta - R\theta}{R\theta} \\ &= \frac{Y}{R} = \epsilon \end{aligned}$$

Del tema 2.2.1.; Modulo de elasticidad  $E = \frac{\text{Esfuerzo directo } (\sigma)}{\text{Deformación unitaria } (\varepsilon)}$

se tiene: Deformación unitaria  $\varepsilon = Y'Z' = \frac{\text{Esfuerzo en } Y'Z' (\sigma)}{\text{Módulo de elasticidad } (E)}$

$$Y'Z' = \frac{(\sigma)}{(E)} = \frac{Y}{R} \dots \dots \dots (i)$$

o

$$\sigma = \frac{E}{R} Y$$

Así, el esfuerzo de flexión en cualquier superficie en la sección es directamente proporcional a la distancia  $Y$  desde el eje neutro.

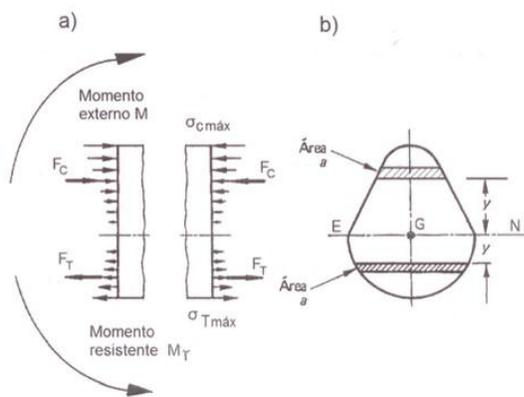


Figura 4.11

La figura 4.11(a) muestra la distribución del esfuerzo normal de flexión a través de la sección transversal figura 4.11 (b). Abajo del eje neutro (EN), el esfuerzo de tracción se incrementa desde cero (en el eje neutro) a  $\sigma_{t,max}$ . Arriba del eje neutro, el esfuerzo de compresión incrementa su valor de cero (eje neutro), a  $\sigma_{c,max}$ .

#### 4.4. Posición del Eje Neutro (Plano Neutral)

Si la sección transversal figura 4.11(b) es dividida, tanto en la parte de abajo como en la parte de arriba del eje neutro (EN) en pequeñas áreas, siendo  $a$  una área típica a una distancia  $y$  del eje neutro, el esfuerzo, de la ecuación (i), en esta pequeña área  $a$  es:

$$\sigma = \frac{E}{R} y$$

La fuerza longitudinal sobre el área  $a = \text{esfuerzo} \times \text{área}$

$$= \sigma \times a$$

$$= ay \frac{E}{R}$$

Por lo que:

$$\text{Fuerza total en toda la sección} = \sum(ay) \frac{E}{R} = 0 \text{ de la suposición 4}$$

De esta manera  $\sum(ay) = 0$ , debida a que  $E$  y  $R$  son constantes. Esta condición puede ser satisfecha cuando el eje neutro ( $EN$ ) pasa a través del centroide  $G$  de la sección.

#### 4.5. Relación entre el Esfuerzo Normal en Flexión y el Momento Flexionante Externo

Refiriéndonos otra vez a la pequeña área  $a$  tanto de la parte de la sección de debajo de  $EN$  como de la parte arriba de  $EN$ , figura 4.11(b).

$$\text{Fuerza longitudinal de tracción sobre el área} = ay \frac{E}{R}$$

$$\text{Momento de esta fuerza de tracción respecto al } EN = ay \frac{E}{R} \times y = ay^2 \frac{E}{R}$$

$$\text{Fuerza longitudinal de compresión sobre el área} = ay \frac{E}{R}$$

$$\text{Momento de esta fuerza de compresión respecto al } EN = ay \frac{E}{R} \times y = ay^2 \frac{E}{R}$$

Sumando tales momentos para la sección completa, da:

$$\sum (ay^2) \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \sum (ay^2)$$

La suma de los momentos de las fuerzas elementales; tanto de la tracción como de la compresión, es decir tomando en cuenta la naturaleza de estas fuerzas como se muestra en la figura 4.11 (a), proporcionan un *par* en la sección el cual resiste la flexión de la viga,  $M_r$ , y es igual en magnitud pero de sentido contrario al momento flexionante en la sección debida a la carga aplicada a la viga,  $M$ . En consecuencia

$$M_r = M = \frac{E}{R} \sum (ay^2)$$

El término  $\sum(ay^2)$  es nombrado *Momento Segundo de Área, I*, de la sección respecto al eje neutro,  $EN$ . El momento segundo de área es una medida del efecto de la forma de la sección transversal sobre la resistencia de una viga a la acción del momento flexionante.

Por lo tanto:

$$M = \frac{E}{R} I$$

o

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (ii)$$

Combinando las ecuaciones  $\frac{\sigma}{E} = \frac{Y}{R} \dots \dots \dots (i)$  y  $\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (ii)$

Se obtiene la bien conocida *ecuación de la flexión simple*

$$\frac{\sigma}{Y} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (iii)$$

Se observa que el esfuerzo máximo deberá suceder donde  $Y$  es un máximo, es decir, en las fibras más alejadas del  $EN$ , de este modo de la ecuación (iii)

$$\frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{Y_{m\acute{a}x}} = \frac{M}{I}$$

o

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M}{I/Y_{m\acute{a}x}}$$

El término  $I/Y_{m\acute{a}x}$  se denomina el Módulo de sección, y se representa con el símbolo  $Z$ , así:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M}{Z}$$

#### 4.6 y 4.8. Momento Segundo Axial de Área y Módulo de Sección Axial; para secciones estructurales más comunes.

Gran número de secciones estructurales pueden ser consideradas estar compuestas de secciones estructurales simples como rectangulares y circulares, particularmente cuando las secciones son fabricadas de secciones roladas y laminadas. Los valores apropiados de  $I$ ,  $Z$  y otras características geométricas para las secciones roladas compuestas se obtienen de tablas de perfiles comerciales disponibles.

El procedimiento para la obtención del momento segundo axial de área  $I_{EN}$  y en su respectivo módulo de sección  $Z$  de secciones sencillas comunes como: (a) rectángulo, (b) sección  $I$  idealizada, (c) círculo.

(a) Rectángulo respecto a un eje que pasa por el centroide, G.

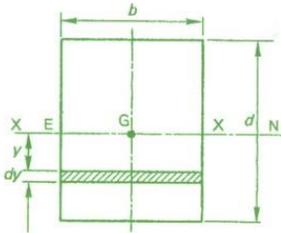


Figura 4.12(a)

Esta sección es de ancho,  $b$ , y altura (peralte),  $d$ , con el eje neutro,  $EN$  pasando a través de  $G$  como se muestra en la figura 4.12(a). Considerando una tira elemental de ancho,  $dY$  a una distancia,  $Y$  desde el eje neutro,  $EN$ :

El momento segundo de área de la tira respecto al eje neutro es  $dAY^2 = (bdY)Y^2 = bY^2dY$ ; por lo que integrando esta expresión obtenemos el momento segundo de área para la sección total,  $I_{EN}$

$$I_{EN} = \int_{-d/2}^{d/2} bY^2dY = b \left[ \frac{Y^3}{3} \right]_{-d/2}^{d/2} \Rightarrow I_{EN} = \frac{bd^3}{12}$$

Siendo su módulo de sección  $Z = \frac{I_{EN}}{Y_{m\acute{a}x}} = \frac{\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2}} = \frac{bd^2}{6}$

(b) Sección I idealizada

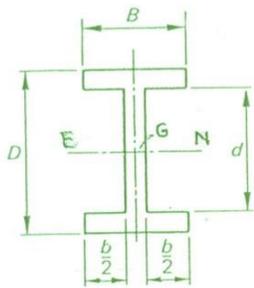


Figura 4.12(b)

Aplicando el resultado para  $I_{EN}$  para la sección rectangular a la figura 4.12 (b) tomando en consideración las dimensiones acotadas se puede obtener el momento segundo de área con el eje neutro  $EN$  pasando por  $G$  co

$$I_{EN} = \frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12} \Rightarrow I_{EN} = \frac{1}{12}(BD^3 - bd^3)$$

Y su módulo de sección  $Z = \frac{I_{EN}}{\frac{D}{2}} = \frac{1}{60}(BD^3 - bd^3)$

(c) Sección circular respecto al diámetro

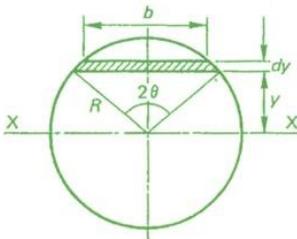


Figura 4.12(c)

Esta sección de radio  $R$  con eje  $EN$ , pasando a través de centroide  $G$  como se muestra en la figura 4.12(c). Considerando una tira elemental de ancho  $dy$  a una distancia  $y$  del eje  $EN$ , siendo cuerda de longitud  $b$  sustentando un ángulo central plano de  $2\theta$

El momento segundo de área de la tira respecto a  $EN = (b \cdot dy) \times y^2$  cambiando la variable  $y$  por la variable  $\theta$  es decir:

$$y = R \cos\theta, \text{ por consiguiente, } dy = -R \text{ sen}\theta \, d\theta$$

$$b = 2R \text{ sen}\theta$$

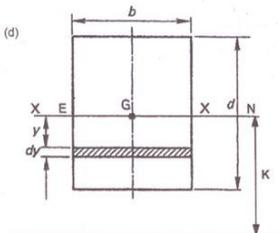


Figura 4.12(d)

Por lo tanto, el momento segundo de área total respecto a  $EN$  es:

$$\begin{aligned}
 I_{EN} &= - \int_{\pi/2}^{-D/2} 2R^4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta; \text{ por reducción sucesiva} \\
 &= 2R^4 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = 2R^4 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta) \, d\theta \\
 &= -2R^4 \left[ \frac{1}{8} \theta - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4\theta) \right]_{\pi/2}^{-\pi/2} \\
 &= (-2R^4) \left( \left[ \frac{1}{8} \theta \right]_{\pi/2}^{-\pi/2} - \left[ \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4\theta \right]_{\pi/2}^{-\pi/2} \right) \\
 &= (-2R^4) \left( \frac{1}{8} \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \left[ \left( \frac{1}{32} \operatorname{sen} \left( \frac{-4\pi}{2} \right) \right) - \left( \frac{1}{32} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \right] \right) \\
 &= (-2R^4) \left( \frac{1}{8} (-\pi) \right) - (0 - 0) \\
 I_{EN} &= \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}
 \end{aligned}$$

Este resultado de  $I_{EN} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$  se comprueba sabiendo el momento segundo polar de área  $J_p = I_p = I_x + I_y = \frac{\pi R^4}{2}$  (tema 3.2.1) y como  $I_x = I_y$  para una sección circular sólida de radio  $R$ , se tiene:

$$I_p = 2I_x \Rightarrow I_x = I_{EN} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \dots \dots \dots L. Q. Q. C.$$

#### 4.6.1. Teorema de transferencia del eje paralelo

La aplicación de este teorema es extremadamente útil para encontrar momentos segundos de área (momentos de inercia), especialmente para secciones (perfiles) compuestos.

Los ejes que pasan por el centroide de una figura son llamados *ejes centroidales* y *el momento 2do. de área* (momento de inercia) de una figura obtenida con respecto a un eje centroidal es llamado momento centroidal 2do. de área (momento centroidal de inercia).

Supongamos que para la misma sección rectangular figura 4.12(a) con ancho  $b$  y altura o peralte  $d$  y eje centroidal  $EN$ . Se requiere determinar el momento segundo de área  $I_x$  con respecto al eje  $X-X$  paralelo al eje centroidal  $EN$ , localizado a una distancia  $k$ , como se muestra en la figura 4.12(d). Considerando una tira elemental de ancho  $dy$ , a una distancia  $y$  del eje neutro,  $EN$ :

Momento primero de área de la tira diferencial

$$\text{respecto a } X - X = (b \cdot dy) \times (k - y)$$

$$= b(k - y) \cdot dy$$

Momento segundo de área de la tira diferencial

$$\text{respecto a } X - X = b(k - y) \cdot dy \times (k - y)$$

$$= b(k - y)^2 \cdot dy$$

Integrando para obtener el momento segundo total de área  $I_X$ :

$$I_X = \int_{k-\frac{1}{2}d}^{k+\frac{1}{2}d} b(k - y)^2 \cdot dy = b \int_{k-\frac{1}{2}d}^{k+\frac{1}{2}d} (k^2 - 2ky + y^2) \cdot dy$$

$$= b \left[ k^2y - ky^2 + \frac{y^3}{3} \right]_{k-\frac{1}{2}d}^{k+\frac{1}{2}d} = \frac{1}{3} b \left[ 3dk^2 + \frac{d^3}{4} \right]$$

es decir:  $I_X = bdk^2 + \frac{bd^3}{12} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{observese que el término } \frac{bd^3}{12} \text{ es el momento segundo} \\ \text{de área respecto al eje centroidal EN y } bdk^2 = Ak^2, \\ \text{donde A es el área de la sección.} \end{array} \right\}$

Por tanto:  $I_X = I_{EN} + Ak^2 \dots \dots \dots (d)$

La ecuación (d) es conocida como: *El teorema de transferencia del eje paralelo* el cual tiene una amplia aplicación práctica, leyéndose como sigue: *El momento segundo de área de una figura con respecto a cualquier eje es igual al momento segundo con respecto a un eje paralelo a este y pasando a través del centroide más el área de la figura multiplicando el cuadrado de la distancia entre ejes.*

Si  $k = \frac{d}{2}$  en la ecuación (d); el momento segundo de área respecto a un eje paralelo pasando por el lado inferior (base) del rectángulo figura 4.12(d) será:

$$I_X = \frac{bd^3}{12} + bd \left( \frac{d}{2} \right)^2$$

$$= \frac{bd^3}{12} + \frac{bd^3}{4}$$

es decir:  $I_X = \frac{bd^3}{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Momento segundo de área respecto a un eje que} \\ \text{pasa por la arista superior o inferior de un} \\ \text{rectángulo y consecuentemente} \end{array} \right\}$

$$I_y = \frac{db^3}{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Momento segundo de \u00e1rea respecto a un eje que} \\ \text{pasa por la arista izquierda o derecha de un} \\ \text{rect\u00e1ngulo.} \end{array} \right\}$$

#### 4.7. Aplicaciones de la Expresión General de la Flexión Simple

Puntualizando:  $\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R}$  como la ecuación de la flexión simple, se precisa en la siguiente relación, cada término de esta expresión; su denominación con las unidades en el sistema S. I. correspondientes:

$\sigma$  = esfuerzo en las capas de fibras de la sección  $N/m^2$  o  $N/mm^2$

$Y$  = distancia de la capa de fibras considerada desde el eje neutro, EN  $m$   $mm$

$M$  = Momento flexionante en la capa de fibras considerada  $Nm$  o  $Nmm$

$I$  = Momento segundo de área de la sección respecto al eje neutro EN  $m^4$   $mm^4$

$E$  = Módulo de elasticidad del material de la viga  $N/m^2$   $N/mm^2$

$R$  = radio de curvatura  $m$   $mm$

$Z = \frac{I}{y_{max}}$  Módulo de sección  $m^3$   $mm^3$

En los siguientes ejemplos típicos demostrativos, E. T. D., aplicaremos la ecuación general de la flexión simple.

Ejemplo 4.7.1.T.D. Una viga de sección rectangular,  $40mm$  de ancho y altura o peralte de  $160mm$ , esta sujeta, a un momento flexionante de  $35KNm$ . Determine el esfuerzo de flexión máximo en el material de la viga.

*Solución:*

Datos:  $b = 40mm = 40 \times 10^{-3}m$ , peralte  $d = 160mm = 160 \times 10^{-3}m$ ,  $M = 35KNm = 35 \times 10^3Nm$

Determinar  $\sigma_{m\acute{a}x} = ?$

de la ecuación general de flexión simple

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{My_{m\acute{a}x}}{I}$$

donde  $M = 35 \times 10^3Nm$ ,  $y_{m\acute{a}x} = 80 \times 10^{-3}m$  y  $I = \frac{bd^3}{12} = \frac{40 \times 10^{-3}m \times (160 \times 10^{-3}m)^3}{12}$

$$= 13.65 \times 10^{-6}m^4$$

$$\therefore \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{35 \times 10^3Nm \times 80 \times 10^{-3}m}{13.65 \times 10^{-6}m^4}$$

$$= 205.1 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \quad \text{o} \quad 205.1 \text{ MN/m}^2$$

Es decir el esfuerzo de flexión máximo es  $205.1 \text{ MN/m}^2$

Ejemplo 4.7.2.T.D. La sección transversal de la viga *I idealizada* mostrada en la figura 4.7.2.T.D. tiene dimensiones totales de  $100 \text{ mm}$  de ancho de patín por  $150 \text{ mm}$  de peralte o altura con un espesor del patín y de la alma de  $20 \text{ mm}$ . Calcular el momento segundo de área de la sección respecto al eje neutro. Si el esfuerzo de flexión en el material de la viga no excede de  $180 \text{ MN/m}^2$ , determine el momento flexionante máximo en la viga.

*Solución:*

Datos: de acuerdo a la figura 4.7.2.T.D. y a la expresión de  $I$  para un perfil idealizado

$$B = 100 \text{ mm} = 0.1 \text{ m}, \quad D = 150 \text{ mm} = 0.15 \text{ m}, \quad b = (100 - 20) \text{ mm} = 0.08 \text{ m}, \quad d = (150 - 40) \text{ mm} = 0.11 \text{ m}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 180 \text{ MN/m}^2 = 180 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Determinar  $I$  idealizada y  $M_{m\acute{a}x}$

Expresiones algebraicas a utilizar:

$$I_{EN} = \frac{1}{12} (BD^3 - bd^3) y \frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$$

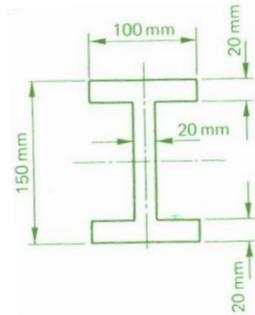


Figura 4.7.2.T.D. Viga Idealizada

Para la viga *I idealizada* respecto al  $EN$

$$I_{EN} = \frac{1}{12} (BD^3 - bd^3) \text{ sustituyendo valores}$$

$$I_{EN} = \frac{1}{12} [0.1 \text{ m} \times -(0.15 \text{ m})^3 - 0.08 \text{ m} \times (0.11 \text{ m})^3]$$

$$= 1.925 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Esto es el momento segundo de área respecto al eje neutro es  $1.925 \times 10^{-5} \text{ m}^4$   
De la ecuación de la flexión simple.

$M = \frac{\sigma I}{y}$  para  $y = 0.075 \text{ m}$  nos da  $M_{m\acute{a}x}$ , sustituyendo valores

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{180 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \times 1.925 \times 10^{-5} \text{ m}^4}{0.075 \text{ m}}$$

$$= 46.2 \times 10^2 Nm \quad \text{o} \quad 46.2 kNm$$

Por lo que el momento máximo flexionante es  $46.2 kNm$

Ejemplo 4.2.3.T.D. Una tira de acero para resorte será doblada alrededor de un tambor de  $1400mm$  de diámetro. Si el esfuerzo en el límite elástico del material es  $400N/mm^2$ , y el módulo de elasticidad es  $220kN/mm^2$ , ¿Cuál es el espesor máximo de la tira que puede usarse sin el riesgo de adoptar la forma circular permanente del tambor al desaparecer el esfuerzo de  $400N/mm^2$ ?

Solución:

Datos:  $D = 1400mm$ ,  $\sigma_{L.E} = 400N/mm^2$ ,  $E = 220 \times 10^3 N/mm^2$

Determinar; espesor,  $e$ , de tira de acero para resorte.

Expresión algebraica a utilizar  $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$  ecuación general de la flexión simple

Para evitar una condición circular permanente, el esfuerzo máximo en el material  $\sigma_{m\acute{a}x}$  no debe exceder el esfuerzo en el límite elástico.

Por lo que la ecuación general de la flexión y la figura 4.2.3 T.D.

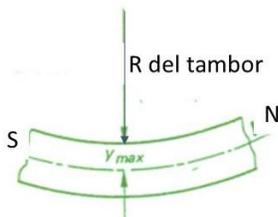


Figura 4.2.3.T.D.

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (a)$$

$$\text{Con } \sigma = \sigma_{m\acute{a}x} = 400N/mm^2$$

$$y = y_{m\acute{a}x}mm$$

$$E = 220 \times 10^3 N/mm^2$$

$$R = (700 + y_{m\acute{a}x})mm$$

Sustituyendo valores en (a)

$$\frac{400}{y_{m\acute{a}x}} = \frac{220 \times 10^3}{(700 + y_{m\acute{a}x})}$$

$$400(700 + y_{m\acute{a}x}) = 220 \times 10^3 \times y_{m\acute{a}x}$$

$$\therefore y_{m\acute{a}x} = \frac{400 \times 700}{219.6 \times 10^3}$$

$$= 1.27mm$$

Por lo que el espesor de la tira metálica  $e = 2.54mm$

Ejemplo 4.2.4.T.D. El momento flexionante máximo y el esfuerzo de flexión en una viga de sección transversal rectangular no sobre pasa  $25kNm$  y  $130MN/m^2$  respectivamente. ¿Cuáles serán las

dimensiones de la sección transversal de la viga, si el ancho de la viga es dos tercios ( $\frac{2}{3}$ ) de su altura o peralte?

*Solución:*

Datos:  $M_{m\acute{a}x} = 25kNm$ ,  $\sigma = 130MN/m^2$ ,  $b = \frac{2}{3}d$  (sección rectangular)

Determinar:  $b=?$  y  $d=?$

Modelos matemáticos a utilizar :  $I = \frac{bd^3}{12} \dots \dots (i)$ ,  $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \dots \dots (ii)$

de (i) con  $b = \frac{2}{3}d$  se tiene:

$$I = \frac{2}{3}d \times \frac{d^3}{12} = \frac{d^4}{18}$$

de (ii) sustituyendo valores

$\sigma = \frac{M_{m\acute{a}x}y}{I}$  con  $y = \frac{d}{2}$  tenemos:

$$130 \times 10^6 N/m^2 = \frac{25 \times 10^3 Nm \times 0.5dm}{d^4/18(m^4)}$$

$$\therefore d^3 = \frac{25 \times 10^3 Nm \times 0.5 \times 18}{130 \times 10^6 N/m^2}$$

$$= 1.731 \times 10^{-3} m^3$$

por lo que  $d = 0.12m$  o  $120mm$

y  $b = \frac{2}{3} \times 120mm$

$= 80mm$

Tal que las dimensiones del perfil de la viga son  $80mm \times 120mm$

Ejemplo 4.7.5.T.D. Calcular la fuerza máxima que puede ser aplicada a la mitad del claro de la viga simplemente soportada figura 4.7.5.T.D., si el esfuerzo máximo de flexión en este punto no excede de  $200MN/m^2$ .

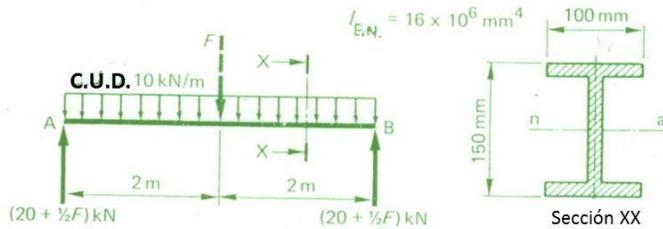


Figura 4.2.5.T.D.

Solución:

Datos: Del *dcl* de la figura 4.2.5.T.D.,  $L = 4m$ ,  $C.U.D. = w = 10kN/m$  de la sección transversal;  $I = 16 \times 10^4 mm^4$ ,  $y_{m\acute{a}x} = 0.075mm$ ; con  $\sigma_{m\acute{a}x} = 200MN/m^2$

Determinar:  $F$  máxima aplicada a la mitad del claro  $L$

Expresiones algebraicas a utilizar:

$$\sum F_y = 0 \dots\dots (i) \quad \sum M_A = 0 \dots\dots (ii) \quad y \quad \frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \dots\dots (iii)$$

del *dcl* de acuerdo a la ecuación (i) y (ii):

La reacción en A = reacción en B

$$= \frac{1}{2} [(10kN/m \times 4m)\{F\}]$$

$$= \left(20 + \frac{1}{2}F\right), \text{ donde } F \text{ en } kN$$

Aplicando el método de las secciones a la mitad del claro, el momento resultante interno en esta sección de acuerdo a la ecuación (ii) es:

$$M = \sum (\text{Momentos a la izquierda de la mitad del claro})$$

$$= \left[ \left(20 + \frac{1}{2}F\right) kN \times 2m \right] - [(10kN/m \times 2m) \times 1m]$$

$$= (20 + F)kNm \quad \text{o} \quad (20 + F) \times 10^3 Nm$$

de la ecuación (iii)

$$M = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} I}{y_{m\acute{a}x}}$$

donde  $\sigma_{m\acute{a}x} = 200MN/m^2 = 200 \times 10^6 N/m^2$

$$I = 16 \times 10^6 mm^4 = 16 \times 10^{-6} m^4$$

y

$$y_{\text{máx}} = \frac{150\text{mm}}{2} = 0.075\text{m}$$

$$\begin{aligned}\therefore (20 + F) \times 10^3 \text{Nm} &= \frac{200 \times 10^6 \text{N/m}^2 \times 16 \times 10^{-6} \text{m}^4}{0.75\text{m}} \\ &= 42.67 \times 10^3 \text{Nm}\end{aligned}$$

De la que  $F = 42.67 - 20$

$$= 22.67 \text{kN}$$

Es decir, la máxima fuerza F a la mitad del claro es de 26.67kN.

#### 4.9. Tablas de Propiedades Geométricas de Secciones Estructurales.

En una viga teniendo igual resistencia tanto en tracción como en compresión. La sección (perfil) más económico es el que es simétrico respecto al eje neutro, *EN*, puesto que este provocará que la viga tenga esfuerzos iguales en tracción y compresión, como en las vigas de acero. Sin embargo, para materiales como hierro fundido el cual es fuerte en compresión y débil en tracción, la sección no debe ser simétrica respecto al eje neutro, *EN*.

En la ecuación general de la flexión simple, *las propiedades geométricas* del área de la sección transversal de la viga como la distancia del eje neutro, *EN*, a la fibra más alejada ( $y_{máx}$ ) y el momento segundo de área *I* con respecto al eje *X-X* así como la relación  $\frac{I}{y_{máx}} = Z$ , módulo de sección, la masa de la viga por unidad de longitud *kg/m* entre otras, son tabuladas para perfiles de vigas normalizadas para que en el ejercicio de ingeniería general, las vigas sean seleccionadas de las existencias disponibles estándar que se tienen en el mercado de perfiles estructurales tanto del acero rolado en caliente como de laminación de metales (Monten) en sus diversas formas geométricas y tamaño.

Con la finalidad de realizar algunos ejemplos demostrativos de *Cálculos de Resistencia a la Flexión* (tema 4.9.1). Una selección simple de algunos perfiles normalizados (estándar) de vigas; tomadas de un manual de estructuras de acero, se presentan en forma condensada, en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3. de propiedades geométricas.

Tabla 4.1. Vigas Universales I

Dimensiones <i>D × B</i> (mm)	Masa por metro (kg)	Espesor		$I_{xx}$ ( $cm^4$ )	$I_{yy}$ ( $cm^4$ )	$Z_{xx}$ ( $cm^3$ )	$Z_{yy}$ ( $cm^3$ )
		Alma <i>t</i> (mm)	Patín <i>T</i> (mm)				
910.3×304.1	222	15.9	23.9	375924	11223	8259	738.1
840.7×292.4	194	14.7	21.7	279450	9069	6648	620.4
762.0×266.7	173	14.3	21.6	205177	6846	5385	513.4
677.9×253.0	125	11.7	16.2	118003	4379	3481	346.1
617.5×307.0	113	14.1	23.6	151631	11412	4911	743.3
533.1×209.3	92	10.2	15.6	55353	2392	2076	228.6
467.4×192.8	98	11.4	19.6	45717	2343	1956	243.0
457.2×151.9	67	9.1	15.0	28577	878	1250	115.5
402.3×142.4	46	6.9	11.2	15647	539	777.8	75.7
364.0×173.2	67	9.1	15.7	19522	1362	1073	157.3
352.8×126.0	39	6.5	10.7	10087	357	571.8	56.6
310.9×166.8	54	7.7	13.7	11710	1061	753.3	127.3
312.7×102.4	33	6.6	10.8	6487	193	415.0	37.8
254.0×101.6	22	5.8	6.8	2867	120	225.7	23.6
203.2×133.4	25	5.8	7.8	2356	310	231.9	46.4

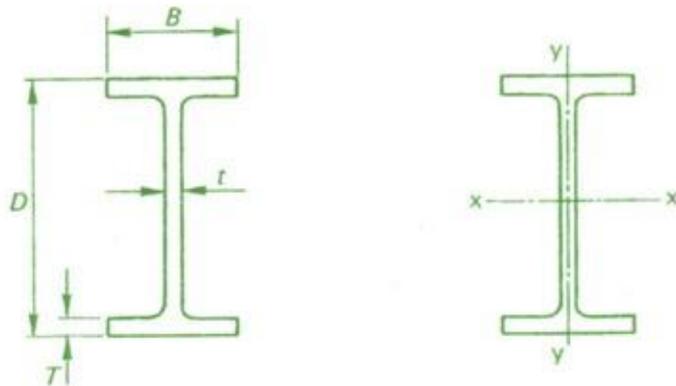


Figura 4.13 Viga Universal I

Tabla 4.2. T Estructural cortada de una viga Universal I

Dimensiones $B \times A$ (mm)	Masa por metro (kg)	Espesor		$I_{xx}$ ( $cm^4$ )	$Z_{xx}$ ( $cm^3$ )	Distancia del EN., a la fibra más alejada	
		Alma $t$ (mm)	Patín $T$ (mm)			$y_f$ ( $cm^3$ )	$y_i$ ( $cm^3$ )
304.1×455.2	112	15.9	23.9	29036	869.8	12.1	33.42
292.4×420.4	97	14.7	21.7	21381	690.9	11.1	30.94
266.7×381.0	87	14.3	21.6	15495	551.3	9.99	28.11
253.0×339.0	63	11.7	16.2	8997	359.5	8.87	25.03
307.0×308.7	90	14.1	23.6	8949	369.5	6.65	24.22
209.3×266.6	46	10.2	15.6	3905	194.4	6.56	20.10
192.8×233.7	49	11.4	19.6	2978	167.2	5.55	17.82
151.9×228.6	34	9.1	15.0	2128	126.1	5.99	16.87
142.4×201.2	23	6.9	11.2	1130	75.0	5.05	15.07
173.2×182.0	34	9.1	15.7	1158	81.6	4.01	14.19
126.0×176.4	20	6.5	10.7	719.6	54.4	4.41	13.23
166.8×155.4	27	7.7	13.7	636.4	51.5	3.19	12.35
102.4×156.3	17	6.6	10.8	486.7	42.4	4.14	11.49
101.6×127.0	11	5.8	6.8	227.2	24.7	3.49	9.21
133.4×101.6	13	5.8	7.8	133.7	16.6	2.12	8.04

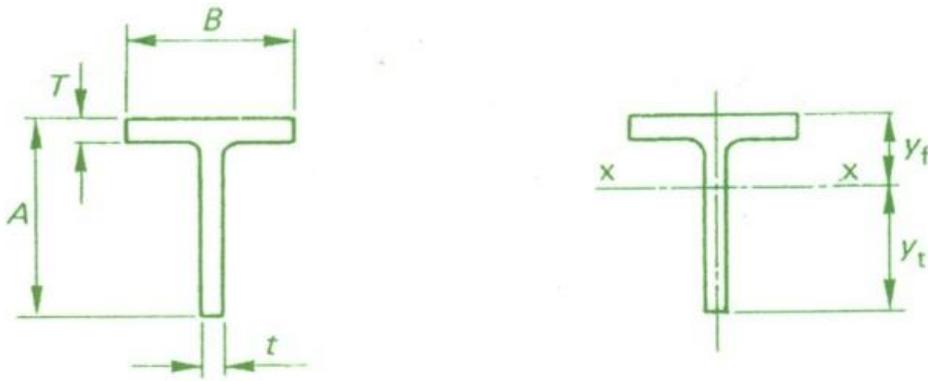


Figura 4.14T Estructural cortada de una viga Universal I

Tabla 4.3. Vigas Icon montante de canal (Gantry girders)

Dimensiones $D \times B$ (mm)	Masa por metro (kg)	Punto más alejado del centroide		$I_{xx}$ ( $cm^4$ )	$Z_{xx}$ ( $cm^3$ )
		$y_1$ (cm)	$y_2$ (cm)		
939 × 432	355	39.20	54.68	644504	11797
853 × 432	260	32.92	52.37	384673	7345
774 × 432	239	29.16	48.26	288718	5982
700 × 432	218	25.58	44.40	215582	4856
630 × 432	245	24.11	38.86	206436	5313
627 × 381	195	23.60	39.14	155882	3982
622 × 381	180	22.74	39.49	140490	3558
618 × 305	155	23.53	38.22	120871	3163
555 × 381	177	20.27	35.23	108879	3091
550 × 305	151	20.84	34.13	92644	2715
478 × 305	140	17.77	29.98	64431	2149
472 × 254	117	18.67	28.50	54593	1916
465 × 229	93	17.57	28.91	39916	1381
423 × 305	116	14.67	27.62	40572	1469
418 × 254	95	15-52	26.23	34059	1298

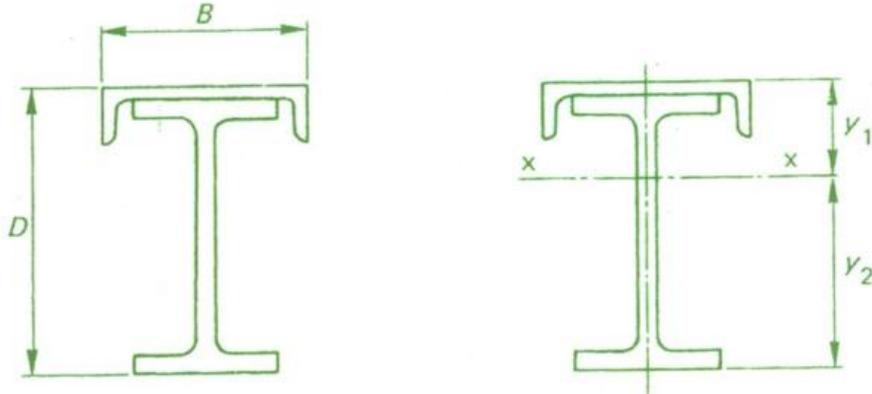


Figura 4.15. Viga en I con montante de canal (Gantry girders)

#### 4.9.1. Cálculos de resistencia a la flexión

La comprobación de la resistencia y la elección de las secciones (perfiles) de las vigas sometidas a flexión se efectúa partiendo de la condición siguiente: Los esfuerzos normales máximos en las secciones transversales no deben ser mayores que los esfuerzos permisibles  $[\sigma]$  de tracción y compresión establecidas por las normas o por la experiencia de diseño para el material de la viga.

Para vigas de materiales teniendo esfuerzos permisibles iguales a la tracción como a la compresión,  $[\sigma_t] = [\sigma_c] = [\sigma]$ , la condición de resistencia a la flexión tiene la forma:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z} \leq [\sigma] \dots \dots \dots (a)$$

Para vigas fabricadas de materiales que no resisten por igual la tracción y la compresión la resistencia determinada por los esfuerzos normales a la flexión tienen la forma:

$$\sigma_{tm\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z_1} = \frac{M_{m\acute{a}x} y_t}{I} \leq [\sigma_t] \dots \dots \dots (b)$$

$$\sigma_{cm\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z_2} = \frac{M_{m\acute{a}x} y_c}{I} \leq [\sigma_c] \dots \dots \dots (c)$$

donde  $y_t$  e  $y_c$  son las distancias desde el eje neutro  $EN$  hasta los puntos más alejados de las zonas de la sección sometidas, a la tracción y compresión, siendo  $[\sigma_t]$ ,  $[\sigma_c]$  sus esfuerzos permisibles a la tracción y a la compresión respectivos.

El aprovechamiento del material será óptimo cuando  $\sigma_{tm\acute{a}x} = [\sigma_t]$  y  $\sigma_{cm\acute{a}x} = [\sigma_c]$ ; para esto la condición necesaria es:

$$\frac{y_t}{y_c} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (d)$$

es decir, las distancias, al eje neutro desde los puntos más alejados de las zonas de la sección sometidas a tracción y a compresión, deben ser proporcionales a los respectivos esfuerzos permisibles.

Las ecuaciones de los esfuerzos en la flexión se han deducido basándose en la ley de Hooke, por lo que sólo son válidas para esfuerzos que no superen el límite de proporcionalidad del material de la viga.

Valiéndose de la condición de resistencia determinada por los esfuerzos normales durante la flexión, se pueden resolver los tres problemas siguientes:

1. **Comprobación de la resistencia** (cálculo de comprobación), que se efectúa cuando se conocen las dimensiones de la sección (perfil) de la viga, el momento flexionante máximo y el esfuerzo permisible  $[\sigma]$ . En este caso se utiliza directamente la condición (a).
2. **Elección de la sección o perfil** (cálculo de diseño), que se practica cuando se dan las cargas que actúan sobre la viga, o sea, se puede determinar el momento flexionante  $M_{m\acute{a}x}$  y el esfuerzo permisible  $[\sigma]$ .

Despejando  $Z$  en la desigualdad (a), se tiene:

$$Z \geq \frac{M_{m\acute{a}x}}{[\sigma]} \dots \dots \dots (e)$$

Para el módulo de sección o momento de resistencia  $Z$  que se requiere y la forma de la sección (perfil) que se da, se eligen las dimensiones (tamaño) del perfil.

3. **Determinación del momento flexionante máximo**,  $M_{m\acute{a}x}$  que se lleva a cabo cuando se dan las dimensiones de la sección de la viga, y el esfuerzo permisible

$$M_{m\acute{a}x} \leq [\sigma]Z \dots \dots \dots (f)$$

Las formas de los perfiles estructurales más convenientes (secciones transversales) son aquellas que proporcionan, un momento de resistencia máximo teniendo una superficie mínima. Esta condición la satisface en primer lugar la sección universal **I**, en la cual casi todo el material ha sido retirado del eje neutro,  $EN$ , hacia los patines superior e inferior, con lo que se aumenta el momento de inercia (Momento segundo del área), **I** y por consecuencia el módulo de sección (momento de resistencia)  $Z$ . La sección rectangular conviene menos, y la circular, mucho menos puesto que se ensancha hacia el eje neutro,  $EN$ . Las secciones huecas son siempre más convenientes que las macizas de iguales dimensiones, por lo que es conveniente utilizar vigas cuya sección corresponda a la de los perfiles laminados o rolados en caliente estándar.

Ejemplo 4.9.1.1.T.D Determine el esfuerzo en la sección de diseño  $AB$  del diente de un engrane (figura 4.9.1.1.T.D) si la componente tangencial de la fuerza total de transmisión  $P = 45kN$  actuando en la parte alta del perfil del diente, en la línea de presión a una altura del diente  $h = 30mm$  con una longitud del diente  $b = 90mm$  y el grueso de la base del diente  $S = 22mm$ .

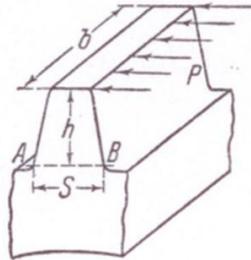


Figura 4.9.1.1.T.D

Solución:

Datos:  $P = 45kN$ ,  $h = 30mm$ ,  $b = 90mm$ ,  $S = 22mm$

Determinar:  $\sigma$  en la sección de diseño AB.

Modelo matemático principal a utilizar

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z} \leq [\sigma] \dots \dots (a)$$

El momento flexionante máximo en la sección de diseño AB considerando al diente como una viga en cantilever, es:

$$M_{m\acute{a}x} = Ph = (45 \times 10^3 N) \times (30mm) = 1.35 \times 10^6 Nmm$$

El módulo de sección para la sección de diseño, por ser rectangular es:

$$Z = \frac{bS^2}{6} = \frac{90mm \times (22mm)^2}{6} = 7.26 \times 10^3 mm^3$$

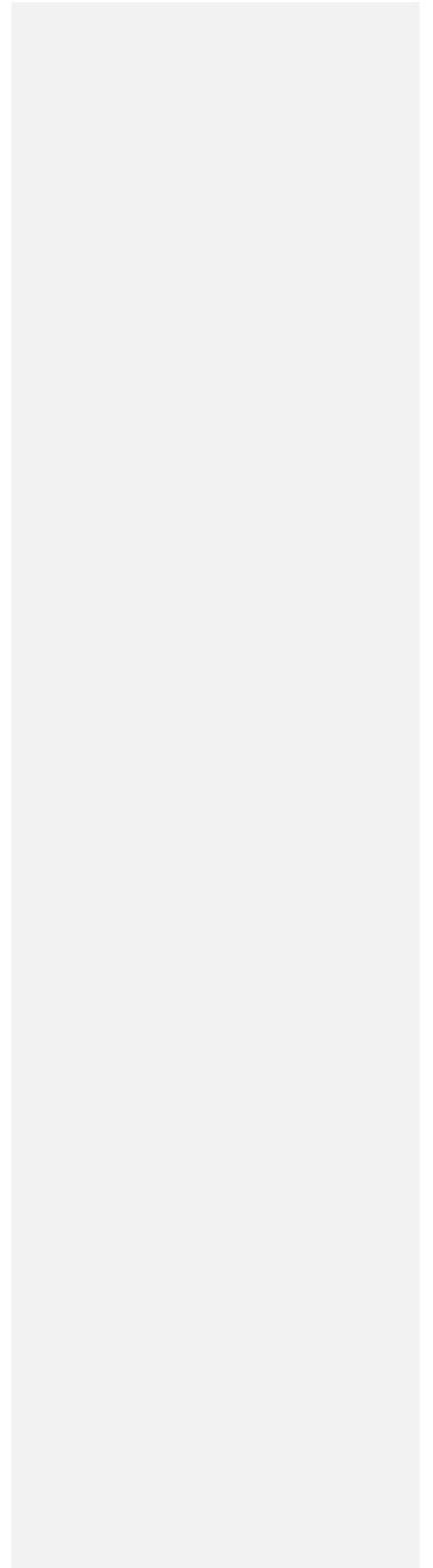
Sustituyendo valores en (a) el esfuerzo máximo en la sección de diseño del diente es:

$$\begin{aligned} \sigma_{m\acute{a}x} &= \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z} = \frac{1.35 \times 10^6 Nmm}{7.26 \times 10^3 mm^3} \\ &= 185.950 \frac{N}{mm^2} = 185.950 \frac{MN}{m^2} = 186 \times 10^6 N/m^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.1.2.T.D. El momento flexionante máximo en la sección transversal de una viga es  $M_{m\acute{a}x} = 36kNm$ . La viga debe de ser de acero. Seleccionar el tamaño de su sección en las tres variantes siguientes:

a) Laminado rolado en caliente en perfil universal I; b) perfil rectangular con una razón de la altura (peralte)  $h$  el ancho  $b$  de  $h:b = 4:3$ ; c) perfil circular.

Determinar la razón de las masas de las vigas de sección rectangular y circular a la masa de la viga universal I. El esfuerzo permisible  $[\sigma] = 160N/mm^2$ .



Solución:

Datos:  $M_{m\acute{a}x} = 36kNm$ ,  $[\sigma] = 160N/mm^2$

Determinar: Dimensiones de perfil de una viga: a) Universal I, b) rectangular con la razón de  $h:b = 4:3$ ; y la razón de masas de  $(b)/(a)$  y  $(c)/(a)$

Modelo matemático principal a utilizar

$$Z_x \geq \frac{M_{m\acute{a}x}}{[\sigma]} \dots (a), \quad Z_{x(b)} = \frac{bh^2}{6} \dots (b), \quad Z_{x(c)} = \frac{\pi d^3}{32} \dots (c), \quad \delta = \frac{m}{v} = \frac{m}{AL} \dots (d)$$

Por lo que el módulo de sección (momentos de resistencia) necesario para los tres perfiles (a),(b) y (c), es:

$$Z_x \geq \frac{M_{m\acute{a}x}}{[\sigma]} = \frac{36 \times 10^6 Nmm}{160 \frac{N}{mm^2}} = 225 \times 10^3 mm^3 = 225 cm^3;$$

a) Para la viga con sección universal I, de acuerdo a la tabla 4.1 el perfil que más se aproxima es el de  $D = 254mm \times B = 101.6mm$  cuyo módulo de sección es  $Z_{xx} = 225.7cm^3$  y considerando una densidad promedio  $\delta = 7.85 \times 10^{-3} kg/cm^3$  de la ecuación (d).

$$A_I = \frac{\frac{m}{L}}{\delta} = \frac{22 \times 10^{-2}}{7.85 \times 10^{-3}} = 28 cm^2$$

b) Para la viga con sección rectangular, con relación entre sus lados  $h:b = 4:3$ . Para el rectángulo  $Z_x = bh^2/6$ ; sustituyendo a  $b = \frac{3}{4}h$  e igualando  $Z_x = 225cm^3$ , tenemos:

$$Z_{x_{rec}} = \frac{\frac{3}{4}hh^2}{6} = \frac{h^3}{8} = 225 cm^3$$

$$\therefore h = \sqrt[3]{225 \times 8} = 12.2 cm \quad y \quad b = \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}(12.2) = 9.15 cm$$

El área de esta sección rectangular es  $A_{rec} = 12.2 \times 9.15 = 112 m^2$

c) Para la viga con sección circular

$$Z_{x_{circ}} = \frac{\pi d^3}{32} = 225 cm^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{225 \times 32}{\pi}} = 13.2 cm$$

El área de esta sección circular es  $A_{circ} = \frac{\pi d^2}{4} = 137 cm^2$

La relación entre las masas, de acuerdo a la ecuación (d) para la misma densidad del acero, es igual a la relación entre las áreas de las secciones:

$$\frac{A_{rec}}{A_I} = \frac{112}{28} = 4.0; \quad \frac{A_{circ}}{A_I} = \frac{137}{28} = 4.9$$

Por consiguiente la viga de sección rectangular pesará 4.0 veces más que la de sección universal I y la viga de sección circular pasa 4-9 veces más que la de sección universal I.

Ejemplo 4.9.1.3. T.D. Determine la magnitud de la fuerza máxima permisible  $P$  que flexiona una viga de acero simplemente soportada de  $1m$  de claro (figura 4.9.1.3.T.D). La sección de la viga es rectangular,  $b=4cm$ ,  $h=6cm$ , el punto de fluencia del material de la viga es  $\sigma_y = 300N/mm^2$ , el factor de seguridad  $n=1.5$

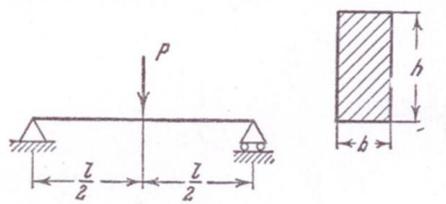


Figura 4.9.1.3.T.D

Solución:

Datos:  $l = 1m$ ,  $b = 4cm$ ,  $h = 6cm$ ,  $\sigma_y = 300N/mm^2$ , Factor de seguridad  $n = 1.5$

Determinar:  $[P]$

Expresiones algebraicas principales a utilizar

$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_x}{n} \dots (i)$ ;  $M_{m\acute{a}x} = \frac{Pl}{4} \dots (ii)$ , en  $\frac{l}{2}$ ,  $Z_x = \frac{bh^2}{6} \dots (iii)$  para una sección rectangular.

Sustituyendo (ii) y (iii) en (i) se tiene:

$$\frac{Pl}{4 \left( \frac{bh^2}{6} \right)} \leq \frac{\sigma_x}{n} \Rightarrow P \leq \frac{4\sigma_y bh^2}{b \times 1.5l}$$
 y sustituyendo valores

$$P = \frac{4 \times 300 \times 10^6 \times (4 \times 10^{-2}) \times (6 \times 10^{-2})^2}{6 \times 1.5 \times l} = 19.200N = 19.2kN$$

Los cálculos de resistencia a la flexión en vigas generalmente se realizan en base a los esfuerzos normales de tracción y compresión  $\sigma$ , debido a que cuando una viga es flexionada por fuerzas transversales, la fuerza de corte  $Q$  que actúan en la sección transversal de la viga además de los momentos flexionantes, lo que producen esfuerzos normales. Los esfuerzos de corte inducidos por las fuerzas transversales solamente son de magnitud considerable en vigas muy cortas (claro muy pequeño).

Como en las anteriores unidades 2 y 3, se exponen a consideración del alumno un resumen de los modelos matemáticos principales necesarios en la solución de los ejemplos de discusión y ejercicios de trabajo tema 4.10 de la Unidad 4 FLEXIÓN EN VIGAS.

$\sum F_v = 0$ ,  $\sum M_{R_1}$  para determinar las reacciones en los soportes.

$\sum F_{v_{sec.izq}} = 0, \delta \sum F_{v_{sec.der}} = 0, y \sum M_{X-X_{sec.izq}} = 0, \delta \sum M_{X-X_{sec.der}} = 0$ , para encontrar los factores de fuerza interna  $Q_{X-X}$  y  $M_{X-X}$  que se oponen a la deformación de la viga en una sección transversal  $X-X$  al aplicar el método de las secciones.

Todo lo anterior para que al construir los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes, encontrar los valores máximos de  $Q$  y de  $M_{X-X}$ .

Para los diagramas de fuerzas cortantes  $Q$  y de momentos flexionantes  $M$

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad y \quad \frac{dQ}{dx} = -w$$

donde:

$w$  = Intensidad de la carga (carga por unidad de longitud)  $N/m$

$Q$  = Fuerza de corte en  $N$

$M$  = Momento flexionante en  $Nm$

La fuerza cortante  $Q$  en la sección es positiva, cuando sus vectores tienden a hacer girar las partes de la viga seccionada en sentido de las manecillas del reloj.

El momento flexionante  $M$  en la sección es positiva, si provoca compresión en las fibras superiores de la viga.

Esfuerzos normales  $\sigma_t$  y  $\sigma_c$  en vigas.

Ecuación general de la flexión simple:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

Donde:

$\sigma$  = Esfuerzo normal en  $N/m^2$  a una distancia "y"  $m$  desde el eje neutro.

$M$  = Momento flexionante (o momento resistente) en  $Nm$

$I$  = Momento segundo de área (o momento de inercia) de la sección respecto al eje neutro en  $m^4$ .

$E$  = Módulo de Young (o módulo de elasticidad) en  $N/m^2$

$R$  = Radio de curvatura de la superficie neutral (eje neutro en  $m$ )

y para cálculos de resistencia a la flexión:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_{t_{m\acute{a}x}} = \frac{M_{m\acute{a}x} y_t}{I} \leq [\sigma_t] \quad o, \quad \sigma_{c_{m\acute{a}x}} = \frac{M_{m\acute{a}x} y_c}{I} \leq [\sigma_c]$$

Donde:

$\sigma_{m\acute{a}x}$  = Esfuerzo máximo en  $N/m^2$  que se tiene en la sección con  $M_{m\acute{a}x}$

$M_{m\acute{a}x}$  = Momento flexionante máximo

$Z$  = Módulo de sección en  $m^3$  y es definida como  $Z = \frac{I}{y_{m\acute{a}x}}$ , donde

$y_{m\acute{a}x}$  = Es la distancia del eje neutro a la fibra más alejada, de la parte a tracción o compresión.  
 $[\sigma]$  = Esfuerzo normal permisible a la tracción o compresión.

#### 4.10. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

##### Ejemplos de Discusión

4.1 e.d. Una viga  $ABCDE$  de  $6m$  de longitud esta simplemente soportada en  $B$  y  $D$  sujeta a dos cargas puntuales de  $70kN$  y  $20kN$  en  $C$  y  $E$  respectivamente. Teniendo los tramos  $AB = 0.5m$ ,  $BC = 1m$ ,  $CD = 2m$ , y  $DE = 2.5m$ ; figura (4.1a). Trazar los diagramas de fuerzas cortantes  $Q$  y de momentos flexionantes  $M$ .

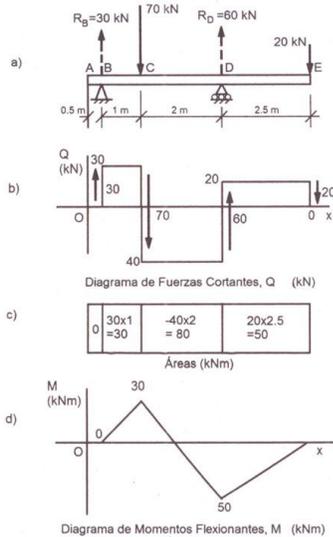


Figura 4.1.e.d.

*Solución:*

Datos:  $F_C = 70kN \downarrow$ ,  $F_E = 20kN \downarrow$ ,  $l_{AB} = 0.5m$ ,  $l_{BC} = 1m$ ,  $l_{CD} = 2m$  y  $l_{DE} = 2.5m$  soportes de la viga en  $B$  y  $D$ .

Determinar: reacciones en  $B$  y  $D$  y trazar diagrama de fuerzas cortantes  $Q$  y de momentos flexionantes  $M$ .

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$\sum F_y = 0 \dots \dots (i), \quad \sum M_0 = 0 \dots \dots (ii)$$

1. Reacciones en los soportes  $R_B$  y  $R_D$  (dcl fig. 4.1a)

De (ii) tomando momentos respecto al soporte en  $B$ .

$$3R_D = (70 \times 1) + (20 \times 5.5)$$

$$= 180$$

$$\therefore R_D = 60kN$$

y de (i)

$$R_B = 70 - 60 + 20$$

$$\therefore R_B = 30kN$$

Aplicaremos el método de las secciones a cada tramo de la viga;  $A-B$ ,  $B-C$ ,  $C-D$  y  $D-E$  para determinar los valores de  $Q$  y de  $M$  para poder trazar sus respectivos diagramas.

2. Diagramas de fuerzas cortantes  $Q$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \text{ en:}$$

$$A - B; 0 \leq x < 0,5 \rightarrow 0 - Q_x = 0: \text{ Para } x = 0, Q_A = 0; \text{ para } x < 0,5, Q_B = 0$$

Estos valores de  $Q$  en tramo  $A-B$  representan una recta con pendiente cero y a lo largo del eje  $x$ .

$$B - C; 0,5 \leq x < 1,5 \rightarrow 30kN - Q_x = 0: \text{ Para } x = 0,5, Q_B = 30kN; \text{ para } x < 1,5, Q_C = 30kN$$

Los valores de  $Q$ , en el tramo  $B-C$  representan una recta con pendiente cero y paralela al eje  $x$  con  $y = 30kN$ .

$C - D$ ;  $1.5 \leq x < 3.5 \rightarrow 30kN - 70kN - Q_x$ : Para  $x = 1.5$ ,  $Q_C = -40kN$ ; para  $x < 3.5$ ;  $Q_D = -40kN$   
Estos valores indican una recta paralela abajo del eje neutro.

$D - E$ ;  $3.5 \leq x < 6 \rightarrow 30kN - 70kN + 60 - Q_x = 0$ : Para  $x = 3.5$ ,  $Q_D = 20kN$ ; para  $x < 6$ ,  
 $Q_E = 20kN$ , estos valores de  $D$  y  $E$  representan una recta paralela al eje neutro del eje  $x$ , la carga de  $20kN \downarrow$  en extremo  $E$  provoca que  $Q_E$  se reduzca a cero.

Con estos valores de  $Q$  para cada extremo de los tramos de esta viga, se traza el correspondiente *Diagrama de fuerzas cortantes*  $Q$  con sus correspondientes valores de las áreas bajo la gráfica de estas fuerzas, figura 4.1(b) y (c).

### 3. Diagramas de momentos flexionantes $M$

$\sum M = 0$ , en:

$A - B$ ;  $0 \leq x < 0.5 \rightarrow 0x - M_x = 0 \Rightarrow M_x = (0kN)x$  - Ecuación de una recta a lo largo del eje  $x$ .  
Resultado: para  $x = 0$ ;  $M_A = 0$ ; para  $x < 0.5$ ,  $M_x = 0$

$B - C$ ;  $0.5 \leq x < 1.5 \rightarrow 0x - 30kN \times (x - 0.5) - M_x = 0 \Rightarrow M_x = 30kN(x - 0.5)$ .  
ecuación que representa una recta: Para  $x = 0.5$ ,  $M_B = 0$ ; para  $x < 1.5$ ,  
 $M_x = 30kNm$ .

$C - D$ ;  $1.5 \leq x < 3.5 \rightarrow 0x - 30kN(x - 0.5) + 70kN(x - 1.5) - M_x = 0$ .  
 $\therefore M_x = 30kN(x - 0.5) - 70kN(x - 1.5)$ ;  
 $M_x = -40x + 90$ ; ecuación de una recta. Para  $x = 1.5$ ,  $M_C = 30kNm$ ; para  
 $x < 3.5$ ,  $M_D = -50kNm$ .

$D - E$ ;  $3.5 \leq x < 6$   
 $\rightarrow 0x - 30kN(x - 0.5) + 70kN(x - 1.5) - 60kN(x - 3.5) - M_x = 0$ ;  
 $\therefore M_x = 30kN(x - 0.5) - 70kN(x - 1.5) + 60kN(x - 3.5)$ ;  
 $M_x = 20x - 120$ ; ecuación de una recta.  
Para  $x = 3.5$ ,  $M_D = 20(3.5) - 120 = -50kNm$ ;  
y para  $x = 6$ ,  $M_E = 20(6) - 120 = 0kNm$ .

Por lo que con los resultados obtenidos de  $M$  para cada tramo de viga, se ha trazado el *Diagrama de momentos flexionantes* figura 4.1(d). Comparando los valores de  $M$  con la tabla de áreas bajo la gráfica de las fuerzas cortantes  $Q$  entre dos secciones transversales, contiguas figura 4.1(c) corresponden estas áreas a la variación en momentos flexionantes entre estas dos secciones contiguas.

Ejemplo 4.2.1.1.e.d. Una viga en voladizo (Cantilever) de  $2m$  de claro, con el soporte fijo (empotrado) a la derecha, esta sujeta a una carga uniformemente distribuida  $C.U.D. = 5 kN/m$  en toda la longitud

de la viga, como se muestra en la figura 4.2(a). Trazar los diagramas de fuerzas cortantes  $Q$  y de momentos flexionantes  $M$  considerando las secciones transversales en los puntos  $A, B, C, D$  y  $E$ , teniendo una separación de  $0.5m$  entre ellos.

*Solución:*

Datos:  $w = 5kN/m$  C.U.D,  $l = 2m$ ,  $A - B = B - C = C - D = D - E = 0.5m$

Determinar: Los valores de las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en las secciones  $A, B, C, D$  y  $E$ , para trazar sus diagramas respectivos.

Expresiones algebraicas necesarias:

$$\sum F_y = 0 \dots\dots(i); \quad \sum M_0 = 0 \dots\dots(ii);$$

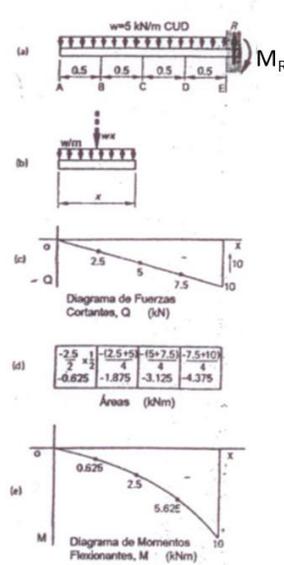


Figura 4.2.e.d.

1) Reacciones en el soporte fijo

de (i)  $\sum F_y = R - wl = 0 \Rightarrow R = 5kN/m \times 2m = 10kN$

de (ii)  $\sum M_E = w \times l \times \frac{1}{2} - M_R = 0 \Rightarrow M_R = \frac{5kN/m \times 2m}{2} = 10kNm$

2) Diagrama de fuerzas cortantes  $Q$

Aplicando el método de las secciones a cada tramo de la viga.

$+\uparrow \sum F_y = 0$ , en:

$$A - B; 0 \leq x < 0,5 \rightarrow -wx + Q_x = 0: \text{Para } x = 0, Q_A = 0; \text{ para } x < 0,5, \\ Q_B = (-5kN/m)(0,5m) = -2,5kN$$

$$B - C; 0,5 \leq x < 1 \rightarrow -wx + Q_x = 0: \text{Para } x = 0,5, Q_B = (-5kN/m) \times 0,5m = -2,5kN; \\ \text{para } x < 1, Q_C = (-5kN/m) \times 1m = 5kN.$$

$$C - D; 1 \leq x < 1,5 \rightarrow -wx + Q = 0: \text{Para } x = 1, Q_C = (-5kN/m) \times 1m = 5kN; \\ \text{para } x < 1,5; Q_D = (-5kN/m) \times 1,5m = 7,5kN$$

$$D - E; 1,5 \leq x < 2 \rightarrow -wx + Q = 0: \text{Para } x = 1,5, Q_D = (-5kN/m) \times 1,5m = 7,5kN; \\ \text{para } x < 2, Q_E = (-5kN/m) \times 2m = 10kN.$$

3) Diagrama de momentos flexionantes,  $M$

De la condición general de la carga a que ésta sujeta esta viga. Figura 4.2(b), tomando momentos respecto a una sección X-Xa una distancia  $x$ , se tiene:

$$\text{Momento flexionante } M = wx \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}wx^2 \dots \dots \dots (a)$$

Aplicando esta ecuación a cada una de las secciones con  $w = -5kN/m$ :

$$\text{En la sección } A, x = 0 \rightarrow M_A = 0$$

$$B, x = 0,5 \rightarrow M_B = -5kN/m \times \frac{1}{2}(0,5m)^2 = 0,625kNm$$

$$C, x = 1 \rightarrow M_C = -5kN/m \times \frac{1}{2}(1m)^2 = 2,5kNm$$

$$D, x = 1,5 \rightarrow M_D = -5kN/m \times \frac{1}{2}(1,5m)^2 = -5,625kNm$$

$$E, x = 2 \rightarrow M_E = -\frac{5kN}{m} \times \frac{1}{2}(2m)^2 = -10kNm$$

El diagrama de momentos flexionantes  $M$  se traza con estos valores de los momentos de estas secciones, figura 4.2 (e), que de acuerdo a la sección (a) la gráfica de estos diagramas es una parábola. Comprobando que la variación o cambio en un momento flexionante entre cualquiera de dos secciones contiguas es igual a el área bajo la gráfica de diagramas de fuerzas cortantes  $Q$  de estas dos secciones.

Ejemplo 4.3.e.d. Para una viga simplemente soportada  $ABCD$  de  $4m$  de longitud, con el extremo izquierdo  $AB$  volado y soportes en  $B$  y  $D$ , estando sujeta a dos cargas puntuales de  $30kN$  y  $40kN$  en  $A$  y  $C$ , respectivamente y a una carga uniformemente distribuida,  $C.U.D$ ,  $50kN/m$  en tramo derecho  $CD$  de  $1,5m$ ,  $AB=1m$  y  $BD=3m$ . figura 4.3 (a), realice los diagramas de fuerzas cortantes  $Q$  y de momentos flexionantes  $M$  de esta viga.

Solución:

$$\text{Datos: } l = 4m, AB = 1, BC = 1,5m, CD = 1,5m, F_A = 30kN, F_C = 40kN, \\ w = 50kN/m = C.U.D. \text{ en tramo } CD$$

Determinar:  $R_B$  y  $R_D$  y realizar diagrama de fuerzas cortantes  $Q$  y momentos flexionantes  $M$ .

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$\sum F_y = 0 \dots\dots(i); \quad \sum M_0 = 0 \dots\dots(ii);$$

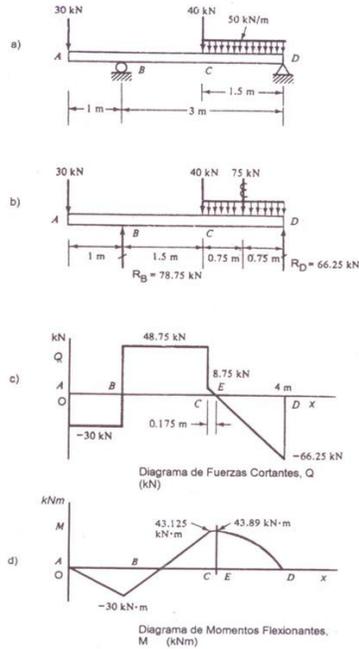


Figura 4.3.e.d.

1). Reacciones en el soporte B y D

De la dcl figura 4.3 (b). De las ecuaciones(i) y (ii)

$$\uparrow \sum F_y = 30kN + R_B - 40kN - 75kN + R_D = 0$$

$$\therefore R_B + R_D = 145kN \dots \dots \dots (1)$$

$$y \uparrow \sum M_B = 30kN(1m) - 40kN(1.5) - 75kN(2.25m) + R_D kN(3) = 0$$

$$\therefore R_D = 66.25kN \dots \dots \dots (2)$$

Por lo que de (1):  
 $R_B = 78.75kN$

Aplicando el método de las secciones en los tramos A-B, B-C, C-D para obtener los valores de Q y M en las secciones A, B, C, y D

2). Diagrama de fuerzas cortantes  $Q$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \text{ en:}$$

$$A - B; 0 < x < 1 \rightarrow -30kN - Q_x = 0 \Rightarrow Q_x = -30kN: \text{ Para } x = 0, Q_A = -30kN; \\ \text{para } x = 1; Q_B = -30kN$$

$$B - C; 1 < x < 2.5 \rightarrow -30kN + R_B = Q_x = 0 \Rightarrow: Q_x = -30kN + 78.75kN \\ \text{para } x = 1, Q_B = 48.75kN; \text{ para } x = 2.5, Q_C = 48.75kN.$$

$$.C - D; 2.5 < x < 4 \rightarrow -30kN + 78.75kN - 40kN - 50kN/m \times (x - 2.5) - Q_x = 0: \\ \therefore Q_x = +8.75kN - 50kN/m \times (x - 2.50): \text{ para } x = 2.5; \\ Q'_C = +8.75kN; \text{ para } x = 4; Q_D = -66.25kN \text{ y } Q'_D = 0, \text{ y es que la} \\ \text{reacción en } D \text{ es } +66.25kN$$

Con los valores de  $Q$  para las secciones en los puntos  $A, B, C$  y  $D$  se ha trazado el *Diagrama de fuerzas cortantes*, figura 4.3 (c) en la que se observa que entre la sección  $C$  y  $D$  las fuerzas de corte al pasar de  $Q = 8.75kN - 66.25kN$  pasar por el valor de  $0kN$  cortando al eje  $ox$  del diagrama del punto  $E$ ; por lo que para determinar la localización de este punto  $E$  donde la fuerza de corte es cero, tenemos:

$$Q(\text{de } C \text{ a } E) = 8.75 - 50x' = 0 \Rightarrow x' = \frac{8.75}{50} = 0.175m$$

3). Diagrama de momentos flexionantes,  $M$

Teniendo ahora en consideración que el área bajo el diagrama de fuerzas cortantes  $Q$  entre las secciones transversales, su valor es igual al cambio (variación) en momento flexionante de acuerdo con la expresión:

$$(M_2 - M_1) = \int_1^2 Q dx$$

Calcularemos los siguientes valores para los momentos flexionantes  $M$ .

$$M_A = 0$$

$$\Delta M_{A \rightarrow B} = (-30kN)(1m) = -30kNm \Rightarrow M_B = -30kNm$$

$$\Delta M_{B \rightarrow C} = (+8.75kN)(1.5m) = 73.125kNm \Rightarrow M_C = (-30 + 73.125)kNm$$

$$\Delta M_{C \rightarrow E} = \frac{(8.75kN)(0.175m)}{2} = 0.766kNm \Rightarrow M_E = (43.125 + 0.766)kN = 43.89kNm$$

$$\Delta M_{E \rightarrow D} = \frac{[(-66.25kN)(1.5 - 0.175)m]}{2} = 43.89kNm \Rightarrow M_D = 43.89kNm - 43.89kNm = 0$$

Con estos valores se traza el diagrama de momentos flexionantes figura 4.3 (d).  
 Ejemplo 4.4.e.d. Calcular el esfuerzo máximo en una porción de una tira o franja rectangular de acero de 25mm de ancho y 3mm de espesor, cuando esta es doblada alrededor de un tambor de diámetro 2.4m. Tomar  $E = 206 \text{ GN/m}^2$ .

Solución:

Datos:  $a = 25\text{mm}$ ,  $e = 3\text{mm}$ ,  $D_{\text{tambor}} = 2.4\text{m}$ ,  $E = 206 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

Calcular:  $\sigma_{\text{máx}} = ?$

Modelos matemáticos principales a utilizar:  $\frac{\sigma_{\text{máx}}}{y_{\text{máx}}} = \frac{M_{\text{máx}}}{I} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (a)$

De acuerdo a la expresión (a) y los datos del enunciado de este ejemplo, tenemos:

$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{y_{\text{máx}}} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (a')$  en la que:

Como la sección de la tira es simétrica respecto al eje neutro, el radio de curvatura de la superficie o capa de fibras llamada neutral cuando la tira es flexionada será  $R = 1.2\text{m} + 0.0015\text{m} = 1.2015\text{m}$

$y_{\text{máx}} = \frac{e}{2} = \frac{0.003\text{m}}{2} = 0.0015\text{m}$ , ver figura 4.4.

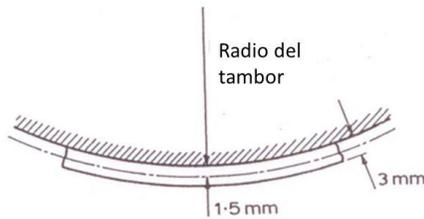


Figura 4.4.e.d.

$$\text{Por lo tanto da (a) } \sigma_{\text{máx}} = \frac{E y_{\text{máx}}}{R} = \frac{206 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{1.2015\text{m}} \times (1.5 \times 10^{-2} \text{m})$$

$$= 257 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

El valor de  $\sigma_{\text{máx}}$ , es de compresión para la superficie interior de la tira que es igual al de tracción en la superficie exterior de la tira.

Ejemplo 4.5.e.d. Una viga con sección (perfil) I idealizada, teniendo dimensiones totales 150mm x 250mm de peralte (altura) con patines y alma de 13mm de espesor. Determine el momento de resistencia  $M$  de esta sección, si el esfuerzo máximo permisible para el material de la viga es  $77 \text{ MN/m}^2$ .

Solución:

Datos:  $B = 150\text{mm} = 0.15\text{m}$ ,  $D = 250\text{mm} = 0.25\text{m}$ ,  $e_p = e_a = 13\text{mm}$ ,  
 $\sigma_{\text{máx}} = 77\text{MN/m}^2 = 77 \times 10^6\text{N/m}^2$

Determinar:  $M$  (Momento de resistencia)

Modelos matemáticos principales a utilizar:

$$I = \frac{1}{12} (BD^3 - bd^3) \dots \dots \dots (i)$$

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{y_{\text{máx}}} = \frac{M}{I} = \frac{E}{R} \dots \dots \dots (ii)$$

De la expresión (i) con los datos:

$$B = 0.15\text{m}, D = 0.25\text{m} \text{ y } e_p = e_a = 13\text{mm}$$

Obtenemos:

$$b = 0.15\text{m} - 0.013\text{m} = 0.137\text{m} \text{ y } d = 0.250\text{m} - 2(0.013\text{m}) = 0.224\text{m}$$

Por lo que sustituyendo valores en (i)

$$I = \left( \frac{0.15\text{m} \times (0.25\text{m})^3}{12} \right) - \left( \frac{0.137\text{m} \times (0.224\text{m})^3}{12} \right)$$

$$= 67 \times 10^6\text{m}^4$$

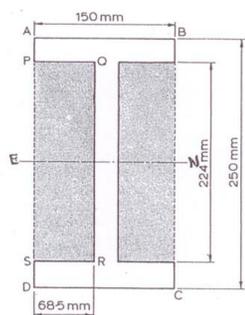


Figura 4.5.e.d.

De la expresión(ii) con  $y_{\text{máx}} = 125\text{mm} = 0.125\text{m}$  (del eje neutro  $E.N.$  al extremo superior o inferior de la sección transversal por ser esta simétrica con respecto a  $E.N.$ ); tenemos:

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}} \times I}{y_{\text{máx}}}$$

$$= \frac{(77 \times 10^6 \text{ N/m}^2) \times (67 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.125 \text{ m}}$$

$$= 4.127 \times 10^4 \text{ Nm} = 41.3 \text{ kNm}$$

Ejemplo 4.6.e.d. Calcular el momento de resistencia para la viga del ejemplo demostrativo 4.5.e.d., si la sección idealizada, se utiliza de forma que el eje neutro, *E.N.*, es paralelo a el alma, figura 4.6.e.d.

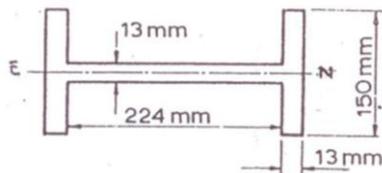


Figura 4.6.e.d.

*Solución:*

El valor de *I* con respecto a *EN* se puede obtener sumando los valores de los dos patines (cada uno de 13mm de ancho *b<sub>p</sub>* y peralte *d<sub>p</sub>*=150mm) al de la alma (ancho *b<sub>a</sub>*=224mm y 13mm de altura *d<sub>a</sub>*) realizándolo con la expresión;  $bd^3/12 = I$  para los dos patines y el alma de esta sección.

$$I = I_{EN} = (2 \times I \text{ para un patin respecto a EN}) + (I \text{ para el alma respecto a EN})$$

$$= \frac{2 \times 0.013 \text{ m} \times (0.15 \text{ m})^3}{12} + \frac{0.224 \text{ m} \times (0.013 \text{ m})^3}{12}$$

$$= 7.3125 \times 10^{-6} + 0.0410 \times 10^{-6} = 7.3535 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I = 7.35 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Como el valor máximo de *y* es  $150/2 = 75 \text{ mm}$  por lo que de la expresión para el momento de resistencia *M*, de la ecuación de la flexión simple en función de:  $\sigma_{m\acute{a}x} = 77 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ , de  $y_{m\acute{a}x} = 75 \times 10^{-3} \text{ m}$  y de  $I = 7.35 \times 10^{-6} \text{ m}^4$  que es:

$$M = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{y_{m\acute{a}x}} I = \frac{(77 \times 10^6 \text{ N/m}^2) \times (7.35 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{75 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

$$= 7.546 \text{ kNm}$$

Este último resultado para *I*, es mucho más pequeño que el que se obtuvo con el eje neutro paralelo a los patines. Aproximadamente 8.9 veces más pequeño. En la práctica de ingeniería las secciones estructurales I universal y T se emplean en vigas en forma muy extensiva ya que son diseñadas para tener un valor grande de *I* con respecto a un eje y deberán colocarse para que la flexión tome lugar respecto a este eje.

Ejemplo 4.7.e.d. Una ménsula de hierro fundido sometida a la flexión, tiene una sección transversal de forma doble T con patines de anchura desigual, la altura total (peralte) de esta sección es 280 mm., con espesor del alma y los patines de 40 mm. El patín superior es de 200 mm de ancho y el inferior de 120 mm. a) calcular la posición del eje neutro centroide (de la sección EN y el momento segundo de área de la sección respecto a este eje,  $I_{EN}$  y b) Determinar el momento flexionante máximo que sería aplicado sobre esta sección, si el esfuerzo de tracción en el patín superior no excede de  $16MN/m^2$  y por consiguiente, ¿Cuál es el valor del esfuerzo de compresión en el patín inferior de esta sección?

Solución:

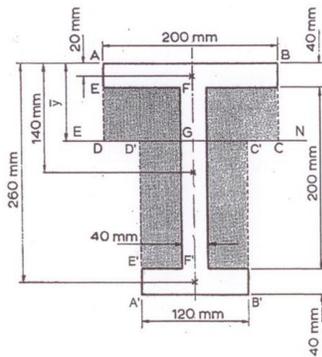


Figura 4.7.e.d.

a). Para determinar la posición del eje neutro, es necesario encontrar la coordenada  $\bar{y}$  vertical del centroide de la sección tomada desde la arista AB; y como la sección consiste de tres áreas rectangulares:  $A_1$ , patín superior;  $A_2$ , alma;  $A_3$ , patín inferior, figura 4.7.e.d. El valor se determina usando la expresión de equilibrio del momento primero de la sección, con los momentos primeros de sus áreas componentes;  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , respecto a la arista AB:

$$\bar{y}A_T = \sum_{i=1}^3 y_i A_i \dots \dots (a)$$

Por lo tanto con los datos de la figura y la expresión (a)

$$\begin{aligned} \bar{y} \times (A_T) &= y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 \\ &= 20mm \times (200mm \times 40mm) + 140mm \times (40mm \times 200mm) + \\ &\quad + 260mm \times (120mm \times 40mm) \\ &= 2.528 \times 10^6 mm^3 \\ \therefore \bar{y} &= \frac{2.528 \times 10^6 mm^3}{(200mm \times 40mm) + (40mm \times 200mm) + (120mm \times 40mm)} \\ &= 121.5mm \end{aligned}$$

Así, el eje neutro de la sección esta a 121.5mm abajo de la arista superior AB.

El valor de  $I_{EN}$  momento segundo de área de la sección respecto al eje centroidal EN., se puede obtener de dos maneras diferentes:

*Procedimiento A.* Considerando los rectángulos y las remociones rectangulares, cada una teniendo un extremo (arista) coincidiendo con el eje neutro  $EN$  como se muestra en la figura 4.7.e.d. (en cada caso la expresión  $bd^3/3$  es aplicable, tema 4.6.1.

Para la parte de la sección arriba de *EN*.

$$\begin{aligned}
 I &= (I \text{ para el rectángulo } ABCD \text{ respecto a } E.N) - \\
 &\quad -(2 \times I \text{ para rectángulo } DEFG \text{ respecto a } EN) \\
 &= \frac{200\text{mm} \times (121.5\text{mm})^3}{3} - 2 \times \frac{80\text{mm} \times (81.5\text{mm})^3}{3} \\
 &= 90.8 \times 10^6 \text{mm}^4
 \end{aligned}$$

en forma similar, para la parte de la sección debajo de *EN*.

$$\begin{aligned}
 I &= (I \text{ para el rectángulo } A'B'C'D' \text{ respecto a } EN) - \\
 &\quad -(2 \times I \text{ para rectángulo } D'E'F'G' \text{ respecto a } EN) \\
 &= \frac{120\text{mm} \times [(280 - 121.5)\text{mm}]^3}{3} - 2 \times \frac{40\text{mm} \times [(240 - 121.5)\text{mm}]^3}{3} \\
 &= 114.8 \times 10^6 \text{mm}^4
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el momento segundo de área para la sección es:

$$\begin{aligned}
 I_{EN} &= (90.8 + 114.8) \times 10^6 \text{mm}^4 \\
 &= 205.6 \times 10^6 \text{mm}^4 = 205.6 \times 10^{-6} \text{m}^4
 \end{aligned}$$

*Procedimiento B.* En este caso el valor de *I* es calculado para cada patín y alma respecto a su propio eje neutro (*EN*) y los resultados se ajustan por el *teorema de transferencia del eje paralelo* (tema 4.6.1) de modo que ellos se aplican respecto al eje neutro total centroidal de la sección *EN*. esta vez usaremos unidades de  $10^{-6} \times \text{m}^4$ :

$$I_1 \text{ para el patín superior respecto a su propio } EN \quad 10^{-6} \text{m}^4$$

$$I_1 = 0.2\text{m} \times (0.04\text{m})^3 / 12 \quad = 1.07$$

Ajuste para  $I_1$  debido a la transferencia al *EN* total

$$A_1 K_1^2 = (0.2\text{m} \times 0.04\text{m}) \times (0.1215\text{m} - 0.02\text{m})^2 \quad = 82.42$$

$I_2$  para el alma respecto a su propio *EN*.

$$I_2 = 0.4\text{m} \times (0.2\text{m})^3 / 12 \quad = 26.67$$

Ajuste para  $I_2$  debido a la transferencia al *EN* total

$$A_2 K_2^2 = (0.04\text{m} \times 0.2\text{m}) \times (0.14\text{m} - 0.1215\text{m})^2 \quad = 2.74$$

$I_3$  para el patín inferior respecto a su propio *EN*

$$I_1 = 0.2\text{m} \times (0.04\text{m})^3 / 12 \quad = 1.07$$

Ajuste para  $I_3$  debido a la transferencia al *EN* total

$$A_3 K_3^2 = (0.12\text{m} \times 0.04\text{m}) \times (0.26 - 0.1215\text{m})^2 \quad = \underline{42.07}$$

$$I_{Total} = I_{EN} = 205.6 \times 10^{-6} m^4$$

b) El momento máximo flexionante  $M$  para un esfuerzo de tracción dado se obtiene de la expresión general de la flexión simple

$$\frac{\sigma_t}{y_{m\acute{a}x}} = \frac{M}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_t}{y_{m\acute{a}x}} I \dots \dots (b)$$

En la ecuación (b): la distancia del  $EN$  a la arista de mayor esfuerzo de tracción es  $y_{m\acute{a}x} = 121.5mm$  y con  $I_{EN} = 205.6 \times 10^{-6} m^4$  y  $\sigma_t = 16 \times 10^6 N/m^2$ , sustituyendo valores se tiene:

$$M = \frac{(16 \times 10^6 N/m^2) \times (205.6 \times 10^{-6} m^4)}{(121.5 \times 10^{-3} m)}$$

$$= 27.08 \times 10^3 Nm$$

además, como la distancia del  $EN$  a la arista inferior de la sección es  $(280mm - 121.5mm) = 158.5mm$  puesto que el esfuerzo en cualquier parte de la sección es proporcional a la distancia de este punto al eje neutro  $EN$ , se tiene:

$$\frac{\text{Esfuerzo en la arista inferior}}{150.5mm} = \frac{\text{Esfuerzo en la arista superior}}{121.5mm}$$

de aquí el esfuerzo máximo de compresión en el patín inferior es:

$$\sigma_c = \frac{158.5mm}{121.5mm} 16 \times 10^6 N/m^2$$

$$= 20.9 \times 10^6 N/m^2 = 20.9 MN/m^2$$

Ejemplo 4.8.e.d. El esfuerzo de tracción máximo en una viga Universal I esta limitado a  $80N/mm^2$ , cuando el momento flexionante es  $30KNm$ . De la tabla 4.1, seleccione el tamaño apropiado de la viga, ignorando al efecto de la masa propia de la viga y admitiendo que el eje  $XX$  es el plano neutral. ¿Cuál será el esfuerzo real de la viga elegida?

*Solución:*

Datos:  $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{80N}{mm^2}$ ,  $M = 30KNm$

Determinar: en base al perfil universal seccionado, el esfuerzo  $\sigma$  de trabajo

Modelo matemático principal a utilizar:  $Z = \frac{M}{\sigma_{m\acute{a}x}} \dots \dots (a)$

de (a):  $M = 30KN = 30 \times 10^3 Nm$  y  $\sigma_{m\acute{a}x} = 80N/mm^2 = 80 \times 10^6 N/m^2$

Sustituyendo en (a)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{30 \times 10^3 Nm}{80 \times 10^6 N/m^2} \\ &= 0.375 \times 10^{-3} m^3 \\ &= 0.375 \times 10^3 cm^3 \end{aligned}$$

En la tabla 4.1.,  $Z = 0.375 \times 10^3 cm^3$  se encuentra entre los valores de  $Z_{XX} = 225.7 cm^3$  y  $415 cm^3$ . Si el valor más pequeño es aplicado a la expresión del esfuerzo máximo de (a) tendremos:

$$\begin{aligned} \sigma_{m\acute{a}x} &= \frac{M}{Z_{XX}} \\ &= \frac{30 \times 10^3 Nm}{225.7 \times 10^{-6} m^3} \end{aligned}$$

$$= 132.9 \times 10^6 N/m^2 \text{ o } 132.9 N/mm^2 \gg 80 N/mm^2$$

Por consiguiente el perfil de viga para  $Z_{XX} = 415 cm^3$  será seccionado con medida de  $312.7 mm$  de peralte y  $102.4 mm$  de ancho.

$$\begin{aligned} \text{Esfuerzo real en la viga seleccionada } \sigma &= \frac{M}{Z_{XX}} \\ &= \frac{30 \times 10^3 Nm}{415 \times 10^{-6} m^3} \end{aligned}$$

$$= 72 \times 10^6 N/m^2 \text{ o } 72 N/mm^2 < 80 N/mm^2$$

Por consiguiente el esfuerzo de la viga seleccionada es  $72 N/mm^2$

Ejemplo 4.9.e.d. Una viga en voladizo (cantilever) de 2 metros de longitud con una carga de  $10 kN$  en su extremo libre. Seleccionar una viga de sección  $T$  apropiada, indicando la posición del patín al limitar el esfuerzo de tracción del material de la viga a  $57 MN/m^2$ . Tomar en cuenta la masa de la viga.

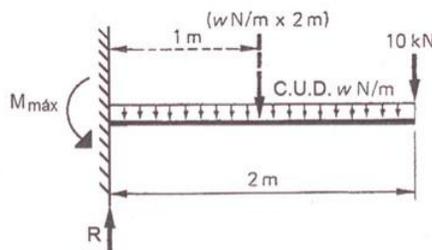
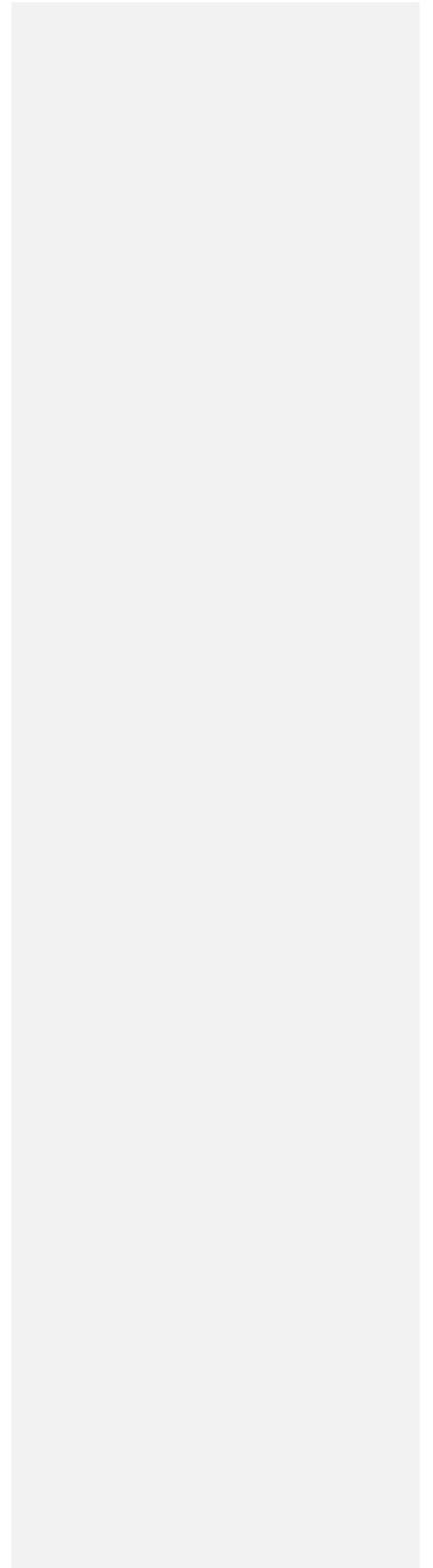


Figura 4.9.e.d.



*Solución:*

La viga cargada es mostrada en la figura 4.9.e.d. Admitiendo que la viga tiene un peso  $w$  N/m.

Esto es  $w = (\text{masa por metro}) \times g$

Refiriéndonos a la figura 4.9.e.d., el momento flexionante máximo ocurrirá en el soporte

$$\begin{aligned}\therefore M_{\text{máx}} &= -10kN \times 2m - \left(\frac{wN}{m} \times 2m\right) \times 1m \\ &= -20 \times 10^3 Nm - 2w Nm\end{aligned}$$

El signo menos (-) indica que el esfuerzo de flexión en tracción máximo se tiene en las fibras superiores de la sección transversal de la viga y para los cálculos restantes pueden ser ignoradas; es decir, la viga deberá cargarse con el patín en la parte inferior.

Puesto que la masa de la viga es desconocida, es necesario primero calcular  $Z$  considerando el momento debido solamente a la carga de  $10kN$  (esto es,  $M = 20kNm = 20 \times 10^3 Nm$ )

y de la expresión  $Z = \frac{M}{\sigma_{\text{máx}}}$

con  $\sigma_{\text{máx}} = 57MN/m^2 = 57 \times 10^6 N/m^2$  y  $M = 20 \times 10^3 Nm$ ; tenemos:

$$Z = \frac{20 \times 10^3 Nm}{57 \times 10^6 N/m^2}$$

$$= 0.351 \times 10^{-3} m^3 \quad \text{o} \quad Z = 351 cm^3$$

De la tabla 4.2, el valor más cercano al inmediato más grande de  $Z$  es  $359.5 cm^3$  él que tiene una masa por metro de  $63kg$ ;

$$\begin{aligned}\therefore \text{Momento flexionante máximo} &= 20 \times 10^3 Nm + 2 \times 63kg/m \times 9.81m/s^2 \times 1m \\ &= 21.236 \times 10^3 N\end{aligned}$$

Verificando si el esfuerzo de flexión máximo ha sido sobrepasado.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{Z}$$

$$= \frac{21.236 \times 10^3 Nm}{359.5 \times 10^{-6} m^3}$$

$$= 59.1 \times 10^6 N/m^2, \text{ resultando mayor a } [\sigma] = 57 \times 10^6 N/m^2$$

Por lo que repitiendo el procedimiento anterior para una viga con  $Z = 369.5\text{cm}^3$  y una masa por metro de  $90\text{kg/m}$ .

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{Z} = \frac{20 \times 10^3 \text{Nm} + 2 \times 90 \text{kg/m} \times 9.81 \text{m/s}^2 \times 1 \text{m}}{369.5 \times 10^{-6} \text{m}^3} = 58.9 \times 10^6$$

Este esfuerzo es aún también mayor a  $[\sigma]$ ; por lo que probamos con una viga con sección donde  $Z = 551.3\text{cm}^3$  teniendo una masa de  $87\text{kg/m}$

Comentario [A4]:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{Z} = \frac{20 \times 10^3 \text{Nm} + 2 \times 87 \text{kg/m} \times 9.81 \text{Nm}}{551.3 \times 10^{-6} \text{m}^3} = 58.9 \times 10^6$$

$$= \frac{21.71 \times 10^3 \text{Nm}}{551.3 \times 10^{-6} \text{m}^3}$$

$$= 39.4 \times 10^6 \text{N/m}^2 < [\sigma] = 57 \times 10^6 \text{N/m}^2$$

Este esfuerzo esta dentro del limite permisible.

Por lo tanto la viga seleccionada es de sección  $266.7\text{mm}$  de ancho  $\times$   $305\text{mm}$  peralte se instala con el patín en la posición inferior.

Ejemplo 4.10.e.d. Una viga Icon montante de canal (gantry girder),  $618\text{mm}$  de peralte  $\times$   $305\text{mm}$  de ancho, se utiliza como una viga simplemente soportada en un claro de 8 metros, y esta sosteniendo una carga uniformemente distribuida, *C. U. D.* Si el esfuerzo de tracción máximo en el material de la viga está limitado a  $163\text{N/mm}^2$ , y tomando en cuenta la masa propia de la viga, determine la magnitud de la carga uniformemente distribuida desconocida. ¿Cuál será el esfuerzo de compresión máximo en la sección?

Solución:

De la tabla 4.3, Para una viga *I* con montante de canal  $618\text{mm} \times 305\text{mm}$

$$\text{Masa por metro} = 155 \text{kg/m} \quad y_1 = 23.53 \text{cm} = 0.235$$

$$I_{xx} = 120871 \text{cm}^4 = 120871 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

y

$$Z_{xx} = 3163 \text{cm}^3 = 3163 \times 10^{-6} \text{m}^3 \dots \dots \dots (i)$$

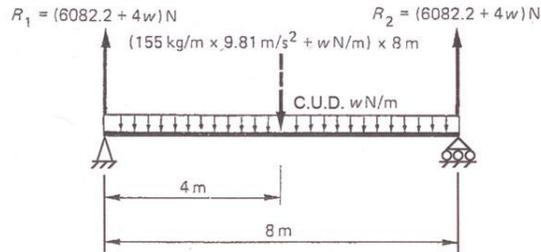


Figura 4.10.e.d.

Delc/ de la figura 4.10.e.d., siendo  $w \text{ N/m}$  = carga uniformemente distribuida desconocida-

$$R_1 = R_2 = \frac{(155 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 + w) \times 8 \text{ m}}{2}$$

$$= (6082.2 + 4w) \text{ N}$$

El momento flexionante máximo estará a la mitad del claro.

Esto es,  $M_{\text{máx}}$  = momentos a la izquierda de la mitad del claro

$$= (6082.2 + 4w) \text{ N} \times 4 \text{ m} - (155 \times 9.81 + w) \text{ N/m} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$$

$$= (12164.4 + 8w) \text{ Nm}$$

Como la viga se flexiona de forma cóncava el esfuerzo de tracción máximo estará en el patín inferior de la sección.

de la expresión  $\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{Z} \Rightarrow M_{\text{máx}} = Z \sigma_{\text{máx}} \dots \dots \dots (a)$

Se sustituyen los valores de (i), (ii) y  $\sigma_{\text{máx}} = 163 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  en (a)

Se tiene:  $12164.4 + 8w = 3163 \times 10^{-6} \times 163 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

$$8w = 515567 \text{ Nm} - 12164 \text{ N/m}^2$$

$w = 62.92 \times 10^3 \text{ N/m} = \text{C.U.D. desconocida.}$

El esfuerzo de compresión máximo ocurre en patín superior y de la tabla 4.3 se tiene un valor de  $y_1 = 23.53 \text{ cm} = 0.2353 \text{ m}$

Por lo tanto de  $\sigma_c = \frac{M y_1}{I_{XX}} = \frac{(12164.4 + 8 \times 62.92 \times 10^3) \text{ Nm} \times 0.2353 \text{ m}}{120871 \times 10^{-8} \text{ m}^4}$

$$\sigma_{c, \text{máx}} = 100.4 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 100.4 \text{ N/mm}^2$$

es decir, el esfuerzo de compresión máximo es  $100.4 \text{ N/mm}^2$

### **Ejercicios de Trabajo**

- 4.1.e.t. Una viga  $A, B, C, D, E$ , de  $4.5m$  de longitud, esta simplemente soportada en  $A$  y  $D$ . Si la viga soporta cargas puntuales de  $20kN$  y  $15kN$  en  $B$  y  $E$  respectivamente, y una carga uniformemente distribuida de  $8kN/m$  entre  $A$  y  $C$ , si  $AB = 0.5m$ , y  $BC = 1.5m$ , determine los momentos de flexión (pandeo) en  $A, B, C, D$ , y  $E$ ; trazando el diagrama de momentos flexionantes respectivo.
- 4.2.e.t. Una viga empotrada en un extremo y libre en otro de  $2.2m$  de longitud, de sección transversal rectangular de  $30mm$  de ancho y  $80mm$  de altura, soporta una carga puntual de  $8kN$  en su extremo libre, determinar el esfuerzo máximo de flexión de la sección de la viga a  $0.4m$  del empotramiento.
- 4.3.e.t. Una placa angosta en forma de cinta o solera, de  $4mm$  de espesor, se enrolla sobre un tambor de diámetro de  $1.6m$ . Si el módulo de elasticidad para el acero es de  $200GN/m^2$ , determine el esfuerzo de flexión del material de la solera.
- 4.4.e.t. Una viga simplemente soportada de  $3m$  de longitud, esta sujeta a una carga puntual de  $30kN$  en la mitad del claro. Si la viga es de sección transversal rectangular con una altura o peralte igual a dos veces su ancho, determine las dimensiones apropiadas de la sección transversal para un esfuerzo de flexión límite a la mitad del claro de  $80kN/m^2$ .
- 4.5.e.t. La sección transversal de una viga idealizada de  $120mm$  de ancho del patín por  $240mm$  de peralte. Si el alma y el patín son ambos de  $25mm$  de espesor, determine el momento segundo de área de esta sección. Si el esfuerzo flexionante máximo esta limitado para  $100kN/m^2$ , determine la carga máxima que la sección transversal puede soportar a la mitad del claro considerando una viga simplemente soportada de  $2.5m$  de longitud entre sus soportes (apoyos).
- 4.6.e.t. En una viga I idealizada de  $150mm$  de ancho de patín por  $300mm$  de peralte, el espesor de los patines es de  $25mm$  y el alma de  $20mm$ , de espesor. Determine las dimensiones de la sección transversal "rectangular" de una viga hecha del mismo material, con una altura igual a dos veces el ancho de sección rectangular de la viga, la cual soporta el mismo momento flexionante máximo y el esfuerzo de flexión. Compruebe las masas de las dos vigas.
- 4.7.e.t. Al calcular del momento de resistencia interna de una sección transversal de una viga en equilibrio de forma I idealizada tomando  $150mm$  de ancho de patín y un peralte de  $250mm$  con un espesor del patín y de la alma vertical de  $13mm$ , para un esfuerzo de flexión máximo de  $77MN/m^2$ . Encontrar también el momento de una resistencia interna para la misma sección trabajada de tal forma que el eje neutro es paralelo al eje del alma de la viga.
- 4.8.e.t. Una viga de sección transversal en forma de T, con el eje de carga estando a lo largo de eje de la pierna vertical, simplemente soportada, con  $150mm$  de ancho de la barra transversal horizontal y con un espesor de  $15mm$ , teniendo la pierna vertical, una altura de  $180mm$  y un espesor de  $15mm$ . Calcular la posición del eje neutro respecto a la parte superior de la barra transversal.

4.9.e.t. Una barra circular de acero se usa como viga en voladizo (empotrada en un extremo y libre en el otro), soportando una fuerza transversal de  $20\text{ kN}$  en un punto a  $1.5\text{ m}$  del soporte de empotramiento. Calcular, aproximando a  $\text{mm}$  el diámetro de la barra requerida para un esfuerzo máximo flexionante como límite en el material de  $170\text{ MN/m}^2$ .

4.10.e.t. En un punto de una viga con un módulo de sección de  $0.1 \times 10^{-3}\text{ m}^3$ , el momento flexionante es de  $12.5\text{ kNm}$ . Cuál es el esfuerzo flexionante a que está sujeta esta viga simplemente soportada.

- 4.11.e.t. El esfuerzo flexionante máximo y el momento flexionante máximo en una viga simplemente soportada no debe pasar de  $120MN/m^2$  y  $30kNm$  respectivamente. Calcular el módulo de sección. Si  $y_{máx}$  para la selección transversal es de  $160mm$ , determinar el momento segundo del área.
- 4.12.e.t. Una viga  $6m$  de largo, de sección perfil T;  $150mm$  de peralte  $\times$   $125mm$  ancho de patín, con  $25mm$  de espesor en alma y patín; esta simplemente soportada (con el patín en la parte superior) en el extremo izquierdo y en un punto a  $1.5m$  del extremo derecho, llevando una carga uniformemente distribuida de  $8kN/m$  en toda su longitud. Determinar donde ocurren los esfuerzos máximos de tracción y compresión y su valor respectivo. Si se conocen la coordenada vertical del centroide de la sección con respecto a la arista superior del patín,  $\bar{y} = 50mm$  el momento segundo de área centroidal  $I_{XX} = \frac{100 \times 25^4}{3} mm^4$ .

**“Los siguientes ejercicios pueden resolverse con la ayuda de los extractos de las tablas de propiedades geométricas de las vigas (tabla 4.1, 4.2 y 4.3)”**

- 4.13.e.t. Una viga universal Ide  $254mm$  de peralte por  $101.6mm$  de ancho del patín se usa como una viga simplemente soportada con un claro de  $4m$ , si el esfuerzo flexionante a la mitad del claro es restringido a  $130N/mm^2$ , cuál es la carga máxima que se puede aplicar a la viga en este punto.
- 4.14.e.t. Una viga I con un montante o caballete de canal. (Gantry girder) de  $550mm$  de peralte por  $305mm$  de ancho del montante, esta simplemente soportada sobre un claro de  $18m$ , soportando una masa uniformemente distribuida de  $300kg/m$  de longitud conjuntamente con cargas puntuales de  $20kN$  y  $30kN$  a  $5m$  y  $12m$  respectivamente desde uno de los soportes. Calcular el momento flexionante o de pandeo en cada punto donde están aplicadas las cargas puntuales a la mitad del claro, tomar en cuenta la masa propia de la misma viga.
- Asumiendo que el momento de pandeo máximo ocurre en uno de estos puntos, calcular el esfuerzo de flexión o pandeo máximo a la compresión y a la tracción en el material de esta viga.
- 4.15.e.t. Una viga universal I;  $A, B, C, D$ ; esta simplemente soportada en  $B$  y  $D$  y soporta unas cargas puntuales de  $45kN$  en  $A$  y  $60kN$  en  $C$ . Si  $AB = 1m$ ,  $BC = 3m$  y  $CD = 2m$ , calcular los momentos flexionantes en  $A, B, C, D$ . Considerando que el momento flexionante máximo ocurre en uno de estos puntos, seleccionar de la tabla 4.1 el tamaño mínimo de la viga I, la cual soporta el esfuerzo máximo en el material de la viga de  $120N/mm^2$ . Despreciar la masa propia de la viga.
- 4.16.e.t. Una viga estructural de sección transversal en forma de “T” se utiliza como una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, de  $3m$  de longitud, con el patín o barra transversal en la parte alta. Si el esfuerzo de pandeo máximo a la tracción en el material de la viga en el soporte empotrado esta limitado a  $80N/mm^2$ , cuando la carga que esta actuando hacia abajo en el extremo libre, es de  $4.5kN$ , seleccionar el tamaño mínimo de la viga. Tomando en cuenta la masa propia de la viga. ¿Cuál será el esfuerzo de flexión máximo a la compresión en el material de la viga?

## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE TRABAJO

- 1.1. Sección  $M - M$ :  $Q = 0$   
 $M = 0$   
 Sección  $N - N$ :  $Q = -500N$   
 $M = -750Nm$
- 1.2. Sección  $M - M$ :  $F = 7.5kN, Q_X = 3.0kN$   
 $M = -4.2kNm$
- 1.3. Sección  $M - M$ :  $Q = -72N$   
 $M = -43.2Nm$   
 Sección  $N - N$ :  $Q = 144N$   
 $M = 345.6Nm$
- 1.4. Sección  $R - R$ :  $F = -48kN, Q = -24kN$   
 $M = 105.6kNm$
- 1.5. Sección  $R - R$ :  $F = 0, Q = 6.25kNm$   
 $M = +2.5kNm$
- 1.6. Sección  $a - a$ :  $F = 183.9N$  *compresión*  
 $Q = 1543N$   
 Sección  $b - b$ :  $F = 240N$  *tracción*  
 $M = 38.4N$   
 Sección  $c - c$ :  $Q = 240N$   
 $M = 19.2 N/m$
- 1.7. Sección  $a - a$ :  $F_a = 0$   
 $M = 200Nm$   
 Sección  $b - b$ :  $F_N = 0, F_{tg} = Q = 800N$   
 $M = 1000Nm$   
 Sección  $c - c$ :  $F_N = 0, F_{tg} = Q = 800N$   
 $M = 1800Nm$
- 1.8. Sección  $a - a$ :  $Q = 200N$   
 $M = 4Nm$   
 Sección  $b - b$ :  $Q = 200N$   
 $M = 16Nm$   
 $C = 12Nm$  (*torsión*)  
 Sección  $c - c$ :  $Q = 200N$   
 $M = 24Nm$   
 $C = 12Nm$  (*torsión*)
- 1.9. Sección  $a - a$ :  $F_T = 1067N, Q = 1000N$   
 $M = 3000Nm$   
 Sección  $b - b$ :  $F_C = 400N, Q = 267N$   
 $M = 800Nm$   
 Sección  $c - c$ :  $F_T = 600, Q = 800N$   
 $M = 800Nm$
- 1.10. Sección  $a - a$ :  $F_T = 800N, Q = 600N$   
 $M = 2100Nm$   
 Sección  $b - b$ :  $F_T = 400N, Q = 150N$   
 $M = 225Nm$   
 Sección  $c - c$ :  $F_T = 150N, Q = 400N$   
 $M = 200Nm$
- 2.1. a)  $\sigma_C = 10.2 \frac{N}{mm}, \sigma_a = 566 \frac{N}{mm^2}$   
 b)  $\Delta L_T = 0.0212mm$
- 2.2.  $T = 72.6^\circ C$
- 2.3.  $N = 48$  varillas,  $\Delta L = -1.5mm$
- 2.4.  $F_{corte\ máx} = 2513N$
- 2.5.  $F_{máx} = 1413N$
- 2.6.  $\gamma = 3.3 \times 10^{-5} rad$
- 2.7.  $\tau = 28.8N/mm^2$
- 2.8. Gráfica  $y G = 78 \times 10^9 N/m^2$
- 2.9.  $T_{Final} = 25.6^\circ C; d = 50.006mm$
- 2.10.  $L_{Final} = 4.0012m; D_{Final} = 24.998mm$
- 2.11.  $F = 3.36MN = 3.36 \times 10^6 N$
- 2.12.  $\varepsilon_x = 1.47 \times 10^{-4}; \varepsilon_y = 3.2 \times 10^{-4}$
- 2.13.  $\sigma_T = 25N/mm^2 T; \varepsilon_C = 3.23 \times 10^{-4} C$

$$2.14. \sigma_{cC} = 7.88MN/m^2 = 7.88 \times 10^6 N/m^2$$

$$2.15. \tau = 8.49N/mm^2$$

$$2.16. \sigma_T = 117MN/m^2(\text{tracción})$$

$$\sigma_C = 9.89MN/m^2(\text{Compresión})$$

$$2.17. \Delta V = 49.92mm^3(+)$$

$$2.18. \tau = 0.95N/mm^2$$

$$2.19. \rho = 168MPa = 1.68 \times 10^6 N/m^2$$

$$2.20. \frac{dV}{V} = \frac{pd}{\Delta t E} (5 - 4v) \text{ y}$$

$$\Delta V = 311cm^3$$

$$3.1. P = 800N; R_A = 820N; R_B = 1780N$$

$T(N \cdot m)$  entre las ruedas dentales de:

150mm y 200mm  $T = 300Nm$ ; y de 200mm

a 140mm  $T = 140Nm$

$$3.2. \tau_{m\acute{a}x} = 3.46MN/m^2; \theta = 11.9'$$

$$\theta = 0.199^\circ = 3.46157 \times 10^{-3}rad$$

$$3.3. d = 21.9mm$$

$$3.4. \tau_{m\acute{a}x} = 20.35N/mm^2$$

$$\theta = 11' = 0.183^\circ = 3.2 \times 10^{-3}rad$$

$$3.5. T = 1.6kNm; Pot. = 100.5kW$$

$$3.6. L_{m\acute{a}x} = 1.555m; Pot. 67.45kW$$

$$3.7. Pot. = 11.8MW; \theta = 1.97^\circ = 3.44 \times 10^{-3}rad$$

$$3.8. D = 48.8mm; d = 24.4mm$$

$$3.9. \tau_{m\acute{a}x} = 65.7MN/m^2; \frac{W_s}{mh} = 1.33$$

$$\therefore \Delta m_3 = 33\%$$

$$3.10. D = 235mm; d = 117.5mm;$$

$$\frac{\theta}{L} = 22min/m = 6.40rad/m$$

3.11. Porque se transmite mayor potencia  
Para el mismo diámetro exterior.

$$\frac{m_s}{m_h} = 2.13; \quad \frac{\theta_s}{\theta_h} = 1.25$$

$$3.12. T = 65.8Nm; \quad d = 16.8mm$$

$$3.13. n = 838rev/min$$

$$3.14. \tau = 34.9MN/m^2 = 34.9 \times 10^6 N/m^2$$

3.15. De la gráfica trazada se obtiene  
 $G = 60 \times 10^9 N/m^2$

$$3.16. D \times d = 67.12mm \times 50.34mm$$

$$3.17. \tau_{m\acute{a}x} = 38.2N/mm^2; \theta = 1.09^\circ;$$

$$d_s = 181.7mm$$

$$3.18. \gamma = 0.00100; \tau = 80.5MN/m^2;$$

$$G = 80.2 \times 10^9 N/m^2$$

$$3.19. T_A = T_B = 1.25kNm; \tau_{m\acute{a}x_{izq}} =$$

$$= 59.7MN/m^2; \tau_{m\acute{a}x_{der.}} = 39.8Mn/m^2;$$

$$\theta = 0.087rad \text{ o } 5^\circ \text{ aprox.}$$

$$3.20. \text{Como } [\theta^\circ/1] = 0.85 \frac{\text{grados}}{n} =$$

$$= 0.148 \times 10^{-1}rad/m$$

$$\frac{\theta}{L} = \frac{T}{GJ} = 0.143 \times 10^{-1}rad/m \leq [30^\circ/L]$$

$$4.1. M_A = 0; M_B = 10.29kNm; M_C = 2.15kNm;$$

$$M_D = -15kNm; M_E = 0$$

(gráfica no incluida)

$$4.2. M_{m\acute{a}x} = 450MN/m^2$$

$$4.3. M = 250MN/m^2$$

$$4.4. b \times d = 75mm \times 150mm$$

$$4.5. I_{EN} = 33.94 \times 10^{-6}m^4; F = 112k$$

$$4.6. b \times d = 119mm \times 238mm$$

$$Masa_I = 0.441 \text{ Masa}_{rect.}$$

$$4.7. M_I = 41.3 \text{ kNm}; M_H = 7.56 \text{ kNm}$$

$$4.8. \bar{y} = 66.68 \text{ mm}$$

$$4.9. d = 122 \text{ mm}$$

$$4.10. \sigma = 31.25 \text{ MN/m}^2$$

$$4.11. Z = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}^3; I_{E\uparrow} = 40 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$4.12. \sigma_T = \frac{123 \text{ MN}}{\text{m}^2} \text{ a } 2 \text{ m del soporte izquierdo}$$
$$\sigma_C = \frac{69.1 \text{ MN}}{\text{m}^2} \text{ a } 4.5 \text{ m del soporte izquierdo}$$

$$4.13. F = 28.48 \text{ kN}$$

$$4.14. M_{9m} = 271.5 \text{ kNm}; M_{12m} = 325.9 \text{ kNm}$$
$$M_{9m} = 329 \text{ kNm}; \sigma_T = 121.2 \text{ MN/m}^2;$$
$$\sigma_C = 74 \text{ MN/m}^2$$

$$4.15. M_A = M_B = 0; M_C = 45 \text{ kNm};$$
$$M_C = 54 \text{ kNm}; I(D = 352.8 \text{ mm} \times$$
$$B = 126.0 \text{ mm}$$

$$4.16. T = (B = 166.8 \text{ mm} \times A = 155.4 \text{ mm});$$
$$\sigma_{C_{\max}} = 285 \text{ MN/m}^2$$



## BIBLIOGRAFÍA

Beer Ferdinand P.; Johnston E. Russell Jr.; Dewolf, Jhon.  
Mecánica de Materiales 3ª Ed. México. Mc Graw Hill.

Hibbeler Russell C. Mecánica de Materiales 3ª Ed. México.  
Pearson.

Craig Roy R. Mecánica de Materiales 3ª Ed. México C.E.C.S.A.

Gere James M. Mecánica de Materiales 5ª Ed. México Thomson  
Learning.

Mott Robert. L. Resistencia de Materiales Aplicada 5ª Ed.  
Prentice Hall

H. W. Morrow Statics and Strength of Materials third Ed.  
Prentice Hall.