

# CONTENIDO

## PROLOGO I

### PARTE I

## FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA PARA LA INGENIERÍA Y DINÁMICA DE LA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO PLANO

### 1. Fundamentos de la Mecánica para la Ingeniería.

- 1.1 Introducción. 1
- 1.2 Conceptos básicos. 2
- 1.3 Sistemas de coordenadas. 3
- 1.4 Elementos Básicos de Álgebra y Cálculo Vectorial. 6
  - Vector de Posición.* 6
  - Adición de Vectores.* 6
  - Notación Vectorial.* 7
  - Componentes de un Vector.* 8
  - Producto Escalar y Vectorial.* 10
  - Derivada de un producto de dos vectores.* 18
- 1.5 Procedimiento general para la solución de ejemplos y ejercicios de mecánica. 20
- 1.6 Ejemplos de discusión y ejercicios de trabajo. 23

### 2. Cinemática de la Partícula en Movimiento Plano

- 2.1 Elementos básicos del movimiento. 35
  - Velocidad de una partícula.* 35
  - Aceleración de una partícula.* 36
- 2.2 Movimiento plano en coordenadas cartesianas. 37
- 2.3 Movimiento plano en coordenadas de trayectoria. 43
- 2.4 Movimiento Plano en coordenadas Polares. 45
- 2.5 Movimiento relativo de partículas. 46
  - Movimiento relativo dependiente.* 48
- 2.6 Movimiento unidimensional. 49
  - Métodos gráficos para el movimiento unidimensional.* 50
- 2.7. Ejemplos de discusión y ejercicios de trabajo. 51

### 3. Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

#### Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

- 3.1 Introducción. 77
- 3.2 Leyes del Movimiento de Newton. 77
  - Cantidad de Movimiento Lineal (momentum)* 78
  - Masa y equivalencia de Masas.* 78

- 3.3 Fuerza y Momento de una Fuerza. 80
  - Tipos de Fuerzas.* 81
  - Principios de rozamiento seco.* 82
- 3.4 Ley de la Gravitación universal. 84
- 3.5 Unidades. 85
  - Sistema de Unidades.* 87
  - Sistema Integral de Unidades SI.* 89
- 3.6 Marcos de Referencia. 93
- 3.7 Sistemas de Partículas. 94
  - Centro de masa.* 95
- 3.8 Diagrama de cuerpo libre. 99
- 3.9 2ª Ley de Newton en varios sistemas de coordenadas. 102
- 3.10 Aplicaciones de la Segunda Ley de Newton. 104
  - Movimiento Armónico Simple (mas)* 107
  - Movimiento Angular.* 111
  - Movimiento Circular (péndulo cónico)* 114
  - Balanceo de Masas.* 116
  - Varias Masas en Movimiento Circular* 119
- 3.11 Ejemplos de Discusión y ejercicios de trabajo. 122

### **Cinética de Partícula en Movimiento Plano**

#### **Parte B: Impulso-Cantidad de movimiento y**

#### **Trabajo-Energía**

- 3.12 Impulso y Cantidad de movimiento Lineal. 143
- 3.13 Conservación de la cantidad de Movimiento Lineal. 145
- 3.14 Impacto Directo. 147
- 3.15 Cantidad de Movimiento angular. 154
- 3.16 Conservación de la cantidad de movimiento angular. 156
- 3.17 Ejemplos de discusión y ejercicios de Trabajo. 158
- 3.18 Trabajo potencia y Energía. 172
  - Ecuación Trabajo-Energía Cinética.* 173
  - Trabajo hecho por una fuerza y por un par de fuerzas.* 174
  - Potencia mecánica.* 175
  - Energía mecánica.* 177
  - Energía cinética lineal.* 177
  - Energía cinética Angular.* 178
  - Energía Cinética de Deformación.* 179
  - Energía Potencial.* 179
  - Principio de la conservación de la Energía mecánica.* 181
- 3.19 Ejemplos de discusión y ejercicios de Trabajo. 184

## PARTE II

### SISTEMA DE FUERZAS Y EQUILIBRIO ESTÁTICO DE CUERPOS RÍGIDOS

- 4 Sistema de Fuerzas y Equilibrio Estático**
- 4.1 Operaciones con Fuerzas y Equilibrio Estático. 201  
*Suma de Fuerzas.* 201  
*Momento de componentes de una fuerza.* 203  
*Momento de un par de fuerzas.* 203
  - 4.2 Resultante de un sistema de fuerzas coplanares. 204
  - 4.3 Resultante de un sistema de Fuerzas espaciales. 205
  - 4.4 Sistema de Fuerzas paralelas distribuidas. 212  
*Centro de masa centro de gravedad y centróide de un cuerpo rígido.* 213
  - 4.5 Equilibrio de un cuerpo rígido. 223  
*Ecuaciones de equilibrio de sistema de fuerzas coplanares.* 223  
*Ecuaciones de equilibrio de sistema de fuerzas espaciales.* 224
  - 4.6 Armaduras, Marcos y Máquinas simples. 227
  - 4.7 Cables Flexibles. 237
  - 4.8 Rozamiento. 240
  - 4.9 Ejemplos de discusión y Ejercicios de trabajo. 242

## PARTE III

### DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

- 5 Cinemática de un Cuerpo Rígido en Movimiento Plano.**
- 5.1 Introducción. 261
  - 5.2 Tipos de movimiento. 262
  - 5.3 Movimiento relativo entre dos puntos de un cuerpo rígido. 263
  - 5.4 Diagramas de velocidad. 264
  - 5.5 Centro instantáneo de rotación. 266
  - 5.6 Imagen de velocidad. 266  
*Caso con juntas Deslizantes (correderas).* 267
  - 5.7 Diagramas de Aceleración. 267
  - 5.8 Imagen de aceleración. 268
  - 5.9 Movimiento de un tren de engranes rectos. 269
  - 5.10 Movimiento Epicycloidal. 270
  - 5.11 Ejemplos de discusión y ejercicios de trabajo. 271
- 6 Cinética de un Cuerpo Rígido en Movimiento Plano.**
- 6.1 Movimiento plano General. 295
  - 6.2 Rotación respecto a un eje Fijo. 298

- 6.3 Momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje. 298
  - Teorema de los ejes paralelos.* 298
  - Teorema de los ejes perpendicular.* 299
  - Momento de inercia de un cilindro recto uniforme.* 299
- 6.4 Aplicaciones. 300
- 6.5 Ejemplos de Discusión y Ejercicios de trabajo. 303

## **APÉNDICES**

- 1. Álgebra Vectorial Básica 327
- 2. Unidades 331
- 3. Integración por el método de aproximación 335
- 4. fuerzas conservativas y energía potencial 336
- 5. Centros de masa y momento de inercia 338

## **RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE TRABAJO 341**

## **ÍNDICE 345**

## **BIBLIOGRAFÍA 351**





## PROLOGO

La preparación de este libro es con el propósito de ofrecer al estudiante, una exposición simple y concisa de los principios básicos de la mecánica de ingeniería y alcanzar los objetivos que se tienen en los capítulos pertenecientes a los programas de los cursos de esta materia; que se imparten en las carreras de ingeniería. Para lograr lo anterior, se ha seguido una línea fundamental; elaborar la obra en la misma forma en que se imparte este curso.

Se ha elegido el orden de presentación de las unidades o capítulos del libro, con sus temas y subtemas, de acuerdo a la experiencia de impartir esta materia; el cual corresponde a lo que se ha encontrado ser de más fácil asimilación por los estudiantes, respecto a los principios y métodos de la mecánica y el desarrollo de sus habilidades; para establecer la estrategia de solución de situaciones de la mecánica de ingeniería, dadas en ejemplos y ejercicios de trabajo.

El material del libro se ha organizado en tres partes principales: la 1ra. Parte se basa en los capítulos 1, 2, 3 relativos a los fundamentos de la mecánica para ingeniería y a la dinámica de la partícula en movimiento plano. La 2da. parte con el capítulo número 4 referente a sistemas de fuerzas y equilibrio estático de cuerpos rígidos. La 3ra. parte y última consiste de los capítulos 5 y 6, Dinámica del cuerpo rígido en movimiento plano.

El libro no contempla unidades o capítulos referentes a la dinámica de la partícula y el cuerpo rígido con movimiento tridimensional ; debido, en primer lugar, porque la mayoría de elementos de máquinas y mecanismos se mueven en planos paralelos y en segundo lugar, a que el tiempo asignado para impartir la materia en la mayoría de las carreras de ingeniería de diferente especialidad a la de **mecánica** y **civil** no es suficiente, para incluir estos capítulos en el contenido de la asignatura; que por lo general es de 6 horas por semana en cursos de un semestre.

Ya que la herramienta matemática nos proporciona un medio sistemático para aplicar los principios de la mecánica, cabe esperar que el estudiante tenga conocimientos previos de álgebra, geometría, trigonometría y para un entendimiento mayor, principios de análisis matemáticos (Cálculo escalar y vectorial). La notación vectorial se maneja desde la primera unidad; con la finalidad de familiarizar al estudiante; con su utilización adecuada en los métodos de álgebra vectorial que se emplea en la mecánica de ingeniería.

Para el estudiante interesado en conocer, cual método es el mejor para resolver un ejemplo o ejercicio de trabajo referente a una situación real de la mecánica de ingeniería; considerando no tener la capacitación para iniciar el procedimiento respectivo de su solución; se ha procedido en la forma siguiente cada capítulo del libro se divide en dos partes. La primera parte consiste de la exposición de la teoría básica respectiva, con pocos ejemplos demostrativos. La segunda parte contiene ejemplos de discusión, muchos de los cuales son descritos y explicados en una forma general encomendada a la asesoría tutorial: donde métodos diferentes adecuados para resolver un mismo ejemplo de trabajo, son comparados y las dificultades que surgen son indicadas con ciertas técnicas. Cada capítulo termina con una serie de ejercicios de trabajo a resolver. Estos son ordenados gradualmente de menor a mayor dificultad, de tal manera que refuerzan la confianza del estudiante al proceder a resolverlos y dar las respuestas solicitadas.

Aunado a lo anterior, en el tema 1.5 “Procedimiento general para la resolución de ejemplos y ejercicios de mecánica”, se pone a consideración del estudiante los principales lineamientos en un orden recomendado a seguir en el análisis de estos “problemas”, que nos permiten simplificar su solución y reducir la probabilidad de errores.

Los ejemplos y ejercicios numéricos se presentan en unidades del Sistema Internacional (SI), pero otros

sistemas de unidades todavía en uso, con sus respectivas relaciones de conversión son cubiertos en el capítulo 3, tema 3.5.

Imposibilitado a cumplir con los deseos de dar un reconocimiento a todas las fuentes de información del material vertido en esta obra. Ya que este, ha sido extraído conjuntamente de la preparación de las notas de enseñanza para la asignatura de mecánica de ingeniería, con sus respectivos reactivos que se aplican en los diferentes tipos de evaluación y también a las discusiones de los diferentes temas de la asignatura; con estudiantes y colegas profesores, a los que estoy extremadamente agradecido.

***S.G.G***

***ESIME Zacatenco***

# Parte I Fundamento de la Mecánica para Ingeniería y Dinámica de la Partícula en Movimiento Plano

## 1

### FUNDAMENTO DE LA MECÁNICA PARA INGENIERÍA

#### 1.1. Introducción

La mecánica es la rama de las ciencias físicas que toma en consideración el movimiento de los cuerpos, considerando el “reposo” como un caso especial. Uno de los objetivos de la Mecánica de Ingeniería, consiste en estudiar los efectos externos de la aplicación de un sistema de fuerzas a un cuerpo Rígido; sea este una estructura, un elemento estructural, una Máquina o un elemento de Máquina.

La mecánica del cuerpo rígido para su estudio se divide por lo general en dos partes: Estática y Dinámica. La estática trata el equilibrio de los cuerpos; es decir, aquellos que están, ya sea en “reposo” o se muevan en una trayectoria recta con velocidad constante; mientras que la Dinámica estudia el movimiento de los cuerpos materiales y las fuerzas asociadas, considerando a la Estática un caso especial de la Dinámica, donde no se tiene variación con respecto al tiempo de la velocidad o esta velocidad es nula en los cuerpos.

La Dinámica a su vez se subdivide en Cinemática y Cinética. Por lo que el estudio del movimiento propiamente dicho, sin importar las causas que lo originan, se le llama **Cinemática**, que relaciona únicamente la geometría del movimiento y el concepto de tiempo; mientras que el estudio de las fuerzas asociadas con el movimiento se le denomina **Cinética**; este estudio implica algunos razonamientos abstractos y la proposición de leyes básicas o axiomas.

## Principios de Mecánica para Ingeniería

### 1.2. Conceptos Básicos

La Ingeniería Mecánica se basa en la mecánica newtoniana, en la cual los efectos relativistas son despreciables. En la mecánica newtoniana ciertos conceptos y definiciones son fundamentales y deben comprenderse perfectamente desde un principio:

**Espacio** es la región geométrica en la que tienen lugar los acontecimientos, En este libro se utilizará la palabra espacio para hacer referencia a una región tridimensional. Sin embargo no será raro referirnos al movimiento que acontece en un espacio unidimensional o bidimensional.

**Marco de referencia.** La posición en el espacio se determina respecto a un cierto sistema o marco de referencia mediante medidas lineales y angulares; El marco de referencia fundamental para las leyes de la mecánica newtoniana es el sistema o marco inercial primario o sistema astronómico de referencia, que es un marco imaginario de ejes mutuamente ortogonales que se supone no tienen traslación ni rotación en el espacio.

**Tiempo** es una medida de la sucesión de acontecimientos y en la mecánica newtoniana se considera cantidad absoluta. La unidad de tiempo es el segundo, que es una determinada fracción del periodo de rotación de la tierra.

**Fuerza** es la acción de un cuerpo sobre otro. Una fuerza tiende a mover a un cuerpo en la dirección de su acción sobre él.

**Materia** es la sustancia que ocupa un espacio. Un cuerpo es materia limitada por una superficie cerrada.

**Inercia** es la propiedad de la materia que produce una resistencia al cambio de movimiento.

**Masa** es la medida cuantitativa de la inercia. La masa es también la propiedad de todo cuerpo que siempre es acompañada por una atracción mutua a otros cuerpos.

**Partícula o Punto Material** es un cuerpo de dimensiones despreciables. Cuando las dimensiones de un cuerpo no sean importantes para la descripción de su movimiento, el cuerpo puede ser tratado como una partícula. Algunas otras veces una partícula puede tomarse como un elemento diferencial de un cuerpo.

**Cuerpo Rígido.** El modelo de cuerpo rígido asume que ninguna dimensión del cuerpo cambia cuando este está cargado. Este puede ser un modelo satisfactorio para determinar las fuerzas de reacción requeridos en los soportes de una estructura cargada o predecir el movimiento de un elemento de maquina o de un vehiculo bajo la acción de fuerzas. El concepto de cuerpo rígido se trata de una hipótesis ideal, ya que todos los cuerpos reales cambian algo de forma al ser sometidos a la acción de fuerzas.

**Escalar.** Una cantidad a la cual solo se asocia una magnitud se dice que es un escalar. Ejemplos de escalares son el tiempo, el volumen, la densidad, la celeridad<sup>1</sup>, la energía y la masa.

**Vector.** Una cantidad a la cual se asocia además de una magnitud, una dirección y un sentido, se dice que es un **vector** Ejemplos de vectores son el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el momento y la cantidad de movimiento.

### 1.3. Sistema de Coordenadas

Primero estaremos interesados en describir la posición de un punto material y después relacionarlo con el movimiento de un cuerpo u objeto real.

La posición de un punto material es definida solamente en relación a algunos ejes de referencia.

En el espacio de tres dimensiones se requieren tres coordenadas linealmente independientes para describir la

---

<sup>1</sup> Celeridad = Rapidez

## Principios de Mecánica para Ingeniería

posición única de un punto con respecto al conjunto de ejes de referencia elegidos.

### Sistemas Unidimensionales de Coordenadas

Si se sabe que un punto se encuentra sobre una trayectoria fija; tal como una línea recta, una circunferencia o una Hélice Circular (Curva helicoidal); entonces solamente un numero se requiere para localizar el punto material con respecto a algún punto de referencia sobre la trayectoria. Este es el sistema de coordenadas usadas en planos o mapas de carreteras donde la situación del punto **B** (Figura 1.1) se dice estar por ejemplo a 10Km. del punto **A** a lo largo de la carretera **C**:

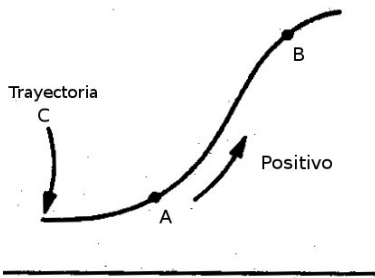


Figura 1.1

Si no ocurre que **A** este en el extremo de la carretera **C**; debemos especificar la dirección la cual será considerada como positiva. Este sistema a menudo es referido como un sistema de “Coordenadas de Trayectoria” o Sistema Natural de coordenadas.

### Sistema Bidimensional de coordenadas

Si un punto se encuentra en una superficie; tal como la de un plano, un cilindro, o una esfera; entonces dos números se requieren para definir la posición del punto. Para una superficie plana, generalmente son empleados dos sistemas de coordenadas:

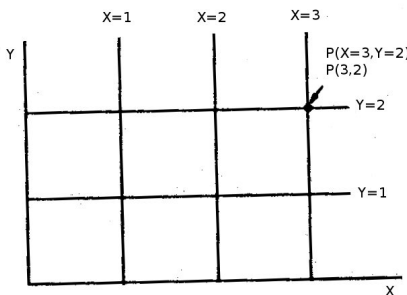


Figura 1.2

- a) *Coordenadas Cartesianas*. En este sistema una rejilla de rectas ortogonales se construye y la posición de un punto se define en la intersección de dos de estas retas.

En la Figura 1.2, el punto **P** se localiza respecto a los ejes **x** e **y** por la intersección de las rectas  $x = 3$  e  $y = 2$  y es indicado por  $P(+3,+2)$  o  $P(3,2)$

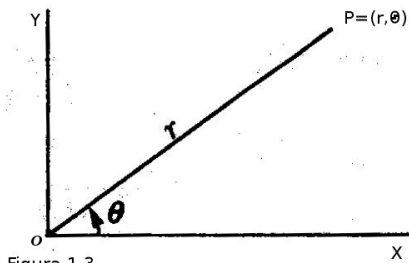


Figura 1.3

Figura 1.3

- b) *Coordenadas Polares*. En este sistema (Figura 1.3) la distancia desde el origen es determinado conjuntamente con el ángulo que hace **OP** con el eje de la **x** como coordenadas.



Si la superficie donde se supone se encuentra localizado un punto material, es una esfera, entonces las líneas de latitud y longitud pueden ser las coordenadas como el caso de navegación terrestre.

### Sistema Tridimensional de coordenadas

Tres sistemas de tres dimensiones son los más comúnmente utilizados:

- Coordenadas Rectangulares o Cartesianas.* Este sistema es una extensión simple del sistema bidimensional, donde un tercer eje, el eje  $z$ , ha sido agregado. El sentido no es arbitrario puesto que es trazado de acuerdo a la regla del tornillo de rosca derecha (mano derecha), como se muestra en la (Figura 1.4). Este conjunto de ejes se conoce como una triada de mano derecha normal.
- Coordenadas Cilíndricas.* Este es una extensión del sistema de coordenadas Polares, la designación para  $\theta$  y  $z$  positivas es mostrada en la (Figura 1.5). Es obvio que si  $R$  es constante, entonces el punto material deberá estar sobre la superficie de un cilindro recto.
- Coordenadas Esféricas.* En este sistema la posición de un punto material se determina por la distancia del punto desde el origen (centro de una esfera) del sistema y la dirección dada por los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  como se muestra en la Figura 1.6(a) o 1.6(b)

Es importante hacer notar que; mientras que el Movimiento Rectilíneo es unidimensional, un movimiento unidimensional no es limitado al de en una línea recta; Por ejemplo, las coordenadas de trayectoria son completamente apropiadas para describir el movimiento de un punto en el espacio como el ángulo que es suficiente para definirla posición de una rueda o volante que este rotando respecto a un eje fijo. También es cierto que las coordenadas esféricas podrían usarse en situaciones de movimiento en una trayectoria recta que no pase por el origen  $O$  del sistema, sin embargo esto determinaría una complicación innecesaria.

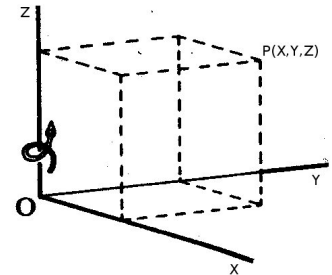


Figura 1.4

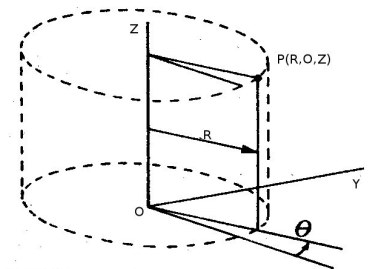


Figura 1.5

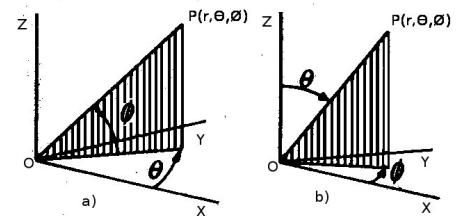


Figura 1.6

## 1.4. Elementos Básicos de Álgebra y Cálculo Vectorial

En la Mecánica de Ingeniería tratamos con muchas cantidades que tienen tanto magnitud como dirección y que se pueden expresar como vectores.

En este tema (1.4) haremos una revisión somera de las definiciones, conceptos y operaciones principales que se manejan, de álgebra y cálculo vectorial en Mecánica.

### *Vector de Posición.*

Una recta trazada desde el origen  $O$  a un punto material  $P$ , siempre determinará por completo la posición de la  $P$  y es independiente de cualquier sistema de coordenadas; de aquí se desprende que alguna otra recta trazada a una escala conveniente, puede también usarse para representar la posición de  $P$  respecto a  $O$  (se escribe  $\overline{OP}$ ).

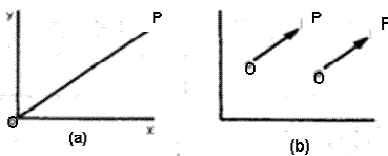


Figura 1.7

En la figura 1.7 (b), ambos vectores representan la posición de  $P$  relativa a  $O$ , la cuál es mostrada en 1.7(a), como ambos vectores de 1.7(b) teniendo la misma magnitud y la misma dirección de  $P$  respecto a  $O$ ; Estos vectores son llamados vectores libres. De aquí que en mecánica un vector puede definirse como un segmento de recta que representa una cantidad física en magnitud y dirección. Se tiene, sin embargo, una restricción sobre esta definición, que en el siguiente tema será considerada.

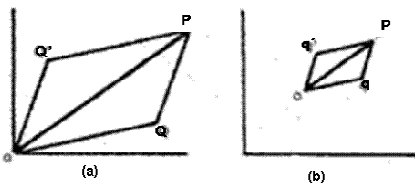


Figura 1.8

### *Adición o suma de vectores*

La posición de  $P$  relativa a  $O$  puede considerarse como la posición de  $Q$  relativa a  $O$  más la posición de  $P$  relativa a  $Q$  como se muestra en la figura 1.8(a).

La posición de  $P$  puede considerarse también como la posición de  $Q'$  relativa a  $O$  mas la posición de  $P$  relativa a  $Q'$ . Si  $Q'$  se elige de tal manera que  $OQ'PQ$  es un paralelogramo, esto es  $OQ' = QP$  y  $OQ = Q'P$ , entonces el diagrama vectorial correspondiente también será un paralelogramo. Luego, entonces el vector de posición representado por  $oq'$  Figura 1.8 (b), es idéntico para el

representado por  $\vec{qp}$ , y  $\vec{oq}$  es idéntico a  $\vec{q'p}$ , infiriéndose que la suma de dos vectores es independiente del orden de adición.

Por el contrario, si una cantidad física es un vector, en este caso la suma de estas cantidades físicas deberá satisfacer la ley del paralelogramo. La cantidad física importante en Mecánica que no cumple esta regla de la adición es la rotación finita, ya que puede demostrarse que la suma de dos rotaciones finitas depende del orden de adición.

La ley de adición de los vectores puede ser escrita simbólicamente como:

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = \vec{QP} + \vec{OQ} \quad (1.1)$$

### Notación Vectorial

Como el álgebra vectorial será aplicada posteriormente en forma extensa, es necesario iniciar con la notación vectorial formal. Es conveniente representar un vector por un símbolo sencillo y ha sido convenido en textos impresos, que un vector generalmente sea denotado por una letra en tipo negrilla, como ejemplo el vector  $\mathbf{r}$ .

La magnitud del vector es comúnmente designado por la misma letra en tipo itálica (*cursiva*), es decir la magnitud del vector  $\mathbf{r}$  se denota por  $r$  (la misma letra en cursiva en vez de negrilla), o por  $|\mathbf{r}|$ . En textos de escritura manuscrita el vector puede ser identificado por una pequeña raya arriba o debajo de la letra, por ejemplo para el vector  $\mathbf{r}$  el estudiante puede elegir el modo o manera de representar a un vector  $\vec{r} = [\underline{r}, \bar{r}, \vec{r}, \underline{\underline{r}}]$ ; recomendando la primera notación para un vector ( $\underline{r}$ ). Para un vector de posición, dado por un segmento de recta dirigido, nosotros usaremos:

$$\vec{OP} \equiv \mathbf{r}$$

El hecho que la adición de vectores es conmutativa es demostrado en la figura 1.9:

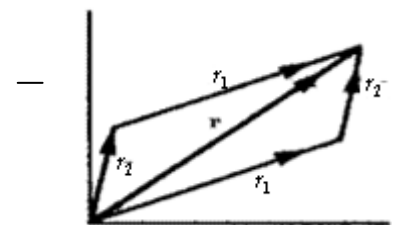


Figura 1.9

## Principios de Mecánica para Ingeniería

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \quad (1.2)$$

Todo vector será asociado a un número real igual a la magnitud del vector. El número dependerá, por supuesto, de las unidades elegidas para representar a la clase dada de vector. Es recomendable a menudo separar la magnitud de un vector de su dirección. Esto se hace para incorporar un vector unitario  $\mathbf{e}$  ( $\hat{\mathbf{e}}$  en escritura manuscrita) el cual tiene una magnitud unitaria y esta en la dirección requerida. Por lo tanto  $\mathbf{r}$  puede escribirse como

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e} \quad (1.3)$$

Donde  $r$  es la magnitud (un escalar). El modulo, escrito como  $|\mathbf{r}|$ , es la dimensión o tamaño del vector y siempre es positivo. En este libro, las magnitudes vectoriales pueden ser positivas o negativas.

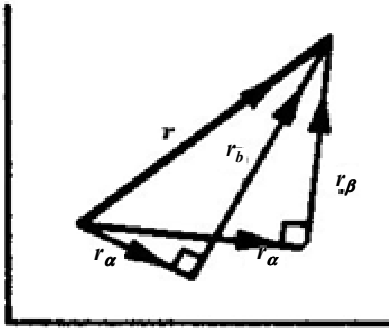


Figura 1.10

*Componentes de un vector*

Cualquier número de vectores que se adicionan para dar otro vector suma son las componentes de este vector suma. Generalmente las componentes de un vector son ortogonales entre si, como se muestra en la Figura 1.10

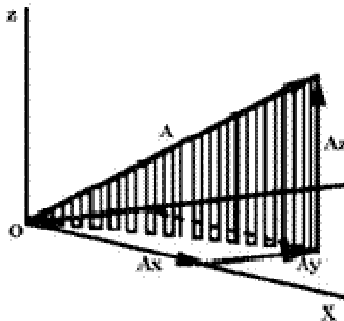


Figura 1.11

En coordenadas Cartesianas rectangulares los vectores unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son dados por los símbolos  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  respectivamente. Por lo tanto las componentes de  $\mathbf{A}$  (figura 1.11) pueden escribirse como:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (1.4)$$

Donde  $A_x, A_y, A_z$  son las componentes de  $\mathbf{A}$  con respecto a los ejes  $x, y, z$ .

Resulta que, si  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ , entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k} \quad (1.5)$$

También es fácil comprobar que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

y también que

$$aA = aA_x \mathbf{i} + aA_y \mathbf{j} + aA_z \mathbf{k} \quad (1.6)$$

Donde  $a$  es un escalar.

Consideremos una vez más la expresión (1.4) del vector  $A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ , el módulo de  $A$  se determina por la simple aplicación del teorema de Pitágoras, dando

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

El coseno director,  $l$ , se define como el coseno del ángulo entre el vector y el eje  $x$  positivo, esto es, de la Figura 1.12

$$l = \cos(\angle POL) = \frac{A_x}{|A|} \quad (1.8a)$$

De manera semejante

$$m = \cos(\angle POM) = \frac{A_y}{|A|} \quad (1.8b)$$

$$n = \cos(\angle PON) = \frac{A_z}{|A|} \quad (1.8c)$$

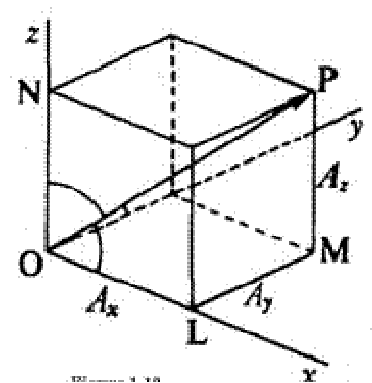


Figura 1.12

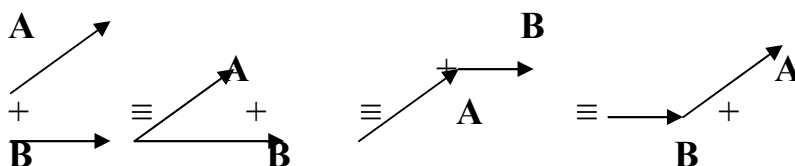
De las ecuaciones 1.3 a la 1.10,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{A}{|A|} = \frac{A_x}{|A|} \mathbf{i} + \frac{A_y}{|A|} \mathbf{j} + \frac{A_z}{|A|} \mathbf{k} \\ &= l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} \end{aligned}$$

Esto es, los cósenos directores son las componentes del vector unitario; por lo tanto

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1.9)$$

Obsérvese que:



*Producto Escalar y Vectorial*

Estas combinaciones conocidas anteriormente como producto directo y producto cruzado de vectores son verdaderos productos, ya que, obedecen la ley fundamental de los productos; es decir, la ley distributiva, la que establece que al producto de  $A$  dentro de la suma de  $B$  y  $C$  es igual a la suma de los productos de  $A$  dentro de  $B$  y  $A$  dentro de  $C$ .

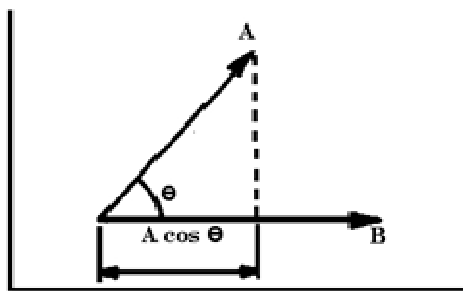


Figura 1.13

## Producto Escalar de dos Vectores

El producto escalar de dos vectores  $A$  y  $B$  (referido también como producto punto) se define formalmente como  $|A| \cdot |B| \cos \theta$ , figura 1.13, donde  $\theta$  es el ángulo más pequeño entre los vectores. El producto escalar se indica por un punto colocado entre los símbolos de los dos vectores.

$$A \cdot B = |A| |B| \cos(\theta) \quad (1.10)$$

Infiriéndose en esta definición que  $A \cdot B = B \cdot A$

De la figura 1.12 se ve que  $|A| \cos \theta$  es la componente de  $A$  en la dirección de  $B$ ; en forma semejante  $|B| \cos \theta$  es la componente de  $B$  en la dirección de  $A$ . Esta definición más tarde se vera su utilidad en la descripción del Trabajo y Potencia.

$$A \cdot e = |A| \cos(\theta) \quad (1.11)$$

Esto es la componente escalar de  $A$  en la dirección de  $e$ . También de la definición del producto escalar de dos vectores se desprenden estas propiedades.

- $A \cdot A = A^2$  El producto escalar de un vector por si mismo es el cuadrado de su magnitud
- $A \cdot B = 0$ ,  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  si solo si  $A$  es perpendicular a  $B$
- En particular para los vectores unitarios  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , a lo largo de los ejes positivos de un sistema de coordenadas rectangulares (Cartesianas).

<sup>2</sup> El signo D significa "igual por definición"

$$\left. \begin{aligned} i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \\ i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

### Producto Vectorial de dos vectores

El producto vectorial o producto “cruz”, de dos vectores se define como  $|A||B|\text{sen}\theta \mathbf{n}$  (figura 1.14), donde  $\theta$  es el ángulo más pequeño entre los vectores, el vector  $\mathbf{n}$  es un vector unitario ortogonal al plano determinado por  $A$  y  $B$  y su dirección se determina por la regla de la mano derecha. El producto vectorial se representa por una cruz (x) colocada entre los símbolos de los vectores.

$$A \times B = |A||B|\text{sen}\theta \mathbf{n} = -B \times A \quad (1.13)$$

Examinemos las propiedades más significativas del producto vectorial, como lo hicimos con las del producto escalar de dos vectores.

La operación del producto vectorial de dos vectores no es conmutativa, ya sea; de hecho, por la misma definición, la transposición de los dos “factores” cambia el signo del producto:

$$B \times A = |B||A|\text{sen}\theta(-\mathbf{n}) = -A \times B \quad (1.14)$$

Los vectores  $A \times B$  y  $B \times A$ , tienen las mismas magnitudes pero direcciones opuestas (figura 1.14).

El producto vectorial nulo es una prueba del paralelismo de dos vectores no nulos. Si  $A \times B = 0$ , con  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ , pues  $\text{sen}\theta$  deberá anularse ya que  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$ , así  $A$  y  $B$  tienen las mismas y opuestas direcciones y por lo tanto son paralelos.

Sea la ecuación vectorial con la igualdad de los productos escalares  $A \cdot B = C \cdot B$ , con  $B \neq 0$ , que implica que ya sea,  $A=C$  o  $A-C$  es ortogonal a  $B$ ; sin embargo, para una igualdad de los productos vectoriales no se puede decir lo mismo. Si  $A \times B = C \times B$ , no es posible inferir que  $A=C$ , puesto que la ecuación también se cumple, si  $A-C$  es paralela al vector  $B$ .

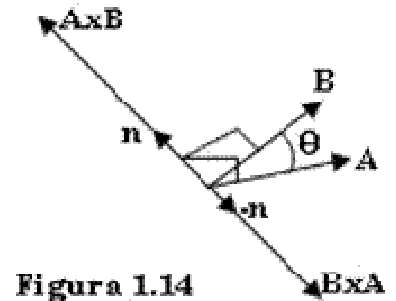


Figura 1.14

## Principios de Mecánica para Ingeniería

Además, por la definición del producto vectorial, el producto cruz de un vector por el mismo es el vector nulo ( $\mathbf{0}$ ).

La multiplicación del producto vectorial por un escalar es “asociativa”, es decir,

$$k(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (k\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (k\mathbf{B}) \quad (1.15)$$

El estudiante no debe tener dificultad en comprobar por si mismo esta última expresión.

El triple producto vectorial,  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , pese a todo no cumple con la ley asociativa:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

Puesto que  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  es perpendicular al plano de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  debe estar en el plano de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ . De manera similar,  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  debe estar en el plano de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Estos dos planos no son generalmente los mismos y los dos vectores  $(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))$  y  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ , por lo tanto no son iguales.

Como el caso del producto escalar, encontramos las relaciones con la triada de vectores unitarios, en los productos vectoriales de cada una de las permutaciones posibles de dos de tres vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Por último como hemos establecido desde el principio de este tema, que tanto, el producto escalar como el producto vectorial son distributivos sobre la adición de vectores para dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  referidos a un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas como,  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ ; será fácil establecer el modo de



simplificar los productos escalar y vectorial de estos dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  considerando la ley distributiva y las relaciones de vectores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  dadas en las ecuaciones (1.12) y (1.16) para obtener una apropiada forma de cálculo de estas operaciones:

Para el producto escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{A} \cdot (B_x \mathbf{i}) + \mathbf{A} \cdot (B_y \mathbf{j}) + \mathbf{A} \cdot (B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + A_y B_x (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + A_z B_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + \\ &\quad + A_x B_y (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + A_y B_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_z B_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + \\ &\quad + A_x B_z (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) + A_y B_z (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + A_z B_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.17)$$

Y para producto vectorial  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{A} \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{A} \times (B_x \mathbf{i}) - \mathbf{A} \times (B_y \mathbf{j}) + \mathbf{A} \times (B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_y B_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_z B_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) - \\ &\quad + A_x B_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_y B_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_z B_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + \\ &\quad + A_x B_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + A_y B_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + A_z B_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} - (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (1.18)$$

Si  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$ , vemos que las componentes escalares de la ecuación vectorial  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$  son las tres ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} C_x &= (A_y B_z - A_z B_y), \\ C_y &= (A_z B_x - A_x B_z) = -(A_x B_z - A_z B_x), \\ C_z &= (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned}$$

Por lo que el vector  $C = Cx\hat{i} + Cy\hat{j} + Cz\hat{k}$  se puede escribir se puede escribir de la forma siguiente:

$$C = i \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + (-j) \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix},$$

o en la forma

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.19)$$

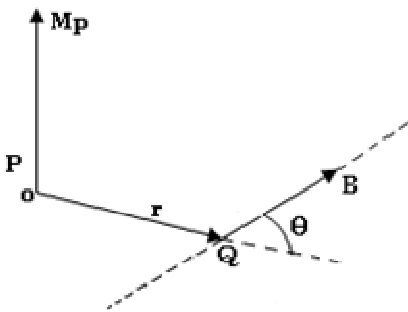


Figura 1.15

Un concepto importante definido directamente en términos del producto vectorial, es el de, momento de un vector respecto a un punto. Sea un vector  $B$  emitido desde el punto  $Q$  en el espacio, y sea  $P$  cualquier otro punto en el espacio (Figura 1.15). Sea  $r$  el vector de posición de  $Q$  con respecto a  $P$  entonces el momento vectorial  $M_p$  de  $B$  con respecto a, o en referencia a  $P$ , se define como

$$M_p = r \times B \quad (1.20)$$

Dos importantes adiciones al concepto del producto de vectores son necesarias complementar a la revisión de los elementos básicos de Álgebra vectorial. Una de estas adiciones es el triple producto escalar o compuesto.  $(A \times B) \cdot C$ ; la otra es el triple producto vectorial  $(A \times B) \times C$ .

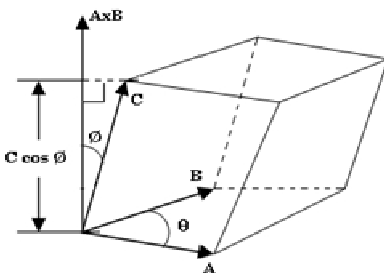


Figura 1.16

El producto  $(A \times B) \cdot C$  es igual al producto de  $(A \times B)$  y la componente de  $C$  en la dirección de  $A \times B$ . Como la magnitud de  $A \times B$  es el área del paralelogramo de la Figura 1.16,  $(A \times B) \cdot C$  es el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes a  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Este volumen es positivo si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  forman una sistema de mano derecha, si es al contrario, este volumen será negativo; si los tres vectores son coplanares  $|A \times B \cdot C| = 0$ .

De la interpretación del triple producto escalar como un volumen, se infiere que

$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot C &= A \cdot (B \times C) = (B \times C) \cdot A = B \cdot (C \times A) \\ &= (C \times A) \cdot B = C \cdot (A \times B) \end{aligned} \quad (1.21)$$

En otras palabras, el triple producto escalar es invariante a una permutación cíclica de los factores y cambian de signo para una permutación no cíclica.

Sea:  $A = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $B = (B_x, B_y, B_z)$ , y  $C = (C_x, C_y, C_z)$ , en coordenadas cartesianas, El triple producto escalar se representa como un Determinante

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \cdot (C_x i + C_y j + C_z k)$$

Como  $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$  y  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

Obtenemos en una expansión parcial el determinante.

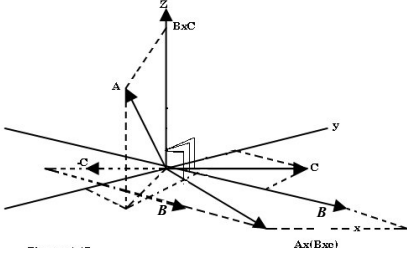
$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot C &= \begin{vmatrix} A_y A_z \\ B_y B_z \end{vmatrix} C_x - \begin{vmatrix} A_x A_z \\ B_x B_z \end{vmatrix} C_y + \begin{vmatrix} A_x A_y \\ B_x B_y \end{vmatrix} C_z \\ &= \begin{vmatrix} C_x C_y C_z \\ A_x A_y A_z \\ B_x B_y B_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De la ecuación 1.21  $(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A$

Por lo que:

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} A_x A_y A_z \\ B_x B_y B_z \\ C_x C_y C_z \end{vmatrix}$$

La combinación de vectores  $A \times (B \times C)$  se le llama Triple producto vectorial. En este caso a diferencia del triple producto escalar; los paréntesis son necesarios para evitar ambigüedad,  $A \times (B \times C)$  no es generalmente idéntico con  $(A \times B) \times C$ .



Para definir un desarrollo breve a este producto vectorial doble, observemos que  $B \times C$  es normal al plano definido por  $B$  y  $C$  y que el producto vectorial de este vector y cualquier otro tercer vector  $A$ , es perpendicular a  $B \times C$ , y debe, por consiguiente, estar en el plano contenido por  $B$  y  $C$ .

Esto significa que  $A \times (B \times C)$  es un arreglo lineal de  $B$  y  $C$  por lo tanto

$$A \times (B \times C) = mB + nC \quad (a)$$

Donde  $m$  y  $n$  son factores escalares por determinar. Realizando el producto escalar por el vector  $A$  ambos miembros de la ecuación (a), tenemos

$$A \cdot A \times (B \times C) = 0 = mA \cdot B + nA \cdot C \quad (b)$$

Esta ecuación no permite la determinación de  $m$  y  $n$  explícitamente, solamente se puede encontrar la razón de  $m$  y  $n$  que es  $m/n = (-A \cdot C)/(A \cdot B)$

Por lo tanto,  $m = k A \cdot C$  y  $n = -k A \cdot B$ , tal que

$$A \times (B \times C) = k[(A \cdot C)B - (A \cdot B)C] \quad (c)$$

Como la comprobación del valor de  $k = 1$ , es compleja y tediosa, no se presenta su desarrollo en forma directa, pero si determinaremos la ecuación para un cálculo breve de este doble producto vectorial bajo otras consideraciones.

Para esto, siempre podemos elegir el sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  de manera que: a).  $B$  tenga la dirección  $x$ ; b).  $C$  este contenido en el plano  $(x, y)$ ; c).  $A$  tenga componentes en  $(x, y, z)$  es decir:

$$\mathbf{B} = B\mathbf{i}, \quad \mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}, \quad \mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \quad (d)$$

Por lo que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = A_1C_1 + A_2C_2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 \quad (e)$$

y también

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = B_1C_2\mathbf{k} \quad (f)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times (B_1C_2\mathbf{k}) \\ &= -A_1B_1C_2\mathbf{j} + A_2B_1C_2\mathbf{i} \end{aligned} \quad (g)$$

Despejando en las dos primeras igualdades en (d) los vectores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  en función de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , resulta

$$\mathbf{i} = \frac{1}{B_1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{C_2}\mathbf{C} - \frac{C_1}{B_1C_2}\mathbf{B}$$

y sustituyendo valores en (h)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= -A_1B_1C_2 \left( \frac{1}{C_2}\mathbf{C} - \frac{C_1}{BC_2}\mathbf{B} \right) + (A_2B_1C_2) \frac{1}{B}\mathbf{B} \\ &= -A_1B_1\mathbf{C} + A_1C_1\mathbf{B} + A_2C_2\mathbf{B} \end{aligned}$$

Que según (e) se puede escribir finalmente

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.23)$$

Por lo que de (1.23) se infiere que el valor de  $k$  de (c) es efectivamente 1 (uno) y consecuentemente (1.23) es la expresión vectorial reducida fundamental del triple producto vectorial,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.23)$$

Como una regla de Mnemotécnica, obsérvese que el 2º miembro del (1.23) es igual al producto “punto” de los factores extremos multiplicado por el factor del centro menos el producto “punto” del factor fuera del paréntesis y el factor mas cercano a este, multiplicado por el factor remanente.

Esta regla también es aplicable cuando el producto “cruz” de dos vectores en paréntesis como un vector esta primero

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}$$

Pero

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

Esta última expresión nos reafirma como ya se ha establecido anteriormente que el triple producto vectorial no es asociativo.

### *Derivada de un producto de dos vectores*

A continuación se revisan brevemente algunos aspectos del cálculo vectorial. Una discusión más completa y amplia se encuentra en los textos de cálculo de vectores o en libros sobre análisis vectorial.

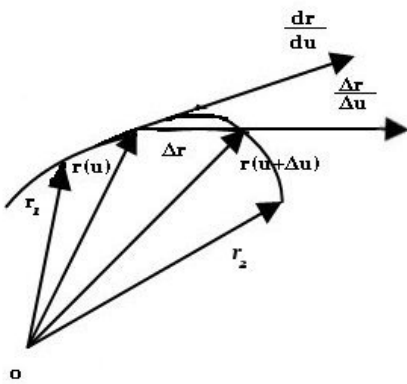


Figura 1.18

Sea un vector de posición  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$  una función continua diferenciable de un parámetro escalar  $u$ . Esto implica que las componentes de  $\mathbf{r}$  son funciones continuas diferenciables de  $u$  (Figura (1.18))

Cuando  $u$  varía en forma continua desde  $u_1$  a  $u_2$  el extremo de  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$  trazara una curva suave en el espacio desde  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(u_1)$  a  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(u_2)$

La derivada de  $\mathbf{r}$  con respecto a  $u$  se define como

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u) - \mathbf{r}(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u} \quad (1.24)$$

Expresando en términos de coordenadas cartesianas:

Si  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ , Entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \left( \frac{dx}{du} \mathbf{i}, \frac{dy}{du} \mathbf{j}, \frac{dz}{du} \mathbf{k} \right)$$

Continuando esta línea de pensamiento, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(hA) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(h + \Delta h)(A + \Delta A) - hA}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta - h\Delta A + h\Delta A + \Delta h\Delta A}{\Delta u} \\ &= \frac{dh}{du}A + h\frac{dA}{du}\end{aligned}\quad (1.25)$$

Donde hemos ignorado el infinitesimal del 2º orden.  
En forma semejante:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(A \cdot B) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(A + \Delta A) \cdot (B + \Delta B) - A \cdot B}{\Delta u} \\ &= \frac{dA}{du} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{du}\end{aligned}\quad (1.26)$$

y

$$\frac{d}{du}(A \times B) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(A + \Delta A) \times (B + \Delta B) - A \times B}{\Delta u}$$

Inmediatamente se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(A \cdot B \times C) &= \dot{A} \cdot B \times C + A \cdot \frac{d}{du}(B \times C) \\ &= \dot{A} \cdot B \times C + A \cdot \dot{B} \times C + A \cdot B \times \dot{C}\end{aligned}\quad (1.27)$$

En forma semejante, obtenemos

$$\frac{d}{du}\{A \times (B \times C)\} = \dot{A} \times (B \times C) + A \times (\dot{B} \times C) + A \times (B \times \dot{C}) \quad (1.28)$$

(El punto ( $\dot{\cdot}$ ) arriba de la letra siempre indicara derivada respectó a u)

Se ha visto ya la derivada de un vector con respecto aun escalar. En algunas ocasiones es necesario invertir el proceso, es decir, integrar un vector con respecto a una variable escalar. Luego, si

$$A = \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \text{ la expresión inversa es } \mathbf{B} = \int A dt + C$$

Donde  $C$  es una constante vectorial de integración, esta cantidad es constante en magnitud y dirección. Uno de los métodos más útiles para integrar consiste en expresar el integrando en términos de vectores unitarios constantes, porque estos no cambian durante la integración y la derivación.

### **1.5. Procedimiento General para la Solución de Ejemplos y Ejercicios de Mecánica**

Una de las disposiciones más efectivas para estudiar la mecánica para ingeniería es resolver problemas; situaciones simuladas y acondicionadas de la ingeniería dadas en ejemplos y ejercicios.

La realidad de buenos hábitos en el planteamiento de problemas y en la representación de sus soluciones resulta una ventaja invaluable. Cada solución deberá proceder con una secuencia lógica de etapas desde la hipótesis hasta la conclusión y su representación deberá incluir una exposición clara de los siguientes partes, cada una identificada en forma evidente

- a) Datos dados
- b) Resultados deseados
- c) Diagramas necesarios
- d) Computo de resultados
- e) Soluciones y conclusiones

En base a lo anterior se sugiere la siguiente secuencia de etapas o pasos:

1. Lea el enunciado del problema cuidadosamente, las veces que sean necesarias, hasta poderle enunciar con sus propias palabras, tratando de correlacionar la situación física real presentada, con la teoría estudiada; estableciendo cuales datos son proporcionados y que resultados son requeridos, dando a cada dato e incógnita el símbolo que deberá



representar en los diagramas y en las ecuaciones modelos matemáticos apropiados, que cubran esta situación. Si no cumple debidamente esta etapa, será muy difícil proseguir con éxito en los siguientes pasos, para dar solución al problema por resolver.

2. Trace el o los croquis y diagramas que sean de utilidad. En situaciones que se tengan vectores fuerza, es de importancia trazar los diagramas de cuerpo libre apropiados; seleccionar un sistema conveniente de coordenadas de referencia, mostrando el origen, las direcciones de los ejes y sus sentidos positivos.
3. Decida, en base a la situación presentada en el problema a resolver y la relación con los principios de la mecánica de ingeniería involucradas en esta situación específica, cuales son los modelos matemáticos, dados en ecuaciones independientes, contengan los parámetros conocidos y desconocidos el número de ecuaciones independientes debe ser por lo mínimo, igual a número de parámetros desconocidos, (resultados, por conocer), para que se tenga una solución matemática compatible.
4. Identifique los parámetros conocidos y desconocidos de las ecuaciones linealmente independientes, con los datos dados y los resultados por conocer del enunciado del problema, disponiendo estos parámetros o valores en unidades congruentes, para asegurar que las ecuaciones linealmente independientes que se tengan, sean dimensionalmente homogéneas.
5. Si el número de ecuaciones linealmente independientes obtenidas al aplicar el paso no. 3 es igual o mayor que el número de parámetros desconocidos; continuar los siguientes pasos en caso contrario, si por el paso n° 3, existen más incógnitas que ecuaciones independientes linealmente, es necesario obtener las ecuaciones adicionales en la

**Principios de Mecánica para Ingeniería**

forma siguiente:

- a) Mediante relaciones geométricas y cinemáticas en el caso de equilibrio de cuerpos rígidos y cinética de partículas o cuerpos rígidos, respectivamente.
  - b) Trazando diagramas de cuerpo libre de partes diferentes del sistema y repitiendo el paso n° 3.
  - c) Aplicando las ecuaciones de rozamiento cuando existe deslizamiento o el movimiento es inminente entre las dos superficies rugosas en contacto.
6. Organice las ecuaciones linealmente independientes en un orden que simplifique su solución; resuelva las ecuaciones necesarias algebraicamente hasta donde sea práctico, después termine la solución numéricamente. Represente sus respuestas numéricas, con el número apropiado de cifras significativas y en unidades coherentes. Encontrará que, en la mayor parte de los ejemplos y ejercicios de este libro, se dan los datos hasta con tres o cuatro cifras significativas. En general, al menos que se establezca lo contrario, puede suponer que todos los datos que se dan en este libro son exactos hasta tres cifras significativas.
7. Estudie las respuestas con juicio técnico y sentido común, haciendo las reflexiones y conclusiones que pueda, a partir de estas respuestas
8. Una vez que el proceso de solución del problema ha sido concluido, pondere la posibilidad de que otros medios diferentes, se obtengan las mismas respuestas a la solución del problema.

El aplicar este procedimiento general, requiere hacer el trabajo tan limpio como sea posible. Por lo general la limpieza en el trabajo estimula pensar claro y ordenadamente.

## 1.6. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

### Ejemplos de discusión

Ejemplo 1.1 en la figura 1.19 un instrumento topográfico (teodolito o Transito), esta en  $C$  para medir distancias y ángulos.

Respecto a los ejes fijos  $x, y, z$  en  $C$ , el punto  $A$  esta en un elevación de  $9.2^\circ$  arriba del plano horizontal  $(x,y)$ . El cuerpo del instrumento ha girado respecto al eje vertical  $z$ , un ángulo de  $41^\circ$  a partir de la dirección positiva del eje  $x$ , para alinearse con  $A$ .

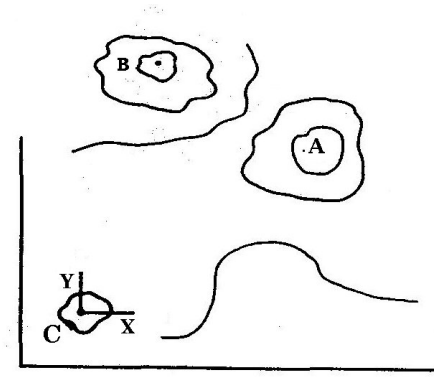


Figura 1.19

La distancia desde  $C$  a  $A$  es de  $5005m$ . Los valores correspondientes para el punto  $B$  son  $1.3^\circ$ ,  $73.4^\circ$  y  $7037m$ .

Determine

- La localización de los puntos  $A$  y  $B$  en coordenadas cartesianas relativas a los ejes que pasan por el punto  $C$ ,
- la distancia de  $A$  a  $B$ ,
- la distancia de  $A$  a  $B$  proyectada sobre el plano horizontal  $(x,y)$

*Solución* ver figura 1.20 para el punto  $A$ ,  $r=5005m$ ,  $\theta=41^\circ$ ,  $\varnothing=9.2^\circ$ .

$$\begin{aligned} z &= r \sen \varnothing = 5005 \sen (9.2^\circ) = 800.2m \\ R &= r \cos \varnothing = 5005 \cos (9.2^\circ) = 4941.0m \\ x &= R \cos \theta = 4941 \cos (41^\circ) = 3729.0m \\ y &= R \sen \theta = 4941 \sen (41^\circ) = 3242.0m \end{aligned}$$

Por tanto,  $A$  se localiza en el punto  $(3729,3242,800.2)m$

Para el punto  $B$ ;  $r=7037m$ ,  $\theta = 73.4^\circ$ ,  $\varnothing=1.3^\circ$

$$\begin{aligned} z &= r \sen \varnothing = 7037 \sen (1.3^\circ) = 159.7m \\ R &= r \cos \varnothing = 7037 \cos (1.3^\circ) = 7035.2m \\ x &= R \cos \theta = 7035.2 \cos (73.4^\circ) = 2010.0m \\ y &= R \sen \theta = 7035.2 \sen (73.4^\circ) = 6742.0m \end{aligned}$$

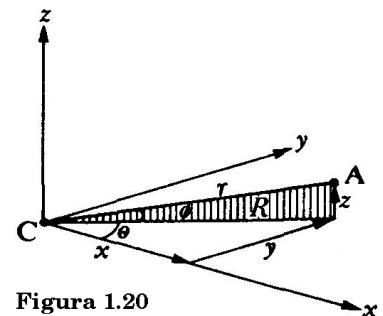


Figura 1.20

## Principios de Mecánica para Ingeniería

Por lo que B se localiza en el punto  $(2010, 6742, 154.7)m$

Sumando los vectores  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{AB}$ , tenemos:

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

o

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$$

$$\begin{aligned} &= (2010\mathbf{i} + 6742\mathbf{j} + 159.7\mathbf{k}) - (3729\mathbf{i} + 3242\mathbf{j} + 800.2\mathbf{k}) \\ &= (-1719\mathbf{i} + 3500\mathbf{j} - 640.5\mathbf{k})m \end{aligned}$$

La distancia de A a B esta dada por

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1719)^2 + (3500)^2 + (-640.5)^2} = 3952m$$

Y la componente de  $\overrightarrow{AB}$  en el plano (x y) es:

$$|\overrightarrow{AB}|_{x,y} = \sqrt{(-1719)^2 + (3500)^2} = 3900m$$

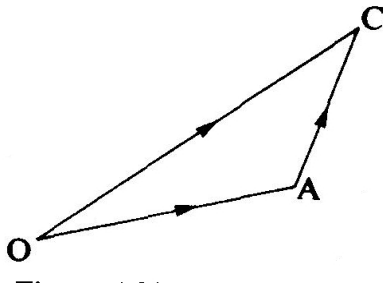


Figura 1.21

Ejemplo 1.2 El punto A es localizado en  $(0, 3, 2)m$  y el punto B en  $(3, 4, 5)m$ . Si el vector de posición de A a C es  $(-2, 0, 4)m$ , encontrar la localización del punto C y el vector de posición de B a C

*Solución* Una aplicación sencilla de las leyes de la adición vectorial es todo lo que se requiere para la solución de este problema. Refiriéndonos a la figura 1.21

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ &= (3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \\ &= -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

De aquí que el punto C se localiza en  $(-2, 3, 6)m$

En forma similar:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\vec{BC} &= \vec{OC} - \vec{OB} \\ &= (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= (-5\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k})m\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $P$  se localizan en  $(2,2,-4)m$ ,  $(5,7,-1)m$  y  $(3,4,5)m$  respectivamente, determinar la componente escalar del vector  $\mathbf{OP}$  en la dirección de  $B$  a  $A$  y la componente vectorial paralela a la recta  $AB$ .

*Solución:* Para determinar la componente de un vector dado en una dirección particular, primero obtenemos el vector unitario en esta dirección y después realizamos el producto punto entre el vector unitario y el vector dado. Esto nos da la magnitud de la componente, la de otra manera conocemos como la componente escalar

El vector  $\vec{BA}$  se determina de la relación

$$\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$$

Así

$$\begin{aligned}\vec{BA} &= \vec{OA} - \vec{OB} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) - (5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \\ &= (-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k})m\end{aligned}$$

La longitud del vector  $\mathbf{BA}$  esta dada por

$$|\vec{BA}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{43}m$$

Y el vector unitario es:

$$\mathbf{e} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \frac{-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{43}}$$

La componente escalar requerida es

$$\begin{aligned}\mathbf{OP} \cdot \mathbf{e} &= \frac{(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k})}{\sqrt{43}} \\ &= \frac{-(3 \times 3 + 4 \times 5 + 5 \times 3)}{\sqrt{43}} = -6.71m\end{aligned}$$

El signo (-) indica que la componente  $OP$  (tomando la dirección de  $O$  a  $P$  como positiva) paralela a  $BA$  es un sentido opuesto a la dirección de  $B$  a  $A$ .

Si se quiere representar la componente de  $OP$  en la dirección descrita como un vector multiplicaremos la componente escalar por el vector unitario para esta dirección  $BA$ . Por lo tanto

$$\overrightarrow{OP}_{BA} = \frac{-(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k})(-6.71)}{\sqrt{43}} = (3.07\mathbf{i} + 5.12\mathbf{j} + 3.07\mathbf{k})m$$

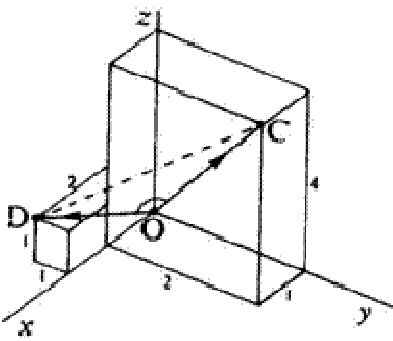


Figura 1.22

Ejemplo 1.4. En la Figura 1.22, los puntos  $C$  y  $D$  se localizan en  $(1,2,4)m$  y  $(2,-1,1)m$  respectivamente. Encuentre la longitud de  $DC$  y el ángulo  $COD$ , donde  $O$  es origen del sistema de coordenadas.

*Solución:* Si primero obtenemos una expresión en forma vectorial para  $CD$ , luego el modulo de este vector será su longitud requerida.

Del principio de adición de vectores,

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}, \text{ tal que}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$= (2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k}) - (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = (1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k})m$$

$$\text{y } \left| \overrightarrow{CD} \right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19} = 4.36m$$

Del producto escalar o producto punto de dos vectores que implica el ángulo entre estos vectores

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = (OC)(OD)\cos(\angle COD)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \cos(\angle COD) &= \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{((OC)(OD))} = \frac{(1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{\left\{ \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \right\}} \\ &= \frac{(2 + (-2) + 4)}{((\sqrt{21})(\sqrt{6}))} = \frac{4}{\sqrt{126}} = 0.363 \end{aligned}$$

$$Y \quad \angle COD = 69.12^\circ$$

Como una verificación, podemos determinar  $\angle COD$  de la ley del coseno:

$$\begin{aligned} \cos(\angle COD) &= \frac{(OC^2 + OD^2 - CD^2)}{((OC)(OD))} \\ &= \frac{(21 + 6 - 19)}{((2\sqrt{6})(21))} = \frac{4}{\sqrt{126}} = 0.3563 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\angle COD = 69.12^\circ$$

Ejemplo 1.5. Encontrar un vector unitario perpendicular al plano definido por los vectores libres

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$$

*Solución:*  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es un vector perpendicular al plano de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

Un vector unitario paralelo a  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \mathbf{n}$$

Por lo que

$$\mathbf{n} = \frac{(15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k})}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}} = \frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Otro vector unitario opuesto en dirección, es  $-\mathbf{n}$

Es decir,

$$-\mathbf{n} = \frac{-3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Ejemplo 1.6. Comprobar por medio vectorial la ley de los senos para triángulos planos.

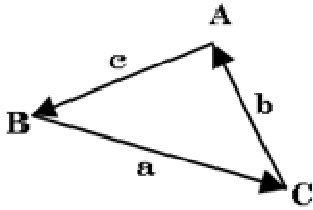


Figura 1.23

*Solución:* sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados del triángulo  $ABC$  como se muestra en la figura 1.23; por lo que  $a + b + c = 0$  multiplicando ambos miembros de esta igualdad por  $a \times$ ,  $b \times$ , y  $c \times$  en forma sucesiva, tenemos:

$$a \times (a + b + c) = 0 \rightarrow a \times b = c \times a \quad (a)$$

$$b \times (a + b + c) = 0 \rightarrow b \times c = a \times b \quad (b)$$

$$c \times (a + b + c) = 0 \rightarrow c \times a = b \times c \quad (c)$$

De las ecuaciones (a), (b), (c) se determina que

$$\left. \begin{array}{l} a \times b = b \times c = c \times a \\ \text{Esto es } ab \operatorname{sen} C = bc \operatorname{sen} A = ca \operatorname{sen} B \\ \text{o} \\ \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \end{array} \right\} \text{Ley de los senos}$$

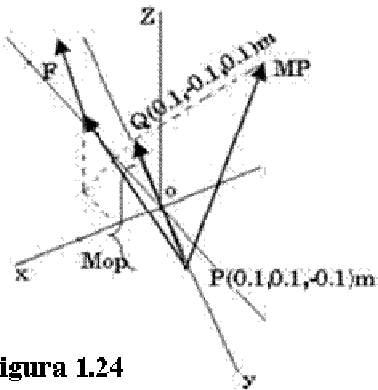


Figura 1.24

**Ejemplo 1.7.** Un vector fuerza  $F = \left(\frac{45}{13}\right)(3i - 4j + 12k)N$  con línea de acción pasando por  $Q(0.1, -0.1, 0.1)m$ . Encontrar el momento de  $F$  con respecto a la recta que une el origen  $O$  al punto  $P(0.0, 0.1, -0.1)m$ , figura (1.24).

*Solución:* a) Primero determinaremos el momento de la fuerza  $F$  con respecto al punto  $P$  y después, b) con respecto a la recta  $OP$ .

a). El vector de posición de  $P$  a  $Q$  es

$$r_{PQ} = (0.1i - 0.2j + 0.2k)$$

El momento de  $F$  con respecto a  $P$ , se calcula mediante el producto vectorial de  $r_{PQ}$  y  $F$ ,

$$M_P = r_{PQ} \times F = \left(\frac{45}{13}\right) \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0,1 & -0,2 & 0,2 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} (N \cdot m)$$



$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{45}{13}\right)(-1.6\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k})(N \cdot m) \\
&= \left(\frac{45}{13}\right)\sqrt{2.96}\left(-\frac{1.6}{\sqrt{2.96}}\mathbf{i} - \frac{0.6}{\sqrt{2.96}}\mathbf{j} + \frac{0.2}{\sqrt{2.96}}\mathbf{k}\right) \\
&= 5.955(\lambda_p)N \cdot m
\end{aligned}$$

- b). El vector unitario  $\mathbf{e}$  en la dirección del vector de posición  $OP = 0.1\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k}$  es

$$\mathbf{e} = \frac{(0.1\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k})}{\sqrt{[(0.1)^2 + (-0.1)^2]}} = \frac{(0.1\mathbf{j} - 0.1\mathbf{k})}{[\sqrt{0.02}]} = \frac{\left(\frac{1}{10}(\mathbf{j} - \mathbf{k})\right)}{\left(\frac{1}{10}\sqrt{2}\right)}$$

Por lo tanto el momento de  $\mathbf{F}$  respecto a  $OP$  es

$$\mathbf{M}_{OP} = [\mathbf{M}_P \cdot \mathbf{e}]\mathbf{e} = [(\mathbf{r}_{PQ} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}]\mathbf{e}$$

Sustituyendo valores y resolviendo para el triple producto escalar.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{OP} &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.1 & -0.2 & 0.2 \\ \frac{135}{13} & \frac{180}{13} & \frac{540}{13} \end{vmatrix} (\mathbf{e}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{45}{13}\right) \begin{vmatrix} 0 & 1-1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} (\mathbf{e}) \\
&= \frac{45\sqrt{2}}{(20)13} \begin{vmatrix} 0 & 1-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} (\mathbf{e}) \\
&= \frac{45\sqrt{2}}{260} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} (\mathbf{e}) \\
&= -\left(\frac{18\sqrt{2}}{13}\right)\mathbf{e} \text{ Nm} \\
&= -1.958\mathbf{e} \text{ Nm}
\end{aligned}$$

Pero también

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{OP} &= [Mp \cdot \mathbf{e}] \mathbf{e} \\
 &= \left[ \frac{45}{13} (-1.6 \mathbf{i} - 0.6 \mathbf{j} + 0.2 \mathbf{k}) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k} \right) \right] \mathbf{e} \\
 &= \left[ \frac{45}{13} \left( -\frac{0.6 \sqrt{2}}{2} - \frac{0.2 \sqrt{2}}{2} \right) \right] \mathbf{e} \\
 &= \left[ \frac{45 \sqrt{2}}{(13)(20)} (-6 - 2) \right] \mathbf{e} \\
 &= \left[ \frac{45 \sqrt{2}}{13 (20)} (-8) \right] \mathbf{e} \\
 &= \left( \frac{18 \sqrt{2}}{13} \right) \mathbf{e} \text{ Nm} = -1.958 \mathbf{e} \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

Quedando finalmente en forma de vector

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{OP} &= - \left( \frac{18 \sqrt{2}}{13} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} - \sqrt{\frac{2}{2}} \mathbf{k} \right) \text{ Nm} \\
 &= - \left( \frac{18}{13} \mathbf{j} - \frac{18}{13} \mathbf{k} \right) \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8. Encontrar el vector  $D$  en términos de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de la siguiente expresión.

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B}$$

*Solución:* Como el vector  $D$  es la suma de todos los triple productos vectorial (con los paréntesis en el mismo lugar) formada por los vectores  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en orden cíclico. Por lo que, de acuerdo a la expresión reducida del triple producto vectorial tenemos

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}, \\
 (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{C} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}, \\
 (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C},
 \end{aligned}$$

Sumando estas expresiones y usando la conmutatividad natural del producto escalar de dos vectores, vemos que  $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ ; esto es, para cualquiera de tres vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = 0$$

Ejemplos de discusión y ejercicios de trabajo, referentes a la aplicación de los principios del calculo infinitesimal de cantidades escalares y vectoriales, que utilizan en la Mecánica de Ingeniería, no se han considerado en este tema 1.6, por ser contemplados en los restantes capítulos de este libro, en forma directa y con mayor detalle de su aplicación a la mecánica

### *Ejercicios de Trabajo*

- 1.1. Un vector de posición esta dado por  $\mathbf{OP} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})m$  determina su vector unitario.
- 1.2. Un segmento de recta  $\overline{PQ}$  con una longitud de  $6m$  y una dirección dada por el vector unitario  $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ . Escriba  $\overline{PQ}$  como un vector.
- 1.3. Un punto  $A$  esta en  $(1, 2, 3)m$  y el vector de posición de punto  $B$  relativo al punto  $A$ , es  $(6\mathbf{i} + 3\mathbf{k})m$ . Determine la posición de  $B$  relativa al origen del sistema de coordenadas.
- 1.4. Determine el vector unitario para el segmento, de recta que une los puntos  $C$  y  $D$ , en la dirección de  $C$  a  $D$ , donde  $C$  esta en el punto  $(0, 3, -2)m$  y  $D$  esta en  $(5, 5, 0)m$ .
- 1.5. El punto  $A$  se localiza en  $(5, 6, 7)m$  y el punto  $B$  en  $(2, 2, 6)m$ . Determine el vector de posición a) de  $A$  a  $B$  y b) de  $B$  a  $A$ .
- 1.6-  $P$  se localiza en el punto  $(0, 3, 2)m$  y  $Q$  en el punto  $(3, 2, 1)m$ . Obtenga el vector de posición de  $P$  a  $Q$

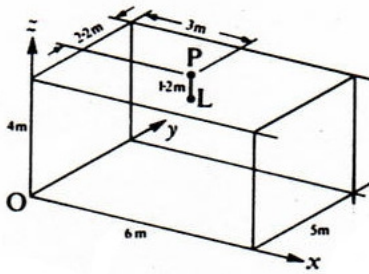


Figura 1.25

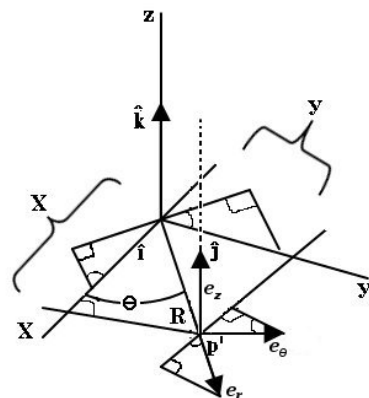


Figura 1.26

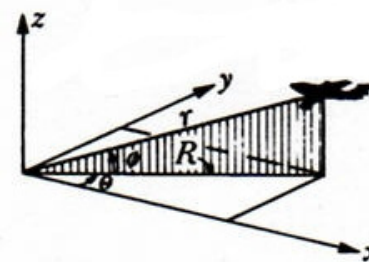


Figura 1.27

y su vector unitario.

- 1.7.  $A$  está en el punto  $(1, 1, 2)m$ . La posición del punto  $B$  relativa a  $A$  es  $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})m$  y la de un punto  $C$  relativa a  $B$  es  $(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})m$ . Encontrar la localización del punto  $C$ .
- 1.8. Las dimensiones de un salón son  $6m \times 5m \times 4m$ , como se muestra en la figura 1.25. Un cable está suspendido desde el punto  $P$  en el techo del cuarto y una lámpara  $L$  está en el extremo del cable a  $1.2m$  verticalmente abajo de  $P$ .

Determinar las coordenadas cartesianas y cilíndricas de la lámpara  $L$  relativas a los ejes  $x, y, z$  y también encontrar las expresiones algebraicas para los vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas  $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_z$  en términos de  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

- 1.9. Comprobar que las relaciones entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas están regidas por las siguientes ecuaciones (ver figura 1.26);

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

- 1.10. En la figura 1.27 se muestra la localización de una aeronave en coordenadas esféricas relativas a una instalación de radar, siendo esta  $(20000m, 33.7^\circ, 12.5^\circ)$ . Determine la localización de esta aeronave en coordenadas cartesianas y cilíndricas.
- 1.11. ¿Cuáles son los ángulos entre la recta que une el origen  $O$  y un punto en  $(2, -5, 6)m$  y los ejes positivos  $x, y, z$ ?

- 1.12. En el ejercicio 1.7, determinar el ángulo  $ABC$ .
- 1.13. Un vector está dado por  $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 1\mathbf{k})m$ . ¿Cuál es el componente de este vector a) en la dirección  $y$ , b) en una dirección paralela a la recta que une los puntos  $A$  y  $B$ , donde  $A$  es un punto  $(1, 1, 0)m$  y  $B$  está en  $(3, 4, 5)m$ .
- 1.14. Encontrar la distancia perpendicular desde el punto  $(5, 6, 7)m$  a cada uno de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .
- 1.15. Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son localizados en  $(1, 2, 1)m$ ,  $(5, 6, 7)m$  y  $(-2, -5, 6)m$  respectivamente. Determinar a) la distancia perpendicular de  $B$  a la recta que pasa por  $AC$  y b) el ángulo  $BAC$ .
- 1.16. Calcular la distancia perpendicular del punto  $P(1, 1, 1)m$  a la recta que pasa por los puntos  $A(-1, 0, 5)m$  y  $B(2, 1, -2)m$ .
- 1.17. Un plano pasa a través de tres puntos,  $P(1, 1, 1)$ ;  $Q(-1, 2, 3)$  y  $R(4, 5, 13)$ . ¿Cuál es la distancia perpendicular desde el punto  $(3, 1, -5)$  al plano?
- 1.18. Dados dos vectores no paralelos  $A$  y  $B$ , establezca un sistema de tres vectores mutuamente perpendiculares  $D$ ,  $E$ , y  $F$  en términos de  $A$  y  $B$ .
- 1.19. Encontrar el triple producto  $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A}$  de  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = 1\mathbf{k} - 1\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{C} = 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$  a) utilizando el cálculo directo y b) con la expresión reducida del triple producto vectorial.

# Fundamento de la Mecánica para Ingeniería

# 2

## CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO PLANO

### 2.1. Elementos Básicos del Movimiento

Recordemos que una partícula puede definirse como un objeto material cuyas dimensiones no son de consecuencia en la solución del problema bajo consideración. Para los propósitos de referir la cinemática de tal objeto, el movimiento puede tomarse como, el representativo de un punto material con las características o elementos del movimiento que son Desplazamiento, Velocidad y Aceleración de una partícula.

#### *Desplazamiento de una partícula*

Si una partícula ocupa la posición  $A$  en el tiempo  $t_1$  y en un tiempo posterior  $t_2$  esta adquiere la posición  $B$ , consecuentemente el desplazamiento es el vector  $AB$  como se muestra en la figura 2.1.

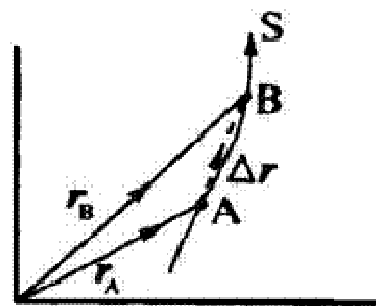


Figura 2.1

En notación vectorial,

$$\begin{aligned} r_B &= r_A + \Delta r \\ \text{o} \quad \Delta r &= r_B - r_A \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aquí el símbolo  $\Delta$  significa una diferencia finita. Si la diferencia  $\Delta t = t_2 - t_1$  es pequeña, entonces  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta r| = ds$ , un elemento diferencial de la trayectoria.

#### *Velocidad de una partícula*

La velocidad promedio de una partícula durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es definida como

$$v_{prom} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Esta es una cantidad vectorial en la dirección de  $\Delta r$ . La velocidad instantánea es definida como

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Si  $\hat{e}_t$  es un vector unitario tangente a la trayectoria, entonces como  $\Delta t \rightarrow 0, \Delta \mathbf{r} \rightarrow \Delta S \hat{e}_t$ ,

$$\text{Tal que } \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta S}{\Delta t} \hat{e}_t \right) = \frac{ds}{dt} \hat{e}_t \quad (2.2)$$

El término  $ds/dt$  es el índice de variación o cambio de la distancia recorrida por la partícula, a lo largo de la trayectoria, con respecto al tiempo y es una cantidad escalar generalmente llamada celeridad o rapidez, la ecuación (2.2) indica que la velocidad lineal tiene dimensiones de longitud dividida por el tiempo,  $LT^{-1}$ , y sus unidades comunes son metros por segundo ( $m/s$ ) en el sistema *S.I.*

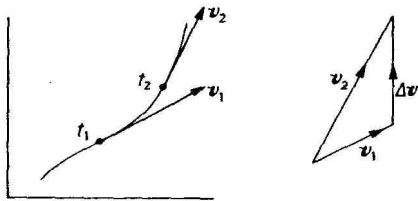


Figura 2.2.

#### *Aceleración de una partícula*

La aceleración de una partícula es definida (ver figura 2.2) como

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.3)$$

La dirección de  $\mathbf{a}$  no es obvia y no será tangente a la trayectoria, como en el caso de la velocidad, al menos que la trayectoria sea una línea recta. La ecuación (2.3) indica que las dimensiones de la aceleración son de longitud dividida por el tiempo al cuadrado,  $LT^{-2}$ , y sus unidades en el sistema *S.I.*, son metros por segundo al cuadrado ( $m/s^2$ ).

Habiendo definido la velocidad y aceleración de una manera bastante general, las componentes de estas cantidades para una partícula restringida a movimiento en un plano; de acuerdo al sistema de referencia de coordenadas elegido; puedan ahora ser formuladas.

Es útil considerar las maneras como la cantidad vectorial  $\mathbf{v}$ , puede variar con respecto al tiempo, ya que esto ayudara al entendimiento del significado completo de aceleración.



Puesto que la velocidad es definida tanto por su magnitud como su dirección, una variación en cualquiera de estas medidas, constituye una variación en el vector velocidad.

Si la velocidad se mantiene en una dirección fija entonces la aceleración tiene una magnitud igual al índice de variación de la rapidez con respecto al tiempo y esta dirigida en la misma dirección como la velocidad (no necesariamente en el mismo sentido)

Si la rapidez permanece constante, por tanto la aceleración se debe únicamente al cambio en la dirección de velocidad. Para este caso podemos ver que el diagrama vectorial (figura 2.3) es un triángulo isósceles. En el límite, para variaciones pequeñas en tiempo, y por consiguiente para pequeñas variaciones en dirección, el cambio en velocidad es normal al vector velocidad.

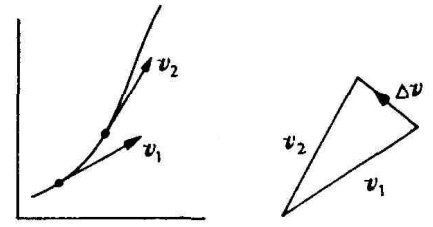


Figura 2.3

## 2.2. Movimiento Plano en Coordenadas Cartesianas

Ver figura 2.4, de la cual tenemos.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} \\ &= \Delta x \hat{\mathbf{i}} + \Delta y \hat{\mathbf{j}} \\ \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

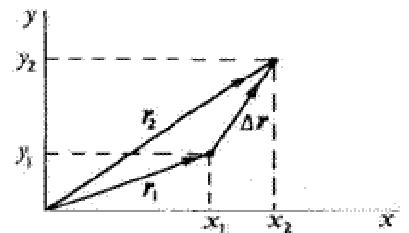


Figura 2.4

De la figura 2.5 esta claro que

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \quad (2.5)$$

Donde la derivada con respecto al tiempo se denota con un punto (·) sobre la variable, es decir,  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ .

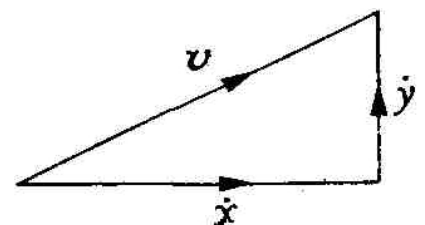


Figura 2.5

La aceleración es igualmente fácil de obtener, partiendo de:

$$\mathbf{v} = \dot{x} \hat{\mathbf{i}} + \dot{y} \hat{\mathbf{j}}$$

## Principios de Mecánica para Ingeniería

tenemos

$$\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} = (\dot{x} + \Delta \dot{x})\hat{\mathbf{l}} + (\dot{y} + \Delta \dot{y})\hat{\mathbf{j}}$$

dando

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \dot{x} \hat{\mathbf{l}} + \Delta \dot{y} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) = \lim \left( \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta t} \hat{\mathbf{l}} + \frac{\Delta \dot{y}}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}} \right)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\dot{x}}{dt} \hat{\mathbf{l}} + \frac{d\dot{y}}{dt} \hat{\mathbf{j}} = \ddot{x} \hat{\mathbf{l}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{j}} \quad (2.6)$$

y el valor absoluto de la aceleración es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)} \quad (2.7)$$

Consideremos dos casos simples del movimiento de una partícula referido en coordenadas Cartesianas.

### *i) Movimiento en una trayectoria recta con aceleración constante*

Eligiendo el eje  $x$  coincidiendo con la trayectoria del movimiento, tenemos

$$\ddot{x} = a$$

Integrando con respecto al tiempo

$$\int \ddot{x} dt = \int (dv/dt) dt = v$$

$$v = \int a dt = at + C_1 \quad (2.8)$$

donde  $C_1$  es una constante dependiendo del valor de  $v$  cuando  $t = 0$

Integrando nuevamente,

$$\int v dt = \int (dx/dt) dx = x$$

$$x = \int (at + C_1) dt = \frac{1}{2} at^2 + C_1 t + C_2 \quad (2.9)$$

Donde  $C_2$  es otra constante dependiendo del valor de  $x$  para  $t = 0$

**ii) Movimiento con rapidez constante por una trayectoria circular**

Para la trayectoria circular mostrada en figura 2.6

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (2.10)$$

Derivando en dos ocasiones con respecto al tiempo la expresión (2.10), se tiene

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

$$y \quad 2x\dot{x} + 2\dot{x}^2 + 2y\dot{y} + 2\dot{y}^2 = 0$$

Puesto que  $2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 = 2v^2$ ,

$$x\dot{x} + y\dot{y} = -v^2 \quad (2.11)$$

Vemos que, cuando  $y = 0$ ,  $x = R$ ,

$$\dot{x} = -v^2/R$$

También, cuando  $x = 0$ ,  $y = R$ ,

$$\dot{y} = -v^2/R$$

O, en general (figura 2.7), la componente de la aceleración resuelta a lo largo del radio es

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{x} \cos \alpha + \ddot{y} \sin \alpha \\ &= \ddot{x}x/R + \ddot{y}y/R \end{aligned}$$

De acuerdo a la ecuación (2.11) vemos que

$$a_r = -v^2/R \quad (a)$$

Resolviendo tangencialmente a la trayectoria,

$$\begin{aligned} a_t &= \ddot{y} \cos \alpha - \ddot{x} \sin \alpha \\ &= \ddot{y}x/R - \ddot{x}y/R \end{aligned} \quad (b)$$

Derivando  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$  con respecto al tiempo, tenemos

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

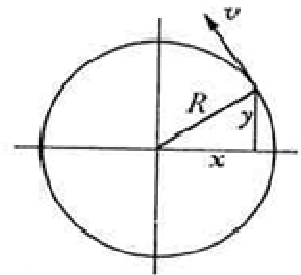


Figura 2.6

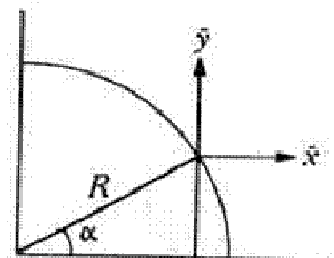


Figura 2.7

## Principios de Mecánica para Ingeniería

Por lo tanto

$$\ddot{y}/\ddot{x} = -\dot{x}/\dot{y}$$

y de la derivada de la ecuación 2.10;  $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$  tenemos

$$\dot{y}/\dot{x} = -x/y$$

dando

$$\ddot{y}/\ddot{x} = -\dot{x}/\dot{y} = y/x \Rightarrow \dot{y}x = \dot{x}y$$

Por lo tanto vemos que, de acuerdo a la ecuación (b)

$$a_t = 0$$

Este análisis debe de ser contrastado con la propuesta más directa en términos de coordenadas de trayectoria y polares, que se muestran en los siguientes temas de este capítulo.

Un ejemplo demostrativo muy importante del caso simple *i)* con aceleración constante referida a coordenadas cartesianas es el de:

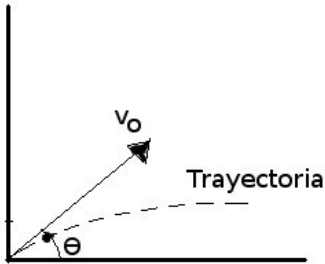


Figura Ai

Un proyectil disparado con una velocidad inicial  $v_0$  a un ángulo  $\theta$  con la horizontal, despreciando la resistencia del aire, como se muestra en la figura Ai. Describa el movimiento del vuelo del proyectil; esto es determine la trayectoria y características principales de este movimiento.

*Solución:* conocemos la aceleración del proyectil, la velocidad inicial y su posición del proyectil, por tanto suponemos, estar capacitados para ejecutar una integración para determinar la velocidad del proyectil y la trayectoria del movimiento de esta partícula o cuerpo. Como el proyectil viaja muy cercano a la superficie terrestre, el cuerpo tiene una aceleración vertical hacia abajo debido a la gravedad.

Así

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{a})$$

Y la velocidad inicial y posición del cuerpo es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= (v_0 \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \theta) \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_0 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

La velocidad del cuerpo es determinada por la ejecución de una integración de la aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a} dt = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \mathbf{v}_0 + \int_0^t -g \hat{\mathbf{j}} dt \\ &= (v_0 \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \theta - gt) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (\text{c})$$

y el desplazamiento del cuerpo se obtiene por la integración de la velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v} dt \\ &= (v_0 t \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} + \left( v_0 t \sin \theta - \frac{gt^2}{2} \right) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (\text{c}')$$

así, la trayectoria del movimiento se da en forma paramétrica

$$x(t) = v_0 t \cos \theta \quad (\text{d})$$

$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{gt^2}{2} \quad (\text{e})$$

Si despejamos  $t$  de la ecuación (d), y lo sustituimos en la ecuación (e), nos da

$$y = xt \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{f})$$

Por lo tanto se ve en la ecuación (f) que la trayectoria del movimiento de la partícula, será de forma parabólica. Otras propiedades de la trayectoria pueden ser determinadas, como el alcance o rango del movimiento, el que se determina estableciendo  $y = 0$  en la ecuación (f):

## Principios de Mecánica para Ingeniería

$$0 = x \left( \operatorname{tg} \theta - \frac{gx}{2v_0^2 \cos \theta} \right) \quad (\text{g})$$

$$0 = x \left( \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right)$$

y, resolviendo para  $x$

$$\begin{aligned} x = 0; \quad x = R &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta}{g \cos \theta} \\ &= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \end{aligned} \quad (\text{h})$$

Puede observarse que el alcance máximo ocurre cuando  $\theta = 45^\circ$ .

El tiempo de vuelo del proyectil puede encontrarse introduciendo  $y = 0$  en la ecuación (e)

$$0 = v_0 t \operatorname{sen} \theta - \frac{gt^2}{2}$$

Resolviendo para  $t$

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \quad (\text{i})$$

La altura máxima que el proyectil alcanza puede encontrarse de acuerdo a la ecuación (e), para determinar la distancia vertical  $y_{\max}$  cuando el tiempo de vuelo es la mitad del tiempo total del vuelo:

$$y = v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2}$$

Para  $t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$ , tenemos

$$y = v_0 \operatorname{sen} \theta \left( \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right) - \frac{g \left( \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right)^2}{2}$$

$$y_{max} = h = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \theta}{2g}$$

### 2.3. Movimiento Plano en Coordenadas de Trayectoria

El desplazamiento  $\Delta r$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es mostrado en la figura 2.8, donde  $\Delta s$  es la longitud del elemento de trayectoria. Con respecto a la figura 2.9, la dirección de la trayectoria ha variado en un ángulo  $\Delta\theta$  y la rapidez se ha incrementado por  $\Delta v$ . Indicando que la magnitud de  $v(t+\Delta t)$  es  $(v+\Delta v)$ , la variación en velocidad resuelta a lo largo de la normal inicial (original) es

$$(v + \Delta v)\text{sen}\Delta\theta$$

Por lo tanto la aceleración en esta dirección es

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v)\text{sen}\Delta\theta}{\Delta t}$$

Para  $\Delta\theta$  muy pequeño,  $\text{sen} \Delta\theta \rightarrow \Delta\theta$ ; así tenemos

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{(v\Delta\theta)}{\Delta t} + \frac{\Delta v\Delta\theta}{\Delta t} \right) = v \frac{d\theta}{dt}$$

y está dirigido hacia el centro de curvatura, esto es, en la dirección de  $\hat{e}_n$

si  $\rho$  es el radio de curvatura, entonces

$$ds = \rho d\theta$$

por lo tanto

$$\frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt}$$

por consiguiente

$$a_n = v \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \quad (2.12)$$

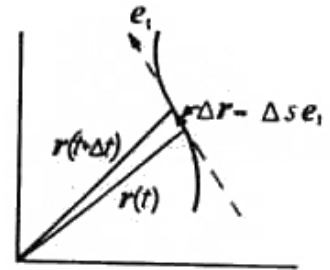


Figura 2.8

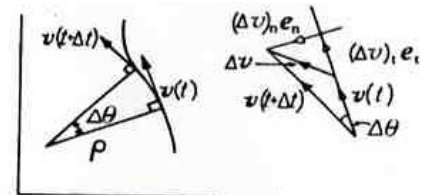


Figura 2.9

## Principios de Mecánica para Ingeniería

El cambio en velocidad a lo largo de la tangente a la trayectoria es

$$(v + \Delta v)\cos\Delta\theta - v$$

Por tanto la aceleración en la dirección tangente a la trayectoria es

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{(v + \Delta v)\cos\Delta\theta - v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt} = a_t \quad (2.13)$$

Resumiendo, tenemos

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_t = \frac{dS}{dt}\hat{\mathbf{e}}_t \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{e}}_t + v\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{e}}_n \quad (2.14b)$$

$$= \frac{d^2S}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n \quad (2.14c)$$

Consideremos ahora los casos simples precedentes

**i). Movimiento en una trayectoria recta con aceleración constante**

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{e}}_t \quad (\hat{\mathbf{e}}_t \text{ en dirección fija})$$

$$\text{o} \quad \frac{d^2S}{dt^2} = a \quad (2.15)$$

La solución en la misma que para coordenadas cartesianas con  $x$  remplazado por  $s$ .

**ii) Movimiento en una trayectoria circular con rapidez constante**

$$\mathbf{a} = \left( \frac{v^2}{\rho} \right) \hat{\mathbf{e}}_n \quad (v \text{ y } \rho \text{ son constantes}) \quad (2.16)$$



### 2.4. Movimiento Plano en Coordenadas Polares.

Las coordenadas polares son un caso especial de las coordenadas cilíndricas con  $z = 0$ , o de las coordenadas esféricas con  $\Phi = 0$

Refiriéndonos a la figura 2.10, puede verse que

$$\Delta \mathbf{r} = [(r + \Delta r)\cos\Delta\theta - r]\hat{\mathbf{e}}_r + (r + \Delta r)\sin\Delta\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

por lo que la velocidad esta dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \left( \frac{dr}{dt} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + r \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \quad (2.17)$$

Resolviendo para las componentes de  $\Delta \mathbf{v}$  a lo largo de las direcciones  $\hat{\mathbf{e}}_r$  y  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  (Figura 2.11), tenemos

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{r}} &= [(\dot{r} + \Delta \dot{r})\cos\Delta\theta - (r + \Delta r)(\dot{\theta} + \Delta \dot{\theta})\sin\Delta\theta - \dot{r}]\hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ [(\dot{r} + \Delta \dot{r})\sin\Delta\theta + (r + \Delta r)(\dot{\theta} + \Delta \dot{\theta})\cos\Delta\theta - r\dot{\theta}]\hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned}$$

Para ángulos muy pequeños,  $\sin\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta$  y  $\cos\Delta\theta \rightarrow 1$  y en el límite  $(\Delta v)(\Delta\theta) \cong 0$ ; por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \dot{\mathbf{r}}}{\Delta t} \right) = \left( \frac{dv}{dt} - r\dot{\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left( r \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \quad (2.18^3)$$

Una vez más consideremos los dos casos simples (i) y (ii)

**i) Movimiento en una línea recta con aceleración constante**

$\theta = 0$  todo el tiempo

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_r = a_r\hat{\mathbf{e}}_r \quad (2.19)$$

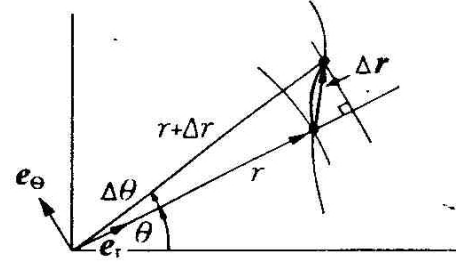


Figura 2.10

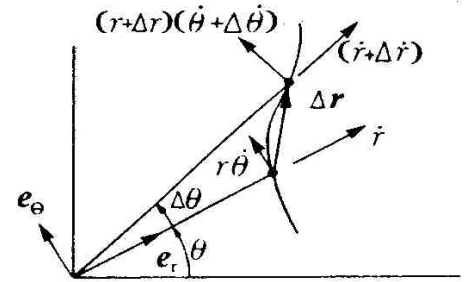


Figura 2.11

<sup>3</sup> En (2.18);  $\dot{\theta} = \dot{\omega} \rightarrow$  velocidad angular en rad/s,  $\ddot{\theta} = \ddot{\omega} = \alpha \rightarrow$  aceleración angular en rad/s<sup>2</sup>

ii) *Movimiento en una trayectoria circular con rapidez constante*

$r = \text{constante todo el tiempo}$

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

Debido a que  $r$  y  $v$  son constantes,  $\theta$  es constante; tal que

$$\mathbf{a} = r\dot{\theta}^2 \hat{e}_r = -(v^2/r)\hat{e}_r \quad (2.20)$$

Podemos considerar también otro ejemplo simple, que es aquel, de una pequeña bola flotante que viaja a una rapidez constante a lo largo de un rayo radial de una rueda de bicicleta, que gira con una rapidez constante.

En este caso

$$\mathbf{a} = [-r\dot{\theta}^2]\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

de esta manera, vemos que existe una componente constante de la aceleración  $2\dot{r}\dot{\theta}$ , en un ángulo recto ( $90^\circ$ ) al rayo, independiente de  $r$ . Esta componente se le conoce como la componente de Coriolis de la aceleración, en honor al Ingeniero Francés Gustavo Gaspar Coriolis.

## 2.5 Movimiento Relativo de Partículas

En esta sección o tema adoptaremos la siguiente notación:

$\mathbf{r}_{B/A}$  = posición de  $B$  relativa a  $A$

$\dot{\mathbf{r}}_{B/A}$  = velocidad de  $B$  relativa a  $A$ ,...

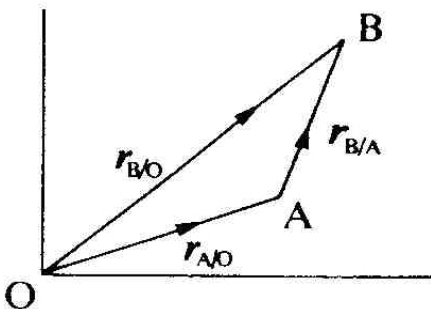


Figura 2.12

De la figura 2.12

$$\mathbf{r}_{B/O} = \mathbf{r}_{A/O} + \mathbf{r}_{B/A} \quad (2.21)$$

Derivando con respecto al tiempo, nos da

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/O} = \dot{\mathbf{r}}_{A/O} + \dot{\mathbf{r}}_{B/A}; \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (2.22)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{B/O} = \ddot{\mathbf{r}}_{A/O} + \ddot{\mathbf{r}}_{B/A}; \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (2.23)$$

[la notación  $\dot{\mathbf{r}}_B$  y  $\ddot{\mathbf{r}}_B$  puede usarse en lugar de  $\dot{\mathbf{r}}_{B/O}$  y  $\ddot{\mathbf{r}}_{B/O}$  para la velocidad y aceleración relativas al origen de los ejes de referencia]

Consideremos ahora el caso de una rueda de radio  $r$ , centro en  $A$ , moviéndose de tal forma que  $A$  tiene movimiento rectilíneo en la dirección  $x$  y la rueda está rotando a una rapidez angular  $\omega = \dot{\theta}$  (figura 2.13). La trayectoria trazada por un punto  $B$  en el exterior de la llanta de la rueda es compleja, pero la velocidad y aceleración de  $B$  puede fácilmente obtenerse usando las ecuaciones (2.22) y (2.23).

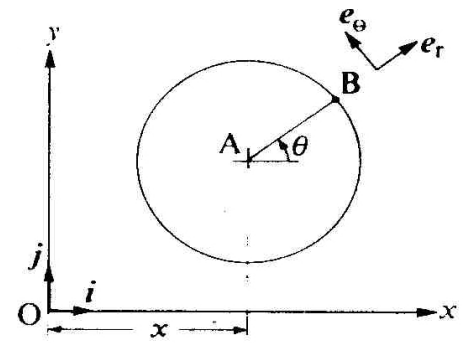


Figura 2.13

Refiriéndose a la figura 2.13

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/O} = \dot{x}\hat{\mathbf{l}} + (r\omega\hat{\mathbf{e}}_\theta) = \dot{x}\hat{\mathbf{l}} + (-r\omega\sin\theta\hat{\mathbf{l}} + r\omega\cos\theta\hat{\mathbf{j}}) \quad (2.24)$$

en forma semejante,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{B/O} &= \ddot{x}\hat{\mathbf{l}} + (-r\omega^2\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\omega}\hat{\mathbf{e}}_\theta) \\ &= \ddot{x}\hat{\mathbf{l}} - r\omega^2(\cos\theta\hat{\mathbf{l}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}) + r\dot{\omega}(-\sin\theta\hat{\mathbf{l}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (\ddot{x} - r\omega^2\cos\theta - r\dot{\omega}\sin\theta)\hat{\mathbf{l}} + (-r\omega^2\sin\theta + r\dot{\omega}\cos\theta)\hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Un caso especial de la situación precedente, es la de rodamiento pero (sin deslizamiento) de la rueda. Esto implica que cuando  $\theta = 3\pi/2$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_{B/O} = 0$ . Esto es

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/O} = (\dot{x} + r\omega)\hat{\mathbf{l}} + 0\hat{\mathbf{j}} = 0$$

entonces:

$$\dot{x} = -r\omega$$

también

$$\ddot{\mathbf{r}}_{B/O} = (\ddot{x} + r\dot{\omega})\hat{\mathbf{l}} + (r\omega^2)\hat{\mathbf{j}} \quad (2.26)$$

pero

$$\ddot{x} = -r\dot{\omega}$$

por consiguiente

$$\ddot{\mathbf{r}}_{B/O} = r\omega^2\hat{\mathbf{j}} \quad (2.27)$$

obsérvese que, derivando  $\dot{r}_{B/O}(\theta = 3\pi/2)$  no da  $\ddot{r}_{B/O}(\theta = 3\pi/2)$ :  $\theta$  deberá incluirse como una variable de derivación.

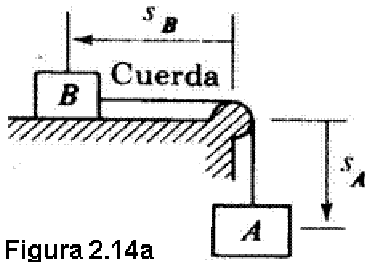


Figura 2.14a

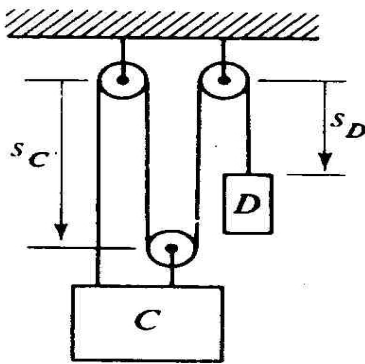


Figura 2.14b

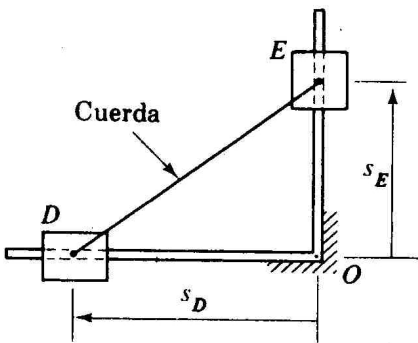


Figura 2.14c

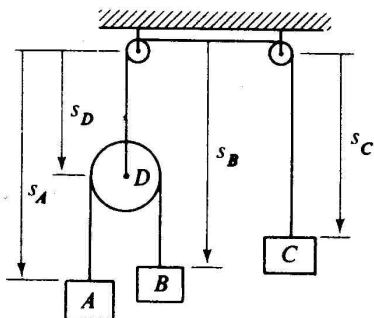


Figura 2.14d

### 2.5.1. Movimiento relativo dependiente

Cuando dos o más partículas están en movimiento simultáneo, sus movimientos pueden ser completamente independientes. Consideremos, por ejemplo, dos trenes moviéndose en vías paralelas y distintas. La posición, velocidad o aceleración de un tren no influye en la posición, velocidad o aceleración de otro tren; por tanto, sus movimientos son independientes. Por el contrario, si las partículas o cuerpo están conectados por cuerdas, cables, varilla, resortes u otro elemento de restricción, de cualquier modo, el movimiento de uno de los cuerpos afectará generalmente el movimiento de cada uno de los otros cuerpos, en estas condiciones estamos ante la presencia del movimiento relativo dependiente de varias partículas o cuerpos. Algunos ejemplos de tal movimiento son ilustrados en las figuras 2.14 a, b c y d, en las cuales, cada partícula o cuerpo tiene movimiento rectilíneo, estando las partículas o cuerpos conectados por cables inextensibles y flexibles. En la figura 2.14a, si el cuerpo A se mueve hacia abajo una distancia  $\Delta s_A$ , el cuerpo B debe desplazarse la misma distancia hacia la derecha y las coordenadas de posición de los dos cuerpos están relacionadas por la longitud del cable o cuerda que los conecta. Las posiciones de los cuerpos C y D de la figura 2.14b también están relacionadas por la longitud de la cuerda que los interconecta, pero en este caso la relación es menos obvia que en el caso anterior. Las figuras 2.14c y 2.14d son otros ejemplos en los cuales la posición de uno de los cuerpos esta relacionada a la posición de los otros cuerpos por el cable o cuerda que los conecta.

Las relaciones entre las velocidades y entre las aceleraciones de los cuerpos interconectados, se obtienen

mediante la derivación con respecto al tiempo de una o más ecuaciones que relacionan las posiciones de los cuerpos. Una bien definida asignación o elección de los signos en las direcciones respecto a las posiciones de estos cuerpos es esencial o de mayor importancia para que los resultados se interpreten correctamente. La coordenada que nos da la posición de cada uno de los cuerpos en los diferentes figuras 2.14, es mostrada con una flecha que indica la dirección positiva. En estos ejemplos la posición de cada cuerpo se mide a partir de una referencia fija en lugar de hacerlo desde un origen en movimiento. Por tanto en la figura 2.14d la posición de  $A$  se mide desde las poleas que permanecen fijas respecto al desplazamiento vertical, más que, desde la polea en movimiento  $D$ .

## 2.6. Movimiento Unidimensional

La expresión “unidimensional” no es considerada como un sinónimo con “rectilíneo, pues, no obstante que el movimiento rectilíneo es unidimensional, no todo movimiento unidimensional es rectilíneo.

Tenemos movimiento unidimensional referido en coordenadas de trayectoria, si consideramos solamente el desplazamiento a lo largo de la trayectoria; en coordenadas polares consideramos solamente variaciones en ángulo, refiriendo el radio como constante. Consideremos una situación cinemática en coordenadas de trayectoria, figura 2.15, la localización de  $P$  estando determinada por  $S$  medida a lo largo de la trayectoria desde algún origen  $O$ . (esta trayectoria puede, por supuesto, ser una línea recta.)

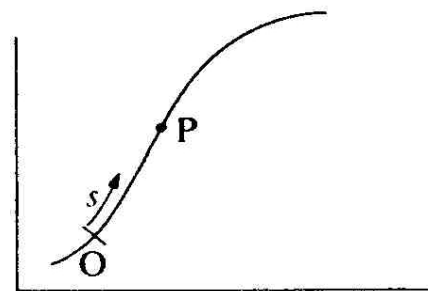


Figura 2.15

La rapidez es definida como  $v = ds/dt$ , y  $dv/dt$  es el índice de variación de la rapidez con respecto al tiempo. Esta cantidad es también la componente de la aceleración tangente a la trayectoria, más no es la aceleración total.

Podemos escribir

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds}$$

Por lo que

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = v \frac{dv}{ds} \quad (2.28)$$

La mayoría de los problemas en cinemática unidimensional requieren convertir datos dados en un conjunto de variables a otro conjunto de datos, como un ejemplo: dada la manera en la cual una componente de la aceleración varía con el desplazamiento, determinar la variación de rapidez con respecto al tiempo. En tales situaciones el trazar gráficas apropiadas es una ayuda útil para la solución de estos problemas cinemáticos.

### 2.6.1. Métodos gráficos para el movimiento unidimensional

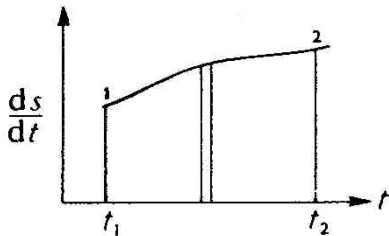


Figura 2.16

*Gráfica Rapidez-Tiempo* (figura 2.16)

$$\text{Pendiente de la curva} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) = a_t \quad (2.29)$$

$$\text{Área bajo la curva} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{ds}{dt} \right) dt = s_2 - s_1 \quad (2.30)$$

Por tanto, pendiente = índice de variación de la rapidez con respecto al tiempo

y Área bajo la curva = variación del desplazamiento

si  $a_t$  es constante, entonces la gráfica es una línea recta y

$$\text{Área bajo la curva} = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) = s_2 - s_1 \quad (2.31)$$

y  
pendiente =  $a_t$

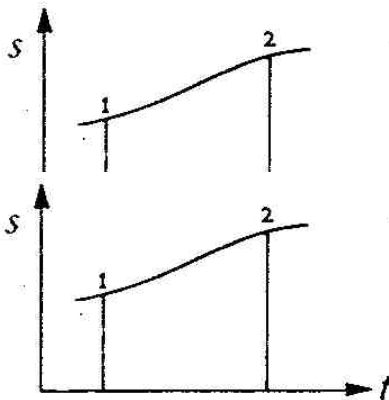


Figura 2.17

*Gráfica Desplazamiento-Tiempo* (figura 2.17)

$$\text{Pendiente} = \frac{ds}{dt} = v \quad (2.32)$$

Gráfica índice de variación de la rapidez-Tiempo (figura 2.18)

$$\text{Área bajo la curva} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} dt = v_2 - v_1 \quad (2.33)$$

si  $a_t$  es constante, entonces:

$$\text{Área bajo la curva} = a_t(t_2 - t_1) = v_2 - v_1 \quad (2.34)$$

Gráfica índice de variación de la rapidez- Desplazamiento (figura 2.19)

$$\text{Área bajo la curva} = \int_{s_1}^{s_2} v \frac{dv}{ds} ds = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 \quad (2.35)$$

Si  $a_t$  es constante, entonces

$$a_t(s_2^2 - s_1^2) = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 \quad (2.36)$$

$$\text{de 2.36 se implica } v_2^2 = v_1^2 + 2a_t(s_2^2 - s_1^2) \quad (2.37)$$

Gráfica inversa de la rapidez-Desplazamiento figura (2.20)

$$\text{Área bajo la curva} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{v} ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{ds} ds = t_2 - t_1 \quad (2.38)$$

Las ventajas del trazar las gráficas del movimiento son muchas aún en los casos de aceleración constante.

## 2.7. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

### Ejemplos de discusión

Ejemplo 2.1. Un punto  $P$  se mueve a lo largo de una trayectoria y su componente de la aceleración tangente a la trayectoria tiene una magnitud constante  $a_t$ .

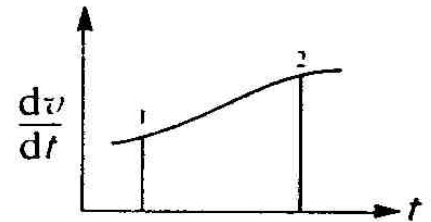


Figura 2.18

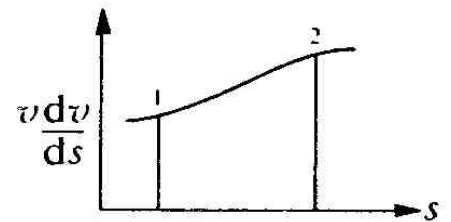


Figura 2.19

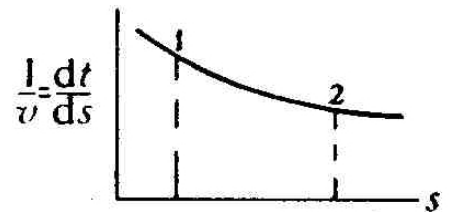


Figura 2.20

### Principios de Mecánica para Ingeniería

La distancia recorrida a lo largo de la trayectoria es  $s$ . Para  $t = 0$ ,  $s = 0$  y  $v = v_0$ . Demostrar que (a)  $v = v_0 + a_t t$ , (b)  $s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$ , (c)  $v^2 = v_0^2 + 2a_t s$  y (d)  $s = \frac{1}{2}(v + v_0)t$ .

*Solución:*

a) Puesto que  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ,

$$dv = a_t dt$$

y  $\int_{v_0}^v dv = a_t \int_{t_0=0}^t dt$  ya que  $a_t$  es constante

Por consiguiente

$$v - v_0 = a_t t$$

o  $v = v_0 + a_t t$  (i)

b) ya que  $v = \frac{ds}{dt}$ ,

$$\int_0^s ds = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + a_t t) dt$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$$
 (ii)

c) de la ecuación (i),  $t = \frac{(v - v_0)}{a_t}$  y sustituyendo  $t$  en (ii) nos da:

$$\begin{aligned} s &= v_0 \left( \frac{v - v_0}{a_t} \right) + \frac{1}{2} a_t \left( \frac{v - v_0}{a_t} \right)^2 \\ &= \frac{v_0 v - v_0^2}{a_t} + \frac{1}{2} a_t \left( \frac{v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{a_t^2} \right) \\ &= \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a_t} \end{aligned}$$

$$= \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a_t s$$
 (iii)



d) también de (i),  $a_t = \frac{(v - v_0)}{t}$  y sustituyendo  $a_t$  en (ii) tenemos:

$$s = v_0 t + \frac{\left(\frac{v - v_0}{t}\right)t^2}{2} = \frac{2v_0 t + (v - v_0)t}{2} = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \quad (iv)$$

Es importante hacer notar que las ecuaciones obtenidas son para movimiento unidimensional con aceleración constante.

Ejemplo 2.2. Una partícula describe una trayectoria horizontal recta y su velocidad se expresa como:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = (6t^2 - 10t)\hat{\mathbf{i}},$$

donde, el tiempo  $t$  se expresa en segundos,  $\mathbf{r}$  se mide en metros. La partícula se desplaza hacia la izquierda cuando  $t = 2s$ . Determine: (a) La aceleración de la partícula cuando  $t = 2s$  (b) El desplazamiento de la partícula durante el intervalo comprendido entre  $t = 1s$  y  $t = 3s$  (c) La distancia total recorrida durante el intervalo comprendido entre  $t = 1s$  y  $t = 3s$ .

*Solución:*

(a) cuando  $t = 2s$

$$\mathbf{v} = [6(2)^2 - 10(2)]\hat{\mathbf{i}} = +4\hat{\mathbf{i}} \frac{m}{s},$$

y la partícula se desplaza hacia la izquierda:

La aceleración de la partícula se obtiene derivando la expresión de la velocidad. Así

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(6t^2 - 10t)\hat{\mathbf{i}} = (12t - 10)\hat{\mathbf{i}},$$

y cuando  $t = 2s$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [12(2) - 10]\hat{\mathbf{i}} = 14\hat{\mathbf{i}} \frac{m}{s^2} \\ &= 14 \frac{m}{s^2} \text{ hacia la izquierda} \end{aligned}$$

### Principios de Mecánica para Ingeniería

(b) Como la velocidad es la derivada con respecto al tiempo del vector de posición:  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  integrando  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$

Por lo que

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt$$

Sí el origen O coincide con la posición de la partícula en el instante  $t_0=0$ , se tiene sustituyendo valores

$$\mathbf{r} \int_{t_0=0}^t (6t^2 - 10t) \hat{\mathbf{l}} dt = \hat{\mathbf{l}} [2t^3 - 5t^2]_{t_0=0}^t$$

Cuando  $t = 1 s$

$$\mathbf{r}_1 = -3\hat{\mathbf{l}}$$

y cuando  $t = 3s$

$$\mathbf{r}_3 = +9\hat{\mathbf{l}}$$

El desplazamiento durante el intervalo  $t = 1s$  a  $t = 3s$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 &= 9\hat{\mathbf{l}} - (-3\hat{\mathbf{l}}) = 12\hat{\mathbf{l}} \text{ m} \\ &= 12 \text{ m hacia la izquierda} \end{aligned}$$

(c) En el movimiento rectilíneo, las magnitudes del desplazamiento y la distancia total recorrida son iguales excepto cuando se invierte el sentido de la velocidad de la partícula.

De la expresión dada para la velocidad,  $v = (6t^2 - 10t) \hat{\mathbf{l}}$ , la velocidad  $\mathbf{v} = 0$  cuando  $t = 0s$  y  $t = 10/6 s = 1.667s$ . Durante el intervalo  $t = 1s$  y  $t = 1.667s$ , la velocidad es negativa; es decir, la partícula se desplaza hacia la derecha y desde  $t = 1.667s$  hasta  $t = 3s$ , el vector velocidad se dirige hacia la izquierda. Cuando  $t = 1.667s$ , el vector de posición de la partícula es:

$$\mathbf{r}_{1.667} = \hat{\mathbf{l}} [2(1.667)^3 - 5(1.667)^2] = -4.63\hat{\mathbf{l}}$$

La distancia total recorrida es la suma de las distancias recorridas en las dos direcciones; es decir,

$$\begin{aligned} Q &= |r_{1.667} - r_1| + |r_3 - r_{1.667}| \\ &= |-4.63\hat{i} - (-3\hat{i})| + |9\hat{i} - (-4.63\hat{i})| \\ &= 1.63 + 13.63 = 15.26m \end{aligned}$$

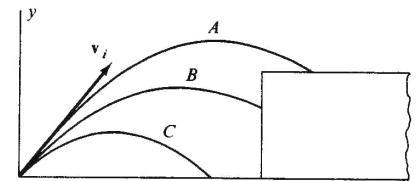
La cantidad  $1.63m$  es la distancia recorrida hacia la derecha durante los dos tercios de segundo iniciales; y  $13.63m$  es la distancia recorrida hacia la izquierda después que la velocidad invierte su sentido.

**Ejemplo 2.3.** Una bola es lanzada con una velocidad de  $25m/s$  con una pendiente de 4 vertical por 3 horizontal a un edificio con un techo exterior plano. El edificio es de  $15m$ , y el hombre que lanza la bola se encuentra a  $35m$  de la fachada en un foso, de tal manera que la bola abandona su mano a nivel del piso de la planta baja del edificio. Despreciando la resistencia del aire.

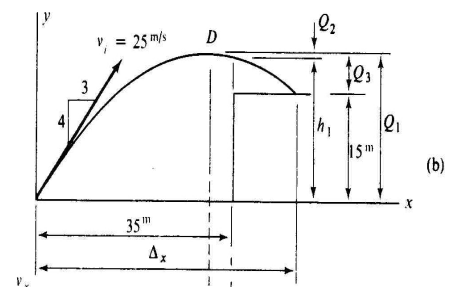
- (a) ¿Chocará directamente la bola con el edificio?  
 (b) Si la bola golpea directamente con el edificio, determine el sitio donde choca con él y la velocidad con que lo hace.

*Solución:* La bola lanzada recorre, como sabemos, una trayectoria curva llamada parábola; para analizar el movimiento consideremos el movimiento de la bola lanzada como la suma de dos movimientos, horizontal y vertical, que son simultáneos e independientes.

La figura 2.21(a) muestra tres posibles trayectorias de la bola que dependen de la magnitud de la velocidad inicial; mientras que la figura 2.21(b) muestra la trayectoria propia para determinar la altura de la bola cuando ésta se ha desplazado horizontalmente  $35m$  en la consideración que la bola golpea sobre el techo o azotea del edificio, esto es que la bola estará a una altura mayor de  $15m$  sobre el nivel del piso cuando esta ha viajado horizontalmente  $35m$ .



**Figura 2.21a**



**Figura 2.21b**

La velocidad inicial de la bola es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \left[ \frac{3}{5}(25)\hat{i} + \frac{4}{5}(25)\hat{j} \right] m/s; \\ &= (15\hat{i} + 20\hat{j}); \quad v_0 = 25 m/s \end{aligned}$$

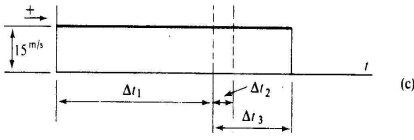


Figura 2.21c

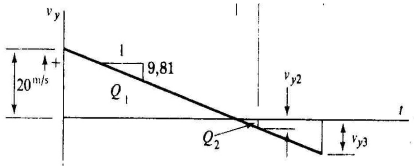


Figura 2.21d

La figura 2.21(c) representa la gráfica de la componente horizontal de la velocidad-tiempo, y la figura 2.21(d) muestra la gráfica de la componente vertical de la velocidad-tiempo. No obstante que las distancias horizontales en las gráficas  $v-t$  (figuras 2.21(c) y 2.21(d)) y en el croquis de la trayectoria (Figura 2.21(b)) no representan la misma variable, esto es útil si las escalas son seleccionadas, tal que las puntos en las gráficas  $v-t$  corresponden verticalmente con los puntos correspondientes de la trayectoria de la bola. Por ejemplo, cuando la bola se encuentra en el punto más elevado de su trayectoria,  $v_y = 0$  es el punto correspondiente en la gráfica  $v_y-t$ . Ya que  $a_x$  es cero la gráfica  $v_x-t$  es una recta horizontal. La componente vertical de la aceleración tiene un valor constante igual a  $g = 9.81 m/s^2$  hacia abajo; luego la gráfica  $v_y-t$  (figura 2.21(d)) es una recta con una pendiente 9.81. El área bajo la grafica  $v_x-t$  representa la distancia horizontal de recorrida durante cualquier intervalo de tiempo. Por tanto, cuando la bola ha viajado  $35m$  horizontalmente.

$$\Delta x = 35 = v_x(\Delta t_1 + \Delta t_2) = 15(\Delta t_1 + \Delta t_2)$$

y

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{35}{15} = 2.333s \quad (a)$$

El tiempo  $\Delta t_1$  requerido para que la bola alcance el punto de altura máxima  $D$  puede determinarse de la pendiente de la gráfica  $v_y - t$ . Luego

$$\frac{v_{0y}}{\Delta t_1} = a_y = 9.81 = \frac{20}{\Delta t_1}$$

$$y \quad \Delta t_1 = \frac{20}{9.81} = 2.039s \quad (a)$$

De la ecuación (a) el valor de  $\Delta t_2$  es

$$\Delta t_2 = 2.333 - 2.039 = 0.294s$$

La velocidad  $v_{y_2}$  puede determinarse de pendiente de la gráfica  $v_y - t$

La diferencia entre las áreas  $Q_1$   $Q_2$  representa la altura  $h_1$  de la bola arriba del piso en el momento que horizontalmente alcanza la fachada del edificio; esto es,

$$\begin{aligned} h_1 = Q_1 - Q_2 &= \frac{20(2.039)}{2} - \frac{2.89(0.294)}{2} \\ &= 20.39 - 0.425 = 19.96m \end{aligned}$$

Ya que el valor de  $h_1$  es mayor que la altura del edificio, la bola caerá sobre el techo exterior de este edificio. La distancia vertical,  $Q_3$  figura 2.21(b), que la bola debe descender desde el punto más elevado de su trayectoria antes de chocar en el techo del edificio, está representada por el área bajo la gráfica  $v_y-t$ . Esto es,

$$Q_3 = Q_1 - 15 = 20.39 - 15 = 5.39m$$

que es igual al área del triángulo correspondiente

$$\frac{v_{y_3}(\Delta t_3)}{2} = 5.39$$

De la pendiente de la gráfica  $v_y - t$  se tiene

$$a_y = \frac{v_{y_3}}{\Delta t_3} = 9.81,$$

La solución simultánea de estas dos ecuaciones da

$$\Delta t_3 = 1.048s$$

y

$$v_{y_3} = 10.28 \frac{m}{s}$$

### Principios de Mecánica para Ingeniería

La distancia horizontal recorrida por la bola,  $\Delta x$ , cuando ésta está a  $15m$  arriba del nivel del piso es, de acuerdo a el área bajo la gráfica  $v_x - t$

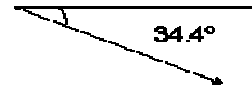
$$\begin{aligned}\Delta x &= v_x (\Delta t_1 + \Delta t_3) = 15(2.039 + 1.048) \\ &= 46.3m\end{aligned}$$

Por consiguiente la bola golpeará el techo exterior del edificio  $11.30m$  del borde correspondiente de la fachada del edificio.

La velocidad de la bola al chocar con el techo exterior del edificio, es la suma vectorial de los componentes

$$\mathbf{v} = v_x + v_y = (15\hat{i} - 10.28\hat{j})m/s$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(15)^2 + (-10.28)^2} = 18.19m/s;$$



*Solución Alternativa:* En algunos casos, puede resultar conveniente resolver las ecuaciones diferenciales del movimiento en lugar de utilizar las gráficas  $v-t$ ; por lo que de acuerdo a las ecuaciones obtenidas en el análisis del ejemplo demostrativo del caso simple (i) para un movimiento de una partícula con aceleración constante referido a un sistema de coordenadas cartesianas; relativo al lanzamiento de un proyectil con velocidad inicial  $v_0$  a un ángulo  $\theta$  con la horizontal, despreciando la resistencia de aire, tenemos:

De las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del movimiento (d) y (f)

$$x(t) = v_0 t \cos \theta \quad (d)$$

$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \quad (f)$$

y la figura 2.21(b) y la ecuación (d)

tenemos para  $x = 35m$   $v_0 = 25m/s$  y  $\cos \theta = 3/5$  que el tiempo empleado para este desplazamiento horizontal será;

$$t = \frac{35}{25\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{35 \times 5}{25(3)} = 2.333s$$

por lo que de la ecuación (f)

$$\begin{aligned} y(t) &= 25\left(\frac{25 \times 5}{25(3)}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{1}{2}9.81\left(\frac{35 \times 5}{5(3)}\right)^2 \\ &= \frac{140}{3} - \frac{1}{2}(9.81)\left(\frac{35}{15}\right)^2 \\ &= 46.667 - 26.705 = 19.962m \end{aligned}$$

Lo que muestra que la bola pasa arriba del edificio. Para  $y = 15m$  (la altura del edificio); podemos determinar el tiempo para esta altura de la trayectoria del movimiento de la bola.

$$\begin{aligned} 15 &= 25t\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{1}{2}(9.81)t^2 \\ 0 &= \frac{9.81}{2}t^2 - 20t + 15 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de 2do. orden en  $t$

$$\begin{aligned} t &= \frac{+20 \pm \sqrt{20^2 - \left(\frac{4(9.81)}{2}\right)15}}{2\left(\frac{9.81}{2}\right)} \\ t &= \frac{+20 \pm 10.28}{9.81} \Rightarrow t_1 = 0.995s \text{ y } t_2 = 3.09s \end{aligned}$$

El valor de  $t_2 = 3.09s$  es tiempo para determinar el desplazamiento con  $x$  de la bola, donde la bola cae en el techo exterior del edificio por lo que de la ecuación (d)

$$x_{t_2} = 25(3.9)\left(\frac{3}{5}\right) = 46.35m$$

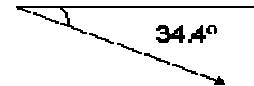
La velocidad de la bola al chocar en el techo exterior del edificio, se determina para la ecuación de la velocidad para este movimiento parabólico, que es

$$\mathbf{v} = (v_0 \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} + (v_0 \sin \theta - gt) \hat{\mathbf{j}}$$

sustituyendo valores, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{t_2} &= \left(25\left(\frac{3}{5}\right)\right) \hat{\mathbf{i}} + \left(25\left(\frac{4}{5}\right) - 9.81(3.09)\right) \hat{\mathbf{j}} \\ &= 15 \hat{\mathbf{i}} + (20 - 9.81(3.09)) \hat{\mathbf{j}} \\ &= (15 \hat{\mathbf{i}} - 10.31 \hat{\mathbf{j}}) m/s \end{aligned}$$

$$v_{t_2} = \sqrt{(15)^2 + (-10.31)^2} = 18.20 m/s,$$



**Ejemplo 2.4.** En un instante particular, un punto material de un eslabón de un mecanismo, tiene una rapidez de  $5.0m/s$  y una aceleración tangencial de la de magnitud de  $2.0m/s^2$ . Si la magnitud de la aceleración total es  $3.0m/s^2$ , ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria trazada por el punto en este instante?

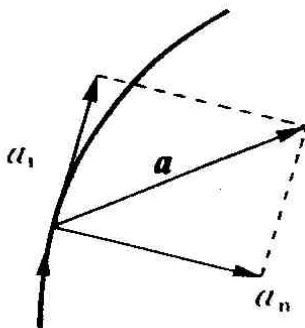


Figura 2.22

**Solución** La elección del sistema de coordenadas de la referencia para este ejemplo no tiene dificultad ya que el radio de curvatura es una característica solamente de las coordenadas de trayectoria.

En este sistema de coordenadas aceleración total  $\mathbf{a}$  (ver figura 2.22) esta dada por

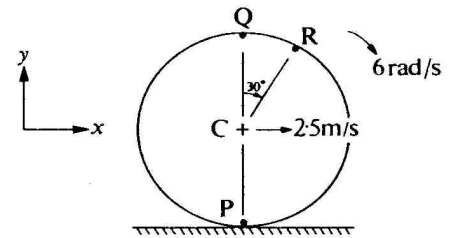
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_t \hat{\mathbf{e}}_t + a_n \hat{\mathbf{e}}_n \\ &= \ddot{s} \hat{\mathbf{e}}_t + \left(\frac{v^2}{\rho}\right) \hat{\mathbf{e}}_n \quad (\text{Ver ecuación 2.14}) \end{aligned}$$



La magnitud de  $\mathbf{a}$  es  $\sqrt{\dot{s}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$ , que sustituyendo valores, nos da

$$3.0 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{5^2}{\rho}\right)^2} \Rightarrow \rho = 11.18m$$

**Ejemplo 2.5.** De la figura 2.23. El centro  $C$  de la rueda de radio  $0.5m$ , tiene una velocidad constante de  $2.5m/s$  a la derecha. La velocidad angular de la rueda es constante e igual a  $6rad/s$  en el sentido de las manecillas del reloj. El punto  $P$  está en la parte inferior de la rueda haciendo contacto con una superficie horizontal. Los  $P$  y  $Q$  están, como se muestran en la figura 2.23.



**Figura 2.23**

Determine (a) si patina o no, la rueda sobre la superficie horizontal, (b) las velocidades y aceleraciones de los puntos  $P$  y  $Q$  y (c) la velocidad y aceleración del punto  $R$ .

*Solución:* Generalmente la manera más simple de tratar el movimiento de un punto en una rueda o volante que ésta rotando y trasladándose al mismo tiempo, es determinar el movimiento del centro de la rueda y agregando el movimiento del punto relativo al centro de la rueda. Tal que para un punto arbitrario  $A$  y centro  $C$ , podemos hacer uso de

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{A/C} \quad (\text{ver ecuación 2.22})$$

y

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A/C} \quad (\text{ver ecuación 2.23})$$

(a) Sí la rueda no está deslizando entonces la velocidad del punto  $P$  deberá ser la misma como la velocidad de la superficie horizontal, es decir, cero.

De la ecuación 2.17, la velocidad de  $P$  relativa a  $C$  está dada por

$$\mathbf{v}_{P/C} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

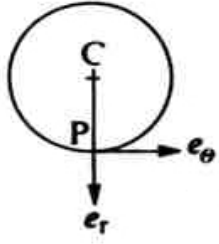


Figura 2.24a

donde  $r$  es la longitud de segmento de recta  $CP$  y  $\theta$  es el ángulo que hace este segmento  $CP$  medido desde alguna referencia en el plano de la circunferencia. Ya que  $r$  tiene un valor constante ( $0.5m$ ) entonces  $\dot{r} = 0$  y  $\mathbf{v}_{P/C}$  no tiene componente en la dirección de  $CP$ . La velocidad angular del segmento de recta  $CP$  es  $\dot{\theta}$  en la dirección contraria a las manecillas del reloj (como  $\theta$  se define como positiva en este sentido); así  $\dot{\theta} = -6 \text{ rad/s}$ , y de acuerdo a la figura 2.24(a)

$$\mathbf{v}_{P/C} = v_{\theta} \hat{\mathbf{e}}_{\theta} = r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_{\theta} = 0.5(-6)\mathbf{l} = -3\hat{\mathbf{l}} \text{ m/s}$$

La velocidad de  $C$  es  $\mathbf{v}_C = 2.5\hat{\mathbf{l}} \text{ m/s}$  por lo que la velocidad total de  $P$  es

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{P/C} = 2.5\hat{\mathbf{l}} - 3\hat{\mathbf{l}} = 0.5\hat{\mathbf{l}} \text{ m/s}$$

lo que indica que la rueda pátina (resbala) en la superficie horizontal de contacto.

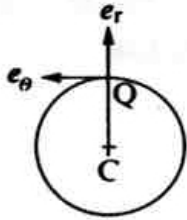


Figura 2.24b

(b) De la figura 2.24(b). Para el segmento de recta radial  $CQ$ , tenemos que  $\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{e}}_{\theta} = -\hat{\mathbf{j}}$

La velocidad de  $Q$  relativa a  $C$  es

$$\mathbf{v}_{Q/C} = r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_{\theta} = 0.5(-6)(-\hat{\mathbf{l}}) = 3\hat{\mathbf{l}} \text{ m/s}$$

tal que

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{Q/C} = 2.5\hat{\mathbf{l}} + 3\hat{\mathbf{l}} = 5.5\hat{\mathbf{l}} \text{ m/s}$$

Del ecuación 2.18, La aceleración de  $Q$  relativa a  $C$  esta dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{Q/C} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \\ &= (-0.5)(-6)^2 \hat{\mathbf{e}}_r \\ &= 18\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

La aceleración total de  $Q$  es

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{Q/C}$$

Solo que  $v_c$  es constante, así que  $a_c = 0$ . Por consiguiente

$$\mathbf{a}_Q = -18 \hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

(c) De la figura 2.24(c). Para el segmento de recta radial  $CR$ ,

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \text{sen}30^\circ \hat{\mathbf{i}} + \text{cos}30^\circ \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \hat{\mathbf{j}}$$

y

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \text{cos}30^\circ \hat{\mathbf{i}} - \text{sen}30^\circ \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{j}}$$

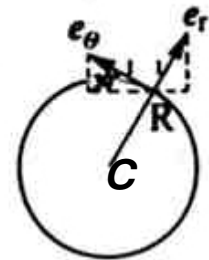


Figura 2.24c

Además la velocidad de  $R$  relativa a  $C$  es

$$\mathbf{v}_{R/C} = r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = 0.5(-6) \left( -\frac{1}{2} \sqrt{3} \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{j}} \right) = (2.6 \hat{\mathbf{i}} - 1.5 \hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}$$

y

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{R/C} = 2.5 \hat{\mathbf{i}} + 2.6 \hat{\mathbf{i}} - 1.5 \hat{\mathbf{j}} = (5.1 \hat{\mathbf{i}} - 1.5 \hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}$$

$$v_R = \sqrt{[(5.1)^2 + (-1.5)^2]} = 5.316 \text{ m/s}; \quad \swarrow 16.4^\circ$$

El mismo resultado puede ser obtenido, del diagrama de velocidades, figura 2.25, aquí  $v_C$  y  $v_{R/C}$  son trazadas a una escala apropiada y en la correcta dirección y adicionadas gráficamente para dar  $v_R$

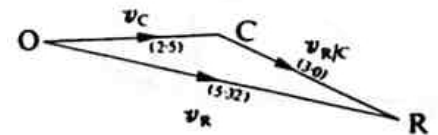


Figura 2.25

Para la aceleración total de  $R$  relativa a  $C$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{R/C} &= -r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r = -0.5(-6)^2 \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \hat{\mathbf{j}} \right) \\ &= (-9 \hat{\mathbf{i}} - 15.6 \hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

La cual es la aceleración total de  $R$ , ya que  $\mathbf{a}_C = 0$

Por lo que

$$\mathbf{a}_R = (-9\hat{i} - 15.6\hat{j})m/s^2; a_R = 18m/s^2$$

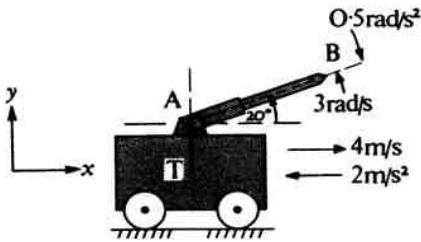
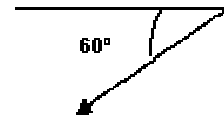


Figura 2.26

Ejemplo 2.6. En el instante bajo consideración el carrito trole  $T$ , figura 2.26, tiene de una velocidad de  $4m/s$  hacia la derecha y una desaceleración de  $2m/s^2$ . El brazo telescópico  $AB$  tiene una longitud en ese instante considerado de  $1.5m$ , él cual está aumentando a una razón constante de  $2m/s$ . Al mismo tiempo, el brazo tiene una velocidad angular en sentido contrario a las manecillas del reloj de  $3rad/s$  y una aceleración angular en el sentido de las manecillas del reloj de  $0.5 rad/s^2$ . Determine para  $B$  (a) la velocidad y rapidez, y (b) la aceleración y su magnitud. Dar las cantidades vectoriales en términos de los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ .

*Solución:* De la figura 2.26 tenemos los datos siguientes:

$$\mathbf{v}_A = (4\hat{i})m/s, \quad \mathbf{a}_A = (-2\hat{i})m/s^2, \quad \dot{\theta} = \omega = 3rad/s,$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha = -0.5rad/s^2, \quad r = 1.5m;$$

del enunciado tenemos que será necesario determinar (a)  $\mathbf{v}_B=?$ ,  $v_B=?$ ; (b)  $\mathbf{a}_B=?$ ,  $a_B=?$  en términos de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  las cantidades vectoriales.

De nuevo son requeridas coordenadas polares, por lo que debemos escribir las expresiones para  $\hat{e}_r$  y  $\hat{e}_\theta$  en términos de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  (ver figura 2.27)

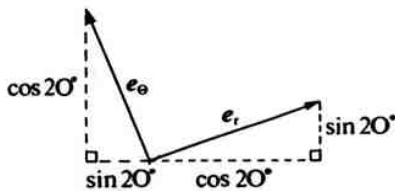


Figura 2.27

$$\hat{e}_r = \cos 20^\circ \hat{i} + \sin 20^\circ \hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin 20^\circ \hat{i} + \cos 20^\circ \hat{j}$$

(a) De la ecuación 2.17

$$\mathbf{v}_{B/A} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad \text{sustituyendo valores}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = 2(0.940\hat{i} + 0.342\hat{j}) + 15(3)(-0.342\hat{j} + 0.940\hat{j})$$

$$= (0.341\hat{i} + 4.91\hat{j})m/s$$

De la ecuación 2.22

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{C/A}; && \text{sustituyendo valores} \\ \mathbf{v}_B &= 4\hat{\mathbf{i}} + (0.341\hat{\mathbf{i}} + 4.91\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (4.34\hat{\mathbf{i}} + 4.91\hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}\end{aligned}$$

La rapidez de  $B$  es la magnitud de  $v_B$ :

$$|\mathbf{v}_B| = \sqrt{(4.34^2 + 4.91^2)} = 6.55 \text{ m/s}$$

(b) La aceleración de  $B$  relativa a  $A$  es, la ecuación 2.18

$\mathbf{a}_{B/A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta$  en la que  $\ddot{r} = 0$  ya que  $\dot{r}$  es constante; sustituyendo valores, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{B/A} &= -1.5(3)^2(0.940\hat{\mathbf{i}} + 0.342\hat{\mathbf{j}}) + \\ &\quad + [1.5(-0.5) + 2(2)3](-0.342\hat{\mathbf{i}} + 0.940\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (-16.54\hat{\mathbf{i}} + 5.96\hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

De la ecuación 2.23

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}, && \text{sustituyendo valores} \\ &= -2\hat{\mathbf{i}} + (-16.54\hat{\mathbf{i}} + 5.96\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (-18.54\hat{\mathbf{i}} + 5.96\hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

y la magnitud de la aceleración de  $B$  es:

$$|\mathbf{a}_B| = \sqrt{(-18.54)^2 + (5.96)^2} = 19.47 \text{ m/s}^2$$

De nuevo una solución gráfica es posible, y un tanto breve; pero con resultados menos exactos. Para el diagrama vectorial de las velocidades, primero trazaremos a una escala apropiada,  $v_A$ , la velocidad de  $A$ ,  $4 \text{ m/s}$  hacia la derecha (figura 2.28). La velocidad de  $B$  relativa a  $A$ ,  $v_{B/A}$ ,

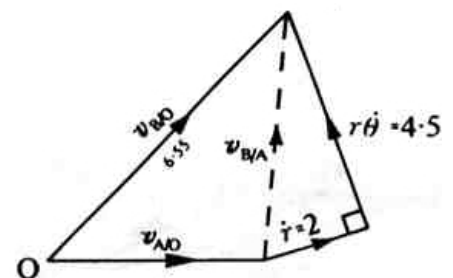


Figura 2.28

teniendo sus componentes  $\dot{r} = 2 \text{ m/s}$  y  $r\dot{\theta} = 1.5(3) = 4.5 \text{ m/s}$  en sus direcciones respectivas se suman a  $\mathbf{v}_A$  y el resultado es  $\mathbf{v}_B$  la cual debe estar a la escala escogida para la figura.

Para el diagrama vectorial de las aceleraciones primero trazamos, a una escala apropiada, un segmento de recta para representar la aceleración de  $A$ ,  $\mathbf{a}_A$ . Esta es  $2 \text{ m/s}^2$  a la izquierda. La aceleración de  $B$  relativa a  $A$ ,  $\mathbf{a}_{B/A}$ , es sumada vectorial a  $\mathbf{a}_A$ . Las componentes de  $\mathbf{a}_{B/A}$  son  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 1.5(3)^2 = -13.5 \text{ m/s}^2$  en la dirección de  $\hat{\mathbf{e}}_r$  y  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 1.5(-0.5) + 2(2)3 = 11.25 \text{ m/s}^2$  en la dirección de  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ . La aceleración de  $B$ ,  $\mathbf{a}_B$ , puede ser determinada de acuerdo a la escala de la figura 2.29.

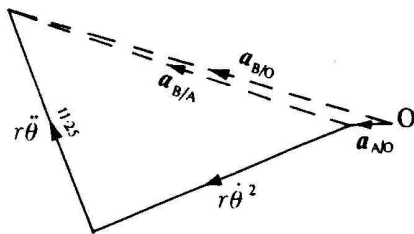


Figura 2.29

**Ejemplo 2.7.** Un vehículo de carreras  $B$  es filmado desde una cámara montada en otro vehículo  $A$ , el cual está viajando a lo largo de una carretera recta a una rapidez constante de  $72 \text{ km/h}$ . El auto de carreras se está moviendo a una rapidez constante de  $144 \text{ km/h}$  a lo largo de una pista circular, con centró en  $O$ , la que tiene un radio de  $200 \text{ m}$ . En el instante representado por la figura 2.30,  $A$ ,  $B$  y  $O$  son colineales.

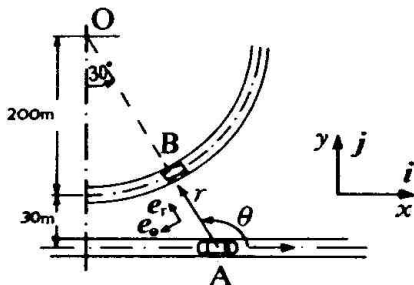


Figura 2.30

Determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la cámara, de manera que la imagen  $B$  permanezca posicionada centralmente en el visor de la cámara.

**Solución:** Para encontrar la velocidad angular y la aceleración angular, necesitamos primero determinar la velocidad y aceleración de  $B$  relativa a  $A$  referidas a las coordenadas polares dadas y después aplicar las ecuaciones 2.17 y 2.18, de la velocidad y aceleración de una partícula respectivamente, en coordenadas polares. Con los datos de la rapidez de  $A$ ,  $v_A = 72 \text{ km/h}$ , la rapidez de  $B$ ,  $v_B = 144 \text{ km/h}$  y los datos de la figura 2.30

La velocidad de  $B$  es perpendicular al segmento de recta  $AB$ , así que

$$\mathbf{v}_B = 144 \left( \frac{1000}{3600} \right) (-\hat{\mathbf{e}}_\theta) = -40 \hat{\mathbf{e}}_\theta \text{ m/s}$$

La velocidad de  $A$  es

$$\mathbf{v}_A = 72 \left( \frac{1000}{3600} \right) \hat{\mathbf{i}} = 20 \hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$$

Resolviendo el vector unitario  $\hat{\mathbf{i}}$  en las direcciones de  $\hat{\mathbf{e}}_r$  y de  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ , tenemos.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= 20(-\cos 30^\circ \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin 30^\circ \hat{\mathbf{e}}_r) \\ &= (-10 \hat{\mathbf{e}}_r - 17.32 \hat{\mathbf{e}}_\theta) \text{ m/s} \end{aligned}$$

La velocidad de  $B$  relativa a  $A$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{B/A} &= \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = -40 \hat{\mathbf{e}}_\theta - (-10 \hat{\mathbf{e}}_r - 17.32 \hat{\mathbf{e}}_\theta) \\ &= (10 \hat{\mathbf{e}}_r - 22.68 \hat{\mathbf{e}}_\theta) \text{ m/s} \end{aligned} \quad (i)$$

También, de la ecuación 2.17

$$\mathbf{v}_{B/A} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (ii)$$

comparando las ecuaciones anteriores (i) y (ii) y de la observación de la figura 2.30, tenemos que

$$r = (230 / \cos 30^\circ) - 200 = 65.58 \text{ m}$$

por lo que encontramos que

$$\dot{r} = 10 \text{ m/s}$$

y la velocidad angular de la cámara es

$$\dot{\theta} = -\frac{22.58}{65.58} = 0.346 \text{ rad/s}$$

## Principios de Mecánica para Ingeniería

La aceleración de B es más conveniente encontrarla de la ecuación 2.14.b (coordenadas de trayectoria)

$$a_B = 0\hat{e}_t - \frac{40^2}{200}\hat{e}_n = -8\hat{e}_n = 8\hat{e}_r$$

ya que de acuerdo a coordenadas polares (Ecuación 2.18,  $a_B = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$  para la situación de

este ejemplo  $\ddot{r} = 0, -r\dot{\theta}^2 = \left[ 200\left(\frac{40}{200}\right)^2 \right],$

$r\ddot{\theta} = 0, 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$  el auto de carreras se considera girando con centro en O,

$$a_B = r\dot{\theta}^2 \hat{e}_r = 200\left(\frac{40}{200}\right)^2 \hat{e}_r = 8\hat{e}_r$$

La aceleración de **B** relativa a **A** es

$$a_{B/A} = a_B - a_A = 8\hat{e}_r \quad (iii)$$

También, de la ecuación 2.18,

$$a_{B/A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \quad (iv)$$

Comparando las ecuaciones (iii) y (iv) vemos que

$$0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 65.58\ddot{\theta} + 2(10)(-0.346)$$

De aquí que la aceleración angular  $\ddot{\alpha} = \ddot{\theta} = \dot{\omega}$  de la cámara es

$$\ddot{\theta} = \frac{20(0.346)}{65.58} = 0.1055 \frac{rad}{s^2}$$

**Ejemplo 2.8** Obtener las ecuaciones que relacionan las velocidades y aceleraciones de los cuerpos **C** y **D** del sistema definido en la figura 2.14b

*Solución* La longitud del cable que conecta los cuerpos **C** y **D** es:

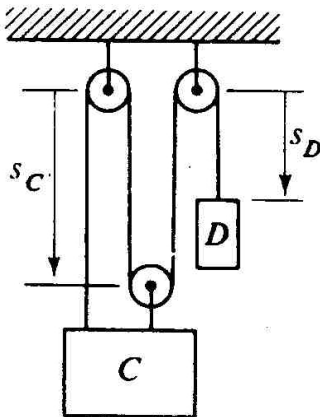


Figura 2.14b



$$L = 3S_C + S_D + \sum L_{AP} \quad (a)$$

Donde  $L_{AP}$  representa la longitud de la cuerda arrollada en cada una de las poleas y tramos de cuerda de longitud que no varía. Obsérvese que  $\sum L_{AP}$  es una constante, en consecuencia la ecuación (a) puede expresarse como:

$$3S_C + S_D = L - \sum L_{AP} = L' \quad (b)$$

En la que  $L'$  es una constante. Derivando la ecuación (b) con respecto al tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} 3 \frac{dS_C}{dt} + \frac{dS_D}{dt} &= 0 \\ 3v_C + v_D &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación indica que si  $v_C$  es positiva (hacia abajo),  $v_D$  es negativa, es decir, dirigida hacia arriba, y su magnitud es igual a  $3 v_C$ .

Derivando por segunda vez, tenemos:

$$\begin{aligned} 3 \frac{dv_C}{dt} + \frac{dv_D}{dt} &= 0 \\ 3a_C + a_D &= 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.9.** Tres cuerpos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están conectados mediante cuerdas y poleas en la forma indicada en la figura 2.14d. Los tres cuerpos se sueltan al mismo tiempo, desde el reposo, que inicialmente se encuentran al mismo nivel. El cuerpo  $A$  posee una aceleración constante de  $140\text{mm/s}^2$  hacia arriba y  $C$  posee una aceleración constante de  $40\text{mm/s}^2$  hacia abajo. Calcular el tiempo requerido para que la distancia vertical entre el cuerpo  $A$  y el  $B$  sea  $400\text{mm}$ .

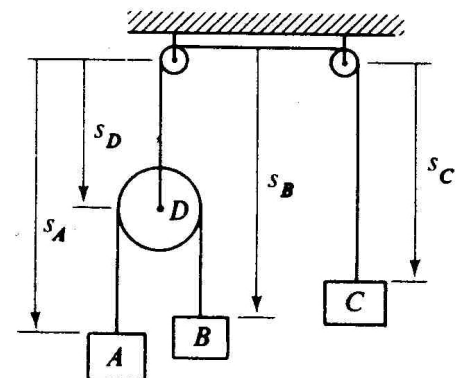


Figura 2.14d

*Solución:* La longitud de la cuerda arrollada en las poleas y la distancia horizontal entre las poleas superiores; son

## Principios de Mecánica para Ingeniería

constantes y no es necesario tomarlas en consideración durante la determinación de velocidades y aceleraciones. La longitud de la cuerda entre  $A$  y  $B$ ; considerando la dirección positiva, la que se dirige hacia abajo; es

$$\begin{aligned} L_1 &= (S_A - S_D) + (S_B - S_D) \\ &= S_A + S_B - 2S_D \end{aligned}$$

La longitud de la otra cuerda es

$$L_2 = S_C + S_D$$

Eliminando la posición  $S_D$  de estas dos ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} S_A + S_B - 2(L_2 - S_C) &= L_1 \\ S_A + S_B + 2S_C &= L_1 + 2L_2 \end{aligned}$$

Derivando esta última expresión con respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{dS_A}{dt} + \frac{dS_B}{dt} + 2\frac{dS_C}{dt} = 0$$

o

$$v_A + v_B + 2v_C = 0$$

Derivando por segunda vez se llega a

$$a_A + a_B + 2a_C = 0$$

Por lo que sustituyendo los datos,  $a_A = -140 \text{ mm/s}^2$  y

$a_C = +40 \text{ mm/s}^2$ , en esta expresión de la aceleración

$$-140 + a_B + 2(+40) = 0$$

o

$$a_B = 140 - 80 = 60 \text{ mm/s}^2 \text{ (hacia abajo)}$$

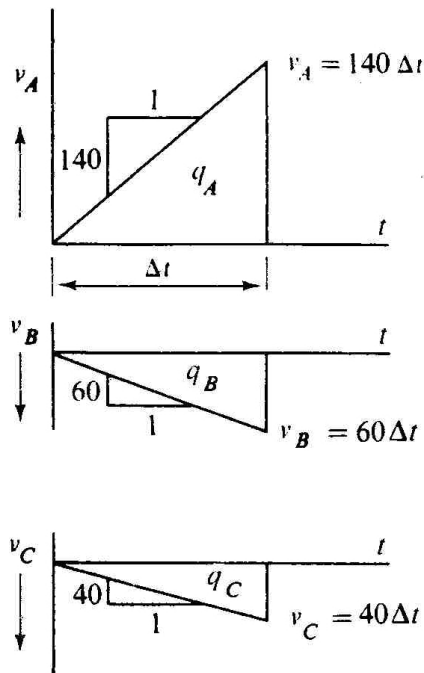


Figura 2.31

En la figura 2.31 (a), (b) y (c) se representan las gráficas velocidad-tiempo de los tres cuerpos, en ellos se indican las magnitudes de las velocidades y aceleraciones. Como desplazamiento  $A$  es hacia arriba y el de  $B$  es hacia abajo,

La distancia entre  $A$  y  $B$  es igual a la suma de los desplazamientos:

$$|q_A| + |q_B| = \frac{140(\Delta t)^2}{2} + \frac{60(\Delta t)^2}{2} = 400$$

de donde el intervalo de tiempo es

$$(\Delta t)^2 = 4 \Rightarrow \Delta t = 2s$$

Ejemplo 2.10. Un automovilista viaja a  $72km/h$ , cuando observa que la luz de un semáforo a  $320m$  adelante se pone en rojo durante  $20s$ . ¿Que debe hacer para pasar semáforo a  $72km/h$  en el momento exacto en que se pone la luz verde otra vez? Trácese la curva  $v-t$ , seleccionando la solución para la cual se tengan los valores más pequeños posibles de desaceleración y aceleración, y determinense: a) La desaceleración y aceleración en  $m/s^2$  b) La velocidad mínima alcanzada en  $km/h$

*Solución:* Datos  $v_0=72km/h=20m/s$ ,  $v_f=20m/s$  para  $\Delta t=20s$  y  $\Delta x=320m$ . Trazar gráfica  $v-t$  y determinar a) La aceleración y desaceleración en  $m/s^2$  y b) la velocidad mínima alcanzada en  $km/h$ .

Trazamos la gráfica  $v-t$  con  $v_0=v_{20}=20m/s$  y el área bajo la curva  $v-t=320m$  (figura 2.32b). Para un aceleración y desaceleración más pequeña elegimos un aceleración constante y una desaceleración constante de la misma magnitud (figura 2.32a)

De la gráfica  $v-t$ , el área bajo la curva

$$A_{v-t} = 2\left(\frac{l}{2}\right)(20 + v_{10})(10) = 320$$

por lo que (b)  $v_{10} = 12m/s = 43.2km/h$

De la gráfica  $a-t$ , el área bajo la curva

$$A_{a-t} = -a(\Delta t) = v_{10} - v_0$$

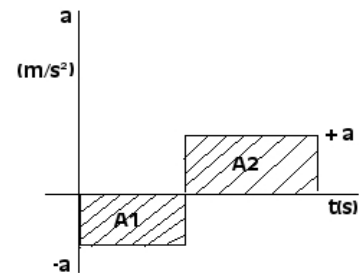


Figura 2.32a

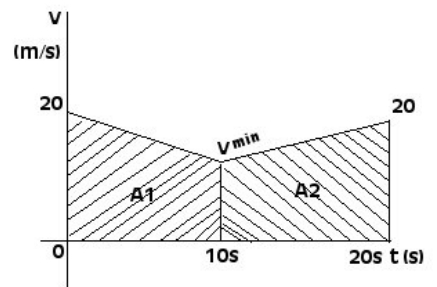


Figura 2.32b

$$\text{por lo tanto (a) } -a = \frac{v_0 - v_0}{\Delta t} = \frac{12 - 20}{10} = -0.8 \text{ m/s}^2$$

$$a = \pm 0.8 \text{ m/s}^2$$

### Ejercicios de Trabajo

- 2.1. La posición de un punto, en metros está dada por  $r = (6t - 5t^2)\hat{i} + (7 + 8t^3)\hat{j}$ , donde  $t$  es el tiempo en segundos. Determine la posición, velocidad y aceleración del punto cuando  $t = 3s$
- 2.2. La aceleración de un punto  $P$  moviéndose en un plano está dada por  $a = 3t^2\hat{i} + (4t + 5)\hat{j} \text{ m/s}^2$ , donde  $t$  es el tiempo en segundos. Cuando  $t = 2$ , la posición y velocidad respectivamente son  $(12\hat{i} + 26.333\hat{j})m$  y  $(10\hat{i} + 21\hat{j})\text{m/s}$ .

Determine la Posición y velocidad del punto para  $t = 1s$

- 2.3. La aceleración de una partícula se define por la relación  $a = -kx^{-2}$  la partícula está inicialmente en  $x = 900mm$ , sin velocidad inicial, y se observa que su velocidad es de  $10m/s$  cuando  $x = 300mm$ . Determinense: a) el valor de  $k$ , b) la velocidad de la partícula cuando  $x = 500mm$

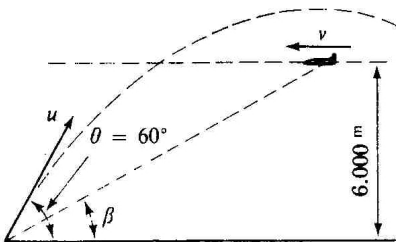


Figura 2.33

- 2.4. Un avión a  $6,000m$  de altura (figura 2.33) sigue un curso horizontal que pasa sobre una batería antiaérea. La rapidez del avión es  $240m/s$ . El ángulo del cañón es de  $60^\circ$  la velocidad de salida de proyectil es de  $600m/s$ . Calcule el ángulo  $\beta$  de la línea de observación en el instante que debe dispararse para que el proyectil alcance el avión durante su vuelo ascendente.
- 2.5. Un punto  $A$  está siguiendo una trayectoria curva y

y en un instante particular, el radio de curvatura de la trayectoria es  $16m$ . La rapidez del punto  $A$  es  $8m/s$  y su componente de la aceleración tangente a la trayectoria es  $3m/s^2$ . Determine la magnitud de la aceleración total.

2.6. Una partícula se desplaza en un plano vertical a lo largo de una trayectoria circular de  $10m$  diámetro. La distancia a lo largo de la trayectoria desde la parte más baja de la circunferencia a la partícula es  $s=t^2-3t$ , donde  $s$  está en metros y  $t$  en segundos (el sentido contrario a las manecillas del reloj es positivo) Determinar la velocidad y aceleración de la particular cuando  $t=3s$ .

2.7. Una bola es lanzada desde la parte más alta de un edificio de  $70m$  de alto, con una velocidad horizontal de  $25m/s$ . Determinar el radio de curvatura de la trayectoria de la bola, cuando ésta se encuentra a  $75m$  del edificio

2.8. Un punto  $P$  se mueve en una trayectoria circular de radio  $5m$  a una rapidez constante de  $10m/s$ . Cuando el punto alcanzar la posición mostrada en la figura 2.34, obtener su velocidad y aceleración como vectores referidos al sistema de coordenadas mostrado.

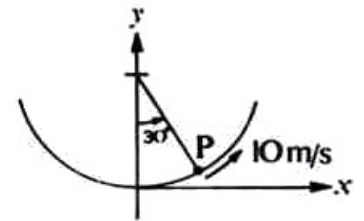


Figura 2.34

2.9. Un brazo telescópico  $AB$  gira con pivote en  $A$  en un plano vertical y se extiende a una razón constante de  $1m/s$ , la velocidad angular del brazo se mantiene constante en  $5rad/s$  en sentido contrario a manecillas del reloj, figura 2.35. Cuando el brazo está a  $30^\circ$  con la horizontal, la longitud del brazo es  $0.5m$ . Determinarse la velocidad y aceleración de  $B$ .

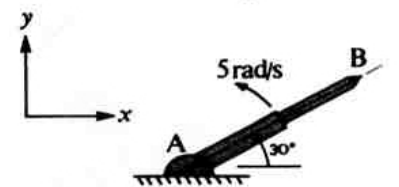


Figura 2.35

2.10. La partícula  $A$  de la figura 2.36 recorre la trayectoria circular en sentido contrario de las manecillas del reloj con rapidez constante  $v$ .

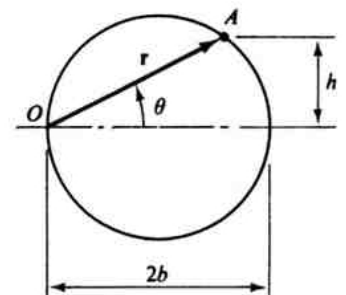


Figura 2.36

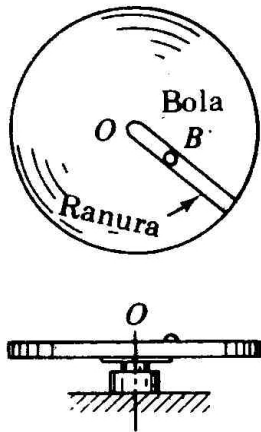


Figura 2.37

- a) Calcule las componentes radial y transversal de la aceleración de  $A$  cuando  $h = 0.8b$ .  
 b) Pruebe que el resultado de la parte (a) es igual a la componente normal de la aceleración de  $A$ .

- 2.11. La mesa circular de la figura 2.37 gira en un plano horizontal, mientras que la bola se desliza en la ranura de la mesa. En un instante específico, la bola se encuentra a  $350\text{mm}$  del punto  $O$  y se mueve hacia fuera a razón de  $150\text{mm/s}$ , mientras que la mesa cuenta con una velocidad angular de  $2\text{rad/s}$  y una aceleración angular de  $8\text{rad/s}^2$ , ambas en sentido de las manecillas del reloj. Calcule:  
 a) La magnitud de la aceleración de  $B$  si  $\ddot{r} = 0$   
 b) El valor de  $\ddot{r}$  si  $a_B$  debe ser mínima

- 2.12. Un barco que está navegando hacia el norte a 5 nudos<sup>4</sup> y otro barco  $B$  está navegando hacia el Noroeste a 10 nudos. Encontrar la velocidad de  $B$  relativa a la de  $A$ .

- 2.13. Resolver el ejercicio 2.9 del brazo de telescópico asumiendo que la velocidad del pivote  $A$  es  $(7\hat{i} + 2\hat{j})\text{m/s}$  y su aceleración es  $(4\hat{i} + 6\hat{j})\text{m/s}^2$ . Además determinar para este caso la rapidez de  $B$  y la magnitud de su aceleración.

- 2.14. La rueda trasera de una bicicleta es de  $710\text{mm}$  de diámetro y la manivela-pedal es de  $170\text{mm}$  de longitud. Si la bicicleta está corriendo a  $22\text{km/h}$ , y los pedales realizan una revolución por tres revoluciones de las ruedas, determinar la velocidad lineal del pedal cuando la manivela está vertical (posición superior e inferior).

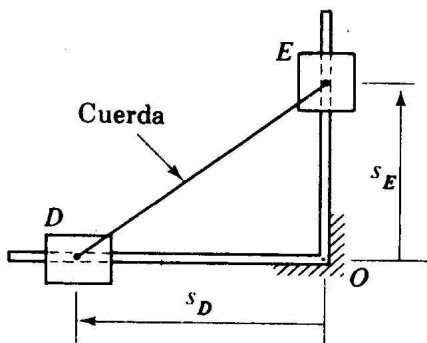


Figura 2.14c

- 2.15. Los cuerpos  $D$  y  $E$  del sistema mostrado en la figura 2.14c están conectados mediante un cable inextensible de  $1\text{m}$  longitud. Cuando  $S_E$  es  $0.6\text{m}$

<sup>4</sup> 1 Nudo = 1 milla náutica/h = 6082.66 pies/hora = 0.515m/s

(hacia arriba), el cuerpo  $E$  posee una velocidad de  $1.6m/s$  hacia arriba y una aceleración de  $0.8m/s^2$ , hacia abajo. Calcule la velocidad y aceleración de cuerpo  $D$ .

- 2.16. Los cuerpos  $A$  y  $B$  de la figura 2.38, están en reposo inicialmente. Calcule el valor de la aceleración constante que posee el cuerpo  $A$  si el cuerpo  $B$  se desplaza  $200mm$  hacia la derecha durante los  $4s$  iniciales del movimiento.



Figura 2.38

- 2.17. Para el mecanismo mostrado en la figura 2.39, determinar la velocidad de  $C$  relativa a  $B$  y la velocidad de  $C$ .

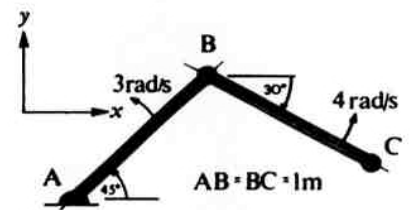


Figura 2.39

- 2.18. Un punto  $P$  se mueve en una trayectoria recta, tal que, su aceleración esta dada por  $a = (6x^2 + 3x + 2)m/s^2$ , donde  $x$  es la distancia recorrida en metros. Cuando  $x=0$  su rapidez es cero. Encontrar su rapidez cuando  $x=4m$ .

- 2.19. Un vehículo por una carretera recta, puede acelerar a  $6m/s^2$  y desacelerar a  $9m/s^2$ . Calcular el tiempo mínimo que requiere el vehiculo para recorrer  $135m$  partiendo desde el reposo y retornando a esta condición al final del recorrido. ¿Qué velocidad máxima alcanza el vehículo?

- 2.20. Un esquiador recorre  $18m$  sobre la falda de una montaña durante un intervalo de  $2s$  y otros  $18m$  durante el “segundo” siguiente. La aceleración es constante durante el periodo de  $3s$ . Calcule la velocidad del esquiador al final del intervalo de  $3s$ .

- 2.21. Un hombre salta desde un globo que permanece estacionario a una altura de  $1500m$  sobre la tierra. Se tiene un tiempo de espera de  $10s$  antes de abrir el paracaídas que lo desacelera a razón de  $6m/s^2$  hasta que la velocidad es de  $6.6m/s$ . A partir de

este instante continúa descendiendo con velocidad constante de  $6.6m/s$  hasta aterrizar. ¿Cuánto tiempo necesita este hombre para descender hasta la tierra? Despreciar el efecto de rozamiento del aire durante el descenso libre inicial de  $10s$ , considerar que la aceleración debida a la gravedad es  $9.81m/s^2$

- 2.22. Un acelerómetro montado en un vehículo mide la magnitud del aceleración tangencial  $a_t$ . Al mismo tiempo la distancia recorrida,  $s$ , es registrada con los resultados siguientes en los que  $a_t$  esta dada en  $(m/s^2)$  y  $s$  en  $(m)$

$a_t \rightarrow$	1.2	2.1	2.6	2.1	0.4	-1.3	-0.8	0.1	0.9
$s \rightarrow$	0	5	10	15	20	25	30	35	40

Dado que la rapidez inicial hacia adelante es de  $3.0m/s$  y la aceleración varia suavemente con la distancia recorrida, encontrar para  $s = 40m$ .

- a) la rapidez y
- b) el tiempo empleado

Sugerencias para resolver este ejercicio 2.22

- 1<sup>a</sup> Para resolver el inciso (a), trazar la gráfica  $a_t - s$  y encontrar el área bajo la curva por medio de la regla de Simpson o la regla trapezoidal.
- 2<sup>a</sup> Para resolver el inciso (b), trazar la gráfica  $\frac{1}{v} - s$  y encontrar el área bajo la curva en la misma forma que para el inciso (a).



# 3

## CINÉTICA DE LA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO PLANO

### Parte A: Fuerza Masa y Aceleración

#### 3.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos estudiado la cinemática del punto material moviéndose en un plano; la velocidad y aceleración se han definido en varios sistemas de coordenadas y para una variedad de condiciones. Ahora se estudiarán las fuerzas asociadas con el movimiento.

El concepto de fuerzas es muy útil debido que nos permite conjuntar apropiadamente las ramas o divisiones de la Mecánica de Ingeniería. Por ejemplo el conocimiento de la fuerza requerida para acelerar un vehículo hace posible decidir sobre el tamaño de la máquina y el sistema de transmisión más apropiados de acuerdo a las condiciones cinemáticas y de resistencia; de aquí que la fuerza actúa como un medio de intercambio entre la termodinámica electrotecnología y la ciencia de los materiales.

#### 3.2 Leyes del Movimiento de Newton

Las leyes de Newton definen el concepto de fuerza en términos de movimiento producido por la fuerza; si ésta actúa sola; la cual es desde el punto cinético. El por qué desde el punto de vista estático, lo discutiremos posteriormente.

Estableceremos primero las tres leyes de movimiento de Newton en la forma que se tiene en la literatura corriente más generalizada.

***Primera Ley***

Todo cuerpo continúa o permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante) sino actúa fuerza alguna sobre él.

***Segunda Ley***

El índice variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal (*momentum*) de un cuerpo es proporcional a la fuerza actuando sobre el cuerpo y está en la dirección de la fuerza.

***Tercera Ley***

En la Interacción de cuerpos, la acción de un cuerpo sobre otro, es de la misma magnitud, opuesta en dirección y colineal a la reacción del segundo cuerpo sobre el primero.

El término “*momentum*” es sobresaliente en la formulación de las leyes de la mecánica y su definición formal se da ha continuación junto a la definición de masa. El lector interesado con los conceptos filosófico de masa, desplazamiento y tiempo; deberá consultar un buen libro de física para ingenieros.

**3.2.1 Cantidad de movimiento lineal (*momentum*)**

La cantidad de movimiento lineal se define simplemente como producto de la masa por la velocidad.

**3.2.2 Masa y equivalencia de masas*****Masa***

La masa de un cuerpo es la medida de la cantidad de Materia que posee el cuerpo, también se puede definir a la masa de un cuerpo como la medidas cuantitativa de la “Inercia”. La masa se considera como constante para fines de la Mecánica Clásica, no así de la Mecánica Relativista. Si dos cuerpos están hechos del mismo material uniformemente distribuido y tienen el mismo volumen entonces sus masas son iguales.

La primera Ley de Newton expresa que si un cuerpo cambia (varía) su velocidad, luego, una fuerza debería haber sido aplicada. Ninguna mención se hace al marco de

referencia; ¡Si un cambio de velocidad ocurre depende de la posición del observador! Este argumento será considerado en detalle en el tema 3.6.

La segunda ley establece una relación entre la magnitud de la fuerza y el índice de cambio con respecto al tipo de *Momentum*:

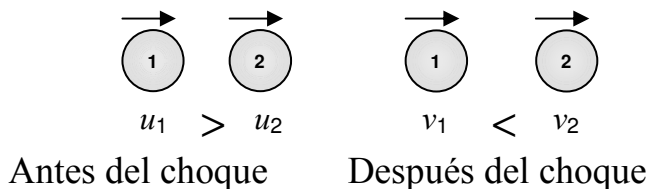
$$\begin{aligned} \text{Fuerza} &\propto \frac{d}{dt}(\text{momentum}) \\ \text{o} \quad F &\propto \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cuando todos los puntos en el cuerpo tiene la misma aceleración.

*Equivalencia de masas*

Si dos objetos hechos de materiales diferentes, chocan entre sí, entonces, por la tercera Ley de Newton, ellos reciben fuerzas iguales pero opuesta a cualquier tipo dado y de esto se desprende que el *Momentum* ganado por un cuerpo debe ser igual al que pierde por el otro objeto o cuerpo.

Si realizamos un experimento simple de colisión o choque entre dos cuerpos y medimos la velocidad antes y después del impacto, entonces es posible obtener una expresión para la razón de sus masas. Por lo que, igualando el *momentum* antes del impacto al *momentum* después del impacto para estos dos cuerpos, tenemos:



$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

por tanto

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) = m_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2)$$

y

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1 - u_1}{u_2 - v_2} = \left| \frac{\text{variación de la rapidez de la masa 1}}{\text{variación de la rapidez de la masa 2}} \right| \quad (3.2)$$

Por lo tanto las leyes de Newton nos suministran, al menos en principio, un medio de medición de la masa y también nos conduce a la ley de conservación del *momentum* (cantidad de movimiento lineal); ver temas 3.13 y 3.16.

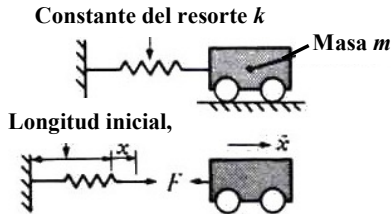


Figura 3.1

### 3.3 Fuerza y Momento de Fuerza

La naturaleza o esencia de “fuerza” es compleja, así que es mejor considerar fuerza como un concepto útil en el estudio de la mecánica. Ésta juega un rol en mecánica; similar al que juega el dinero en el comercio o negocios, de que nos permite relacionar un fenómeno o suceso en una disciplina a uno, en otra disciplina. Por ejemplo, en el caso simple de un resorte y una masa (figura 3.1) los resultados de la segunda ley de Newton y la ley de Hooke puede combinarse.

De la ley de Hooke<sup>5</sup>,

$$F = kx \quad (k = \text{constante})$$

y de la segunda ley de Newton, considerando la acción hacia la derecha de los vectores como positiva.

$$-F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Eliminando  $F$  de estas dos ecuaciones, nos da:

$$kx + m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (3.3)$$

La que es una ecuación diferencial que nos relaciona el desplazamiento  $x$  con el tiempo  $t$ .

Obsérvese que la fuerza se utiliza para representar el efecto que un cuerpo tiene sobre otro. Consideremos ahora la definición de fuerza. Necesitamos una definición formal para evitar ambigüedad, ya que no todos los escritores de

<sup>5</sup> La ley de Hooke establece que cualquier deformación producida por un sistema dado de cargas es proporcional a la magnitud de las cargas. Un cuerpo obedeciendo la ley de Hooke se dice que es linealmente elástico.

Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

libros de Mecánica y Física, dan el mismo concepto cuando ellos utilizan el término “fuerza”.

*Definición de fuerza*

Fuerza es la acción de *un cuerpo sobre otro* la cual produce, cuando actúa sola, un cambio en el movimiento de un cuerpo. (La segunda ley de Newton proporciona el medio de cuantificación de la fuerza.)

*Momento de fuerza*

El momento de una fuerza  $F$  respecto a un punto  $O$  es el producto vectorial (producto cruz ( $\times$ )) del vector de posición  $r$ , que localiza cualquier punto sobre la línea de acción de  $F$  con respecto a  $O$ , cruz ( $\times$ ) la fuerza  $F$ , es decir,

$$M_O = r \times F \quad (3.4)$$

Desde el punto de vista de la Física  $M_O$ , representa la tendencia de la fuerza  $F$  a hacer girar el cuerpo (sobre el que actúa) alrededor de un eje que pasa por  $O$  y es perpendicular al plano definido por la fuerza  $F$  y el Vector de posición  $r$ .

**3.3.1. Tipos de fuerzas**

Es conveniente agrupar las fuerzas en dos clases: (a) fuerzas de rango o alcance amplio y (b) fuerzas de rango corto. Las fuerzas de rango amplio son las fuerzas gravitacionales, electrostática y fuerzas magnéticas, también conocidas como fuerzas corporales. Las fuerzas de rango corto son las fuerzas debidas al contacto de dos cuerpos. Podría argumentarse que las fuerzas de rango corto son solamente casos especiales de las fuerzas de rango amplio; pero en aplicaciones en Mecánica, la diferencia o distinción es evidente.

Las fuerzas de contacto son a menudo sub-divididas en fuerzas normales; esto es normal al plano tangente de contacto; y fuerzas tangenciales de corte o fuerzas de rozamiento las cuales son paralelas al plano de contacto.

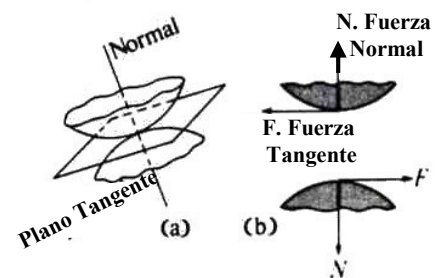


Figura 3.2

### 3.3.2. Principios de rozamiento seco

La fuerza de rozamiento entre dos superficies no lubricadas es una cantidad que depende de un gran número de factores, sin embargo la consideración de un caso ideal conocido como Rozamiento de Coulomb es frecuentemente aceptado como adecuado. En este caso la fuerza de rozamiento se asume que toma cualquier valor hasta un valor máximo o límite. Este valor límite se considera ser proporcional a la fuerza de contacto normal entre las dos superficies,

$$\text{tal que } F = \mu N \quad (\text{ver figura 3.3}) \quad (3.5)$$

donde  $\mu$  es llamado coeficiente de rozamiento límite.

*La dirección de la fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento relativo que esta, ocurriendo o que puede ocurrir en superficies en contacto.* Entre superficies lubricadas las fuerzas de rozamiento viscoso tangentes a la superficie de contacto son aproximadamente proporcionales a la rapidez relativa y a él área de contacto, sin embargo, son casi independientes de la fuerza normal entre los dos cuerpos. No obstante, para las fuerzas de rozamiento seco (rozamiento de Coulomb) la fuerza tangencial de rozamiento es casi independiente de la rapidez relativa y el área de contacto sin embargo, ambas fuerzas de rozamiento estático y de rozamiento de deslizamiento son proporcionales a la fuerza normal entre los dos cuerpos. Y es generalmente observado que la fuerza máxima de rozamiento estático (no deslizamiento) es más grande que la fuerza de rozamiento deslizante (rozamiento cinético) entre los mismos dos cuerpos.

Los coeficientes de rozamiento son definidos como sigue. El coeficiente de rozamiento estático  $\mu_s$  y el coeficiente de rozamiento cinético  $\mu_k$  entre dos superficies

$$F_{m\acute{a}x} = \mu_s N; \quad F_k = \mu_k N \quad (3.5.1.)$$

Obsérvese que en general la fuerza de rozamiento estático  $F$  no es igual a  $\mu_s N$ . Solamente cuando rozamiento

Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

estático ha alcanzado el valor máximo posible y el *deslizamiento es inminente*, la fuerza de rozamiento  $F$  igual a  $\mu_s N$ . Problemas implicando el *rozamiento de Coulomb* se presentan en tres clases o grados:

1. Rozamiento estático con  $F < F_{m\acute{a}x}$
2. Movimiento inminente  $F = \mu_k N$
3. Movimiento relativo establecido  $F = \mu_k N$

Problemas de rozamiento son a menudo más conveniente analizar, mostrando, la magnitud  $R$  del vector fuerza de reacción total de la superficie plana horizontal, donde descansa un cuerpo de peso  $W$ , el cual es sujeto a una fuerza  $P$  paralela a la superficie plana y que aumenta gradualmente, figura 3.3, observándose que el movimiento no tiene lugar hasta que  $P$  alcanza un valor definido, donde:

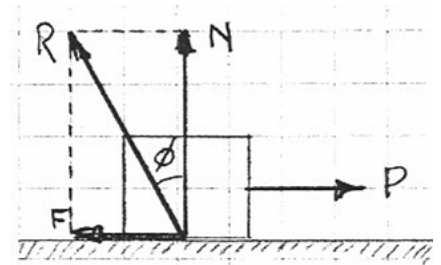


Figura 3.3

$$R = \sqrt{(F^2 + N^2)}, \quad F = N \operatorname{tg} \phi \quad (3.5.2)$$

El valor crítico de  $\Phi$  para el cual el movimiento es inminente se llama *ángulo de rozamiento estático*  $\phi_s$  mientras que el valor constante de  $\Phi$  durante el movimiento relativo es llamado *ángulo de rozamiento cinético*  $\phi_k$  obsérvese que:

$$\mu_s = \operatorname{tg} \phi_s = \frac{F_{m\acute{a}x}}{N}, \quad \mu_k = \operatorname{tg} \phi_k = \frac{F_k}{N} \quad (3.5.3)$$

Hasta ahora hemos considerado las fuerzas de contacto actuando en un punto, aunque estas fuerzas se supone que actúan distribuidas sobre un área finita,  $A$ . La intensidad de la carga normal es definida por:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA} \quad (3.6)$$

La cual se llama “presión” o “esfuerzo normal”; es convencional hablar de “Presión” cuando se trata de líquidos, de “esfuerzo” cuando se trata con sólidos.

### 3.4. Ley de la Gravitación Universal

Isaac Newton fue también responsable de enunciar la ley de gravitación, la cual se expresa como:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad (3.7)$$

donde  $F$  es la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  separadas por una distancia  $d$ ;  $G$  es la constante de la gravitación universal y tiene un valor

$$G = (6.670 \pm 0.005) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$$

La masa de la Tierra se considera de  $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$  y su radio medio de  $6.368 \times 10^6 \text{ m}$ . De la ecuación (3.7), la fuerza actuando sobre una masa de  $1 \text{ kg}$  en la superficie de la Tierra es:

$$F = \frac{6.670 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times 1}{(6.368 \times 10^6)^2} = 9.8516 \text{ N}$$

Si esta fuerza actúa sola sobre una masa unitaria, se infiere que la aceleración producida será:

$$9.8516 \text{ m/s}^2$$

Esta cantidad es frecuentemente llamada aceleración debido a la gravedad y se representa con el símbolo  $g$ ; así

$$\text{Fuerza gravitacional} = \text{masa} \times g \quad (3.8)$$

Se prefiere considerar a  $g$  cómo la intensidad del campo gravitacional midiéndose en  $\text{N/kg}$ .

El valor normalizado pronunciado para  $g$  es:

$$g_n = 9.80665 \text{ m/s}^2 \quad \text{o} \quad \text{N/kg}$$

Este difiere del valor calculado, debido a que la Tierra no es una esfera perfecta y debido también a que el valor medido es afectado por la rotación de la Tierra.



## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

#### *Peso de un cuerpo*

El peso  $W$  de un cuerpo es generalmente definido como la fuerza actuando sobre el cuerpo debida a la gravedad ( $mg$ ); esta se interpreta generalmente como ‘La fuerza igual y opuesta que se requiere para mantener un cuerpo en “reposo” en un marco de referencia elegido, esto es, relativo a la superficie de la Tierra o relativo a una nave espacial orbitando libremente en la percepción de ‘ingravidez’. La diferencia entre las dos definiciones en la superficie de la Tierra es solamente 0.4 por ciento.

Utilizando la última definición,  $W = masa \times g'$ ; donde  $g'$  es la intensidad de campo aparente.

A no ser que de otra manera se establezca, el valor de  $g$  se asume el de  $g_n$ , que para fines de ingeniería tomaremos el

valor aproximado de  $g_n = g = 9.81 \frac{m}{s^2} \left( \frac{N}{kg} \right)$

### 3.5. Unidades

Las cantidades físicas se definen *cualitativamente* mediante las *dimensiones* y *cuantitativamente* mediante las *unidades*. La aplicación correcta de la segunda ley de Newton exige la utilización de un sistema de dimensiones homogéneas. Como la segunda ley relaciona las tres cantidades correspondientes de fuerza, masa, y aceleración, sólo es posible especificar las dimensiones de dos de las cantidades citadas. Las dimensiones de la tercera cantidad son obtenidos mediante la ecuación (3.1),  $F=ma$ . Generalmente se consideran básicos fundamentales las dimensiones correspondientes a la longitud  $[L]$  y el tiempo  $[T]$ , luego las dimensiones de la aceleración son especificadas como  $[LT^{-2}]$ . Lo anterior implica que debe seleccionarse la masa ( $m$ ) o la fuerza ( $F$ ) como una dimensión fundamentalmente.

Por consiguiente los cuatro elementos básicos de la mecánica tienen asociado a cada uno de ellos, las cuatro

## Principios de Mecánica para Ingeniería

clases de las dimensiones: longitud  $[L]$ , tiempo  $[T]$ , masa  $[M]$  y fuerza  $[F]$ .

Cada ecuación física debe ser dimensionalmente homogénea; esto es, ésta debe tener las mismas dimensiones en ambos miembros de la igualdad. Por tanto, cuando la segunda ley de Newton es escrita en la forma que ésta toma con un conjunto consistente de unidades, es decir  $F = ma$ , ecuación (3.1) la relación

$$[F] = \left[ \frac{ML}{T^2} \right] \quad \text{o} \quad [M] = \left[ \frac{FT^2}{L} \right] \quad (3.9)$$

está implícita; en sistemas de unidades donde la longitud  $[L]$ , la masa  $[M]$  y el tiempo  $[T]$  se toman como dimensiones fundamentales, se les denomina sistemas  $LMT$  o *absolutos*; mientras que en sistemas en los cuales la longitud  $[L]$ , la fuerza  $[F]$  y el tiempo  $[T]$  se elige como dimensiones fundamentales, se les nomina Sistemas  $LFT$  o “gravitacional”.

Haciendo una *verificación* de una expresión física que involucra solamente cantidades mecánicas, expresando todas las dimensiones en términos de las tres dimensiones fundamentales elegidas. Por ejemplo, para verificar que las dimensiones del “Trabajo” (fuerza x distancia) son las mismas como las de la *energía cinética*  $\left( \frac{1}{2}mv^2 \right)$  de una partícula, que solicitemos, ya que  $[v] = [L/T]$ , si

$$[FL] = \left[ \frac{ML^2}{T^2} \right] \quad (3.10)$$

Sustituyendo a  $[F]$  de la ecuación (3.9) en la ecuación (3.10), tenemos:

$$\left[ \frac{ML^2}{T^2} \right] = \left[ \frac{ML^2}{T^2} \right]$$

o en forma alterna sustituyendo a  $[M]$  de la ecuación (3.9) en la ecuación (3.10), obtenemos:

$$[FL] = [FL]$$

Por cualquier procedimiento, vemos que la ecuación (3.10) es dimensionalmente correcta, y también vemos que en el sistema  $LMT$  las dimensiones del trabajo son  $[ML^2/T^2]$ , mientras que en el sistema  $LFT$  las dimensiones de la energía cinética son  $[FL]$ .

### 3.5.1. Sistema de unidades

La dimensión de longitud  $[L]$ , por ejemplo, puede ser medida en unidades de metros, centímetros, pies, millas o años luz. Podemos considerar que en el siglo pasado se tenían 5 sistemas principales de unidades; tres sistemas métricos y dos sistemas británicos; de los tres sistemas métricos, dos son absolutos y el tercero es gravitacional; uno de los sistemas métrico absoluto, el más antiguo, emplea como unidades fundamentales el centímetro, gramo masa y el segundo, conocido como sistema absoluto  $CGS$ ; el otro sistema métrico absoluto, el más reciente utiliza como unidades fundamentales básicas el metro, kilogramo masa y el segundo, conocido como sistema internacional de unidades ( $SI$ ); el tercer sistema métrico, que es gravitacional utiliza como unidades fundamentales al metro, kilogramo fuerza y el segundo y se denomina  $M$ ,  $Kgf$ ,  $S$  gravitacional.

De los dos sistemas británicos el sistema gravitacional  $[LFT]$ , vigente todavía y en proceso de desaparecer en los Estados Unidos y en otros países de habla inglesa, emplea al *pie*, *libra fuerza* y el *segundo* como unidades fundamentales conociéndose como el sistema británico gravitacional de unidades ( $f$ ,  $lb$ ,  $s$ ); el otro sistema británico es el absoluto  $[LMT]$ , propiamente en desuso en Estados Unidos y en otros países de habla inglesa, este sistema toma unidades fundamentales al pie, libra masa y el segundo conociéndose también como sistema británico absoluto de unidades ( $f$ ,  $p$ ,  $s$ ).

*De acuerdo a las expresiones (3.9) tenemos:*

## Principios de Mecánica para Ingeniería

Para el sistema absoluto *CGS* (centímetro, gramo masa, segundo), la unidad de fuerza es una unidad derivada, así como de las restantes magnitudes físicas que tenga relación con estas unidades fundamentales (centímetro, gramo masa, segundo), y se denomina *dina* (*dyn*) y es la fuerza que debe aplicarse a una partícula o cuerpo en una masa de un gramo (*g*) para producir en ella una aceleración de  $1\text{ cm/s}^2$ .

Como se vera más tarde, el sistema internacional *SI* se basa en siete unidades fundamentales: el metro, el kilogramo, el segundo, el mol, el Amper, el Kelvin y la candela, así como de dos unidades suplementarias que se emplean en todos los sistemas de unidades, que son el radian y el estereorradián.

El sistema métrico gravitacional también conocido como sistema técnico o *M kg f s*, que es el más viejo de todos los sistemas, tienen un defecto fundamental, que es la esfera limitada de aplicación, solamente para las mediciones mecánicas. Entre los muchos defectos que tiene este sistema está en el nombre especial para la unidad de masa, siendo una unidad derivada, que en los manuales de física y mecánica se nombra como “*utm*” (unidad técnica de masa) y que representa la masa de una partícula que adquiere una aceleración unitaria cuando la solicita una fuerza unitaria, es decir,  $1\text{ utm} = \frac{1\text{ kgf}}{1\text{ m/s}^2} = 9.81\text{ kg}$ .

Los dos sistemas británicos (ingleses) [*LFT*] y [*LMT*] provocaron una inevitable confusión debido a la palabra *libra*, la que es usada con dos diferentes sentidos: libra-fuerza (*Lbf*) y libra-masa (*Lbm*). Cuando la libra-fuerza y la libra-masa son ambas utilizadas en la expresión de segunda ley de Newton (3.9) con [*L*] en pies y [*T*] en segundos, este sistema de unidades no es consistente.

El sistema que ha sido más comúnmente usado por los ingenieros en los Estados Unidos y otros países de habla

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

inglesa es el sistema británico *FLT*, donde las unidades fundamentales son la libra-fuerza, (*Lbf*), el pie (*pie*) y el segundo (*s*). La unidad de masa es entonces, una unidad derivada, definida como la cantidad de masa que obtiene una aceleración de  $1 \frac{\text{Pie}}{\text{s}^2}$  cuando la fuerza total actuando sobre esta es de 1 *lbf*. El nombre de *Slug* se le da a esta unidad derivada.

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2 / \text{pie}$$

Este sistema británico gravitacional *FLT* se conoce en Estados Unidos como Sistema Inglés (*US*), las unidades *US* provienen del nombre “*U. S. Customary Units*”, que se emplea en este país para designar a este antiguo Sistema de Unidades originado en Inglaterra. Estados Unidos es prácticamente el único país del mundo que no ha adoptado como obligatorio el sistema *SI*. La institución denominada *United States Metric Association (USMA)*, promueve intensamente el conocimiento y adopción general del *SI* en todo los campos: educativos, comerciales, tecnológicos, etc.

#### 3.5.2. Sistema Internacional de Unidades *SI*

En la actualidad se ha adoptado casi en todo el mundo el *Sistema Internacional de Unidades*, que como sabemos, se simboliza por *SI* y es el resultado moderno de la evolución del sistema físico llamado *MKS*. El nombre oficial del *SI* es *Système International d’Unités* y las normas respectivas las establece y actualiza el *Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)* con sede en Sèvres, París, Francia.

El sistema internacional de unidades (*SI*) surgió de la necesidad de tener un sistema de unidades que abarcara todas las esferas de la física y de la técnica. Para que fuese posible relacionar las unidades prácticas de las magnitudes eléctricas y magnéticas con las unidades mecánicas, técnicas y otras. El sistema *SI* (sistema internacional) fue adoptado en el año 1960 por 47 naciones signatarias en la conferencia general de pesas y medidas realizada en Sèvres cerca de París.

## Principios de Mecánica para Ingeniería

### *Unidades Básicas o Fundamentales*<sup>6</sup>

El *SI* tiene siete unidades fundamentales que corresponden a las cantidades físicas básicas del sistema, y son como sigue:

Cantidad Fundamental	Nombre de la Unidad	Símbolo de la Unidad
Longitud [L]	metro	<i>m</i>
Masa [M]	kilogramo	<i>kg</i>
Tiempo [T]	segundo	<i>s</i>
Temperatura termodinámica	Kelvin	<i>K</i>
Intensidad de corriente	Ampre	<i>A</i>
Intensidad luminosa	candela	<i>cd</i>
Cantidad de sustancia	mol	<i>mol</i>

El símbolo de cada unidad se haya normalizado y es el mismo en todos los países, no deben usarse otros símbolos fuera de norma.

### *Unidades Suplementarias*<sup>7</sup>

Como unidades que suplementan a las básicas se tienen las dos siguientes:

Cantidad Suplementaria	Nombre de la Unidad	Símbolo de la Unidad
Ángulo plano ( $\theta$ )	radian	<i>rad</i>
Ángulo sólido ( $\Omega$ )	estereorradian	<i>sr</i>

### *Múltiplos y Submúltiplos: Prefijos*

Para ampliar o reducir el tamaño de una unidad *SI* se utilizan los múltiplos y submúltiplos de la misma, que se obtienen aplicando como factores, potencias del número 10. Con el fin de indicar lo anterior, se utiliza prefijos que se aplican al nombre de las unidades *SI*. Tales prefijos y factores para la formación de unidades decimales múltiplos y submúltiplos son dados en la siguiente tabla.

<sup>6</sup> Los conceptos actuales de las unidades básicas del sistema *SI* ver Apéndice 2 - "Unidades".

<sup>7</sup> Las definiciones de las unidades suplementarias, ver Apéndice 2-"Unidades".

<b>Prefijo</b>	<b>Factor</b>	<b>Designación Internacional</b>	
exa	$10^{18}$	<i>E</i>	} Múltiplos
peta	$10^{15}$	<i>P</i>	
tera	$10^{12}$	<i>T</i>	
giga	$10^9$	<i>G</i>	
mega	$10^6$	<i>M</i>	
kilo	$10^3$	<i>K</i>	
hecto	$10^2$	<i>h</i>	
deca	$10^1$	<i>da</i>	}
deci	$10^{-1}$	<i>d</i>	} Submúltiplos
centi	$10^{-2}$	<i>c</i>	
mili	$10^{-3}$	<i>m</i>	
micro	$10^{-6}$	$\mu$	
nano	$10^{-9}$	<i>n</i>	
pico	$10^{-12}$	<i>p</i>	
femto	$10^{-15}$	<i>f</i>	
atto	$10^{-18}$	<i>a</i>	

El uso de los prefijos y factores es ejemplificado como sigue:

metro:  $m$ ; Kilómetro:  $km=10^3m$ ; milímetro:  $mm=10^{-3}m$ ;  
 Ampere:  $A$ ; miliampere:  $mA=10^{-3}A$ ; microampere:  $\mu A = 10^{-6}A$ ;  
 Watt:  $W$ ; kilowatt =  $kW = 10^3W$ ; megawatt:  $MW=10^6W$ ;  
 gigawatt:  $GW = 10^9W$

$$1mm^2 = 1(10^{-3}m)^2 = 10^{-6}m^2 = \mu m^2 = 0.000001m^2$$

$$1ns^{-1} = 1(10^{-9}s)^{-1} = 10^9s^{-1} = Gs^{-1} = 1000\,000\,000s^{-1}$$

$$1PW = 1(10^{15}W) = 10^{15}W = 10^{12}KW$$

En el caso del kilogramo, sus múltiplos y submúltiplos se forman tomando como base la unidad auxiliar gramo ( $g$ ), igual a  $10^{-3}kg$ . Por ejemplo, miligramo ( $mg$ ) igual  $10^{-3}g = 10^{-6}kg$ , microgramo ( $\mu g$ ) igual a  $10^{-6}g = 10^{-9}kg$ .

## Principios de Mecánica para Ingeniería

### *Unidades Derivadas SI*

Para la mecánica se tienen algunas de las más utilizadas de las unidades derivadas de las básicas y que tienen nombre especial:

#### **Fuerza (y peso)**

Newton ( $N$ ): Fuerza que al ser aplicada a una masa de 1  $kg$  le imparte una aceleración, en su misma dirección y sentido igual, igual a  $1m/s^2$ .

#### **Presión y esfuerzo**

Pascal ( $Pa$ ): Intensidad de fuerza aplicada por unidad de superficie equivalente a  $1 N/m^2$ .

#### **Frecuencia o periodicidad**

Hertz ( $Hz$ ): Variación periódica equivalente a un ciclo por segundo ( $c/s$ ).

#### **Trabajo y energía**

Joule ( $J$ ): Trabajo realizado por una fuerza de  $1N$ , cuando su punto de aplicación se desplaza una distancia de  $1m$  en la dirección y sentido de la fuerza.

#### **Potencia y flujo de energía**

Watt ( $W$ ): Potencia o flujo de energía que se desarrolla a razón de  $1 J/s$ .

La unidad de energía joule ( $J$ ) se aplica también a los fenómenos térmicos y de cualquier otra clase. Lo mismo corresponde al Watt ( $W$ ).

En el apéndice 2 se presenta una tabla de las cantidades mecánicas fundamentales y derivadas que se tienen en los sistemas de unidades  $SI$ ,  $cgs$ ,  $m kg fs$ ,  $pie-libra fuerza-s$  y  $pie-libra-s$  y las conversiones de unidades más usuales de los 4 últimos sistemas de unidades con el sistema  $SI$  y las unidades auxiliares de  $SI$  correspondientes a unidades de tiempo y ángulo plano.



### **3.6. Marcos de Referencia**

En el capítulo anterior el término “marco de referencia” o sistema de referencia fue utilizada. Es evidente que en la interpretación de la primera ley de Newton debemos tener algún marco de referencia desde el cual se mida la velocidad. Para la mayoría de los problemas elementales de mecánica, consideramos la superficie de la Tierra como un marco apropiado a pesar de saber que tal marco está rotando relativo a las estrellas y se está moviendo alrededor del Sol.

Intuitivamente, suponemos que un marco de referencia no teniendo aceleración relativa con el Sol y no rotando respecto a las estrellas sería el marco o sistema de referencia más apropiado. Considerado tal marco de referencia como “Inercial” o “Galileano”. De esto se concluye que cualquier otro marco moviéndose con velocidad constante relativo a nuestro marco inercial original, también será un marco inercial, puesto que las leyes de Newton serán igualmente aplicables a cualquiera de estos marcos. Esto es debido a que la fuerza depende del índice de variación de la velocidad con respecto al tiempo la cuál será la misma cuando se cuida en cualquier marco la referencia inercial.

Para los sistemas o marcos inerciales de referencia es justo *el principio de la relatividad de Galileo*, según el cuál todos los sistemas inerciales son equivalentes uno a otro por sus propiedades mecánicas. Esto significa que con ningún experimento mecánico, realizado dentro del marco inercial dado, se puede establecer si este marco de referencia está en reposo o se mueve. Las propiedades del espacio y el tiempo son iguales en todos los marcos inerciales de referencia, como son también iguales todas las leyes de mecánica y se confirma en las aplicaciones al movimiento de los cuerpos con velocidad de los cuales es considerablemente menor que la de la luz.

En la teoría especial de la relatividad, creada por Einstein en 1905, fueron revisadas de forma radical las representaciones newtonianas sobre el espacio y el tiempo. Semejante revisión llevó a la creación de la mecánica de grandes velocidades o, como es denominada a la *mecánica relativista*.

Sin embargo, la aparición de la nueva mecánica no provocó la refutación completa de la mecánica newtoniana. En el límite, las ecuaciones de la mecánica relativista (para velocidades pequeñas en composición con la de la luz) se convierten en las ecuaciones de la mecánica clásica. De este modo, la mecánica clásica ha entrado en la relativista como un caso particular.

### 3.7. Sistemas de Partículas

Hasta aquí hemos considerado, ya sea una partícula simple o implícitamente asumimos que existe un punto material representativo cuyo movimiento puede ser descrito. Sin embargo, cualquier objeto real es una aglomeración de partículas elementales, apretadas por fuerzas internas y bajo la acción de fuerzas corporales externas y fuerzas de superficie.

Consideremos una acumulación de  $n$  partículas de masa  $m_i$  y posición  $r_i$ . La fuerza actuando sobre cualquier partícula típica puede deberse (a) a las fuerzas corporales externas, (b) a las fuerzas internas de una partícula sobre otra, o (c) si la partícula esta en la superficie, entonces una fuerza de contacto es posible.

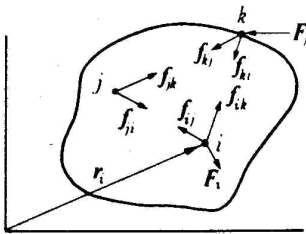


Figura 3.4

Para la partícula  $i$ -ésima (figura 3.4)

$$F_i + \sum_J f_{ij} = m_i \ddot{r} \quad (3.11)$$

Donde  $f_{ij}$  es la fuerza sobre la partícula  $i$  debida a la partícula  $j$ . Así

$$\text{Fuerza externa} + \text{suma de fuerzas internas} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

obsérvese que:

$$\sum \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_{ia} + \mathbf{f}_{ib} + \dots + \mathbf{f}_{ij} + \dots + \mathbf{f}_{in} \quad (3.12)$$

Por la tercera ley de Newton,

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \quad (3.13)$$

y en la mayoría de los casos estas fuerzas son colineales. [Existen algunos casos en la teoría electromagnética donde las fuerzas iguales y opuestas no son colineales; luego se dice que esta ley de Newton se encuentra en su forma más débil].

Si ahora sumamos todas las ecuaciones 3.11 obtenemos:

$$\sum_n \mathbf{F}_i + \sum_n \left( \sum_{J=1}^{J=n} \mathbf{f}_{ij} \right) = \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (3.14)$$

La doble sumatoria resulta de hecho bastante simple, ya que para cada  $f_{ij}$  se tiene una  $f_{ji}$  tal que  $f_{ij} + f_{ji} = 0$

Por consiguiente obtenemos:

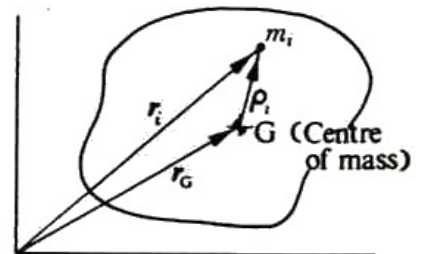
$$\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (3.15)$$

### 3.7.1. Centro de masa

El centro de masa o el centro de inercia de un cuerpo es un punto notable  $C$ , ( $G$ ) que posee una serie de importantes e interesantes propiedades. Su posición con relación al origen  $O$  de un sistema dado de referencia se representa por el radio vector o vector de posición  $r_G$  y es de definido por la ecuación:

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = (\sum m_i) \mathbf{r}_G = M \mathbf{r}_G \quad (3.16)$$

donde  $M$  es la masa total del cuerpo y  $r_G$  el vector de posición del centro de masa, como se muestra en la figura 3.5.



**Figura 3.5**

Se debe señalar que el centro de masa de un sistema de partículas coincide con su centro de gravedad.

## Principios de Mecánica para Ingeniería

Esta afirmación es justa solo en aquellos casos, cuando el campo de las fuerzas de gravedad se puede considerar homogéneo en los límites del sistema dado.

En forma escalar, considerando  $\mathbf{r}_G = \bar{x}\hat{\mathbf{i}} + \bar{y}\hat{\mathbf{j}} + \bar{z}\hat{\mathbf{k}}$

$$\sum m_i x_i = M\bar{x}; \quad \sum m_i y_i = M\bar{y}; \quad \sum m_i z_i = M\bar{z} \quad (3.17)$$

Una descripción alternativa para encontrar la ecuación del movimiento del centro inercia (centro de masa) puede obtenerse, escribiendo

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \boldsymbol{\rho}_i \quad (\text{de la figura 3.5})$$

y sustituyendo en la ecuación (3.16) nos da

$$\sum m_i (\mathbf{r}_G + \boldsymbol{\rho}_i) = (\sum m_i) \mathbf{r}_G$$

de aquí

$$\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Derivando la ecuación 3.16 por dos ocasiones con respecto al tiempo

$$\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{r}}_G \quad \text{y} \quad \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = M \ddot{\mathbf{r}}_G \quad (3.16a)$$

En forma similar, la ecuación 3.18

$$\sum m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum m_i \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{0} \quad (3.18a)$$

En términos del centro de inercia o centro de masa la ecuación (3.15) nos dará:

$$\sum \mathbf{f}_i = \mathbf{F} = M \ddot{\mathbf{r}}_G \quad (3.19)$$

Esta es la ecuación del movimiento del centro de inercia que establece que el vector suma (Resultante) de las fuerzas externas actuando sobre un conjunto cualquiera de partículas produce un movimiento de su centro de inercia, como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en éste punto y sobre él fueran aplicadas todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Con ello, la aceleración del centro de masa no depende en absoluto de los puntos de aplicación de las fuerzas externas. Esta

ecuación es igualmente aplicable a cualquier sistema de partículas, ya sea si estos estén rígidamente conectados o no.

El centro de masa para un cuerpo con una distribución uniforme y continua de materia, la ecuación (3.16) se presenta como sigue:

$$\int_V (\mathbf{r} dm) = \mathbf{r}_G \int dm = \mathbf{r}_G M \quad (3.16b)$$

En el modelo de distribución de masa continua de un cuerpo la masa de cada volumen infinitesimal es  $dm = \delta dV$ , donde  $\delta = \delta(x, y, z, t)$  es la densidad o masa por unidad de volumen. La masa del cuerpo  $M$  ocupando un volumen  $V$  es dada por l integral de volumen.

$$M = \int_V dm = \int_V \delta dV \quad (3.20)$$

La integral de volumen puede ser evaluada a cualquier tiempo cuando  $\delta$  es conocida como una función de posición por la introducción de un sistema de coordenadas, por ejemplo, un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares donde el volumen diferencial  $dV$  es un bloque rectangular con lados  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , por lo tanto la integral de volumen será una reiterada triple integral.

$$M = \iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz \quad (3.20a)$$

En forma escalar las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  del centro de masa para un cuerpo se obtienen de las ecuaciones escalares siguientes:

$$M \bar{x} = \int_V x dm; \quad M \bar{y} = \int_V y dm; \quad M \bar{z} = \int_V z dm; \quad (3.21)$$

o

$$\bar{x} = \frac{\int_V x \delta dV}{\int_V \delta dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y \delta dV}{\int_V \delta dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z \delta dV}{\int_V \delta dV}; \quad (3.21a)$$

Las integrales en el miembro derecho de las ecuaciones (3.21) definen la distribución de los momentos de primer orden de masa con respecto al plano  $yz$ , al plano  $xz$  y al plano  $xy$  respectivamente. El *brazo de momento* del elemento diferencial  $dm$ , medido desde el plano  $yz$ , es  $x$ , y  $\bar{x}$  es el brazo de momento de un cuerpo de masa  $M$  que tiene el mismo momento de primer orden con respecto al plano  $xy$ , de masa distribuida. Similar explicación se aplica para los otros brazos de momento  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ . Se observa que los momentos de primer orden pueden ser positivos, negativos o cero. Por ejemplo, si el origen es elegido en el centro de masa, todos los momentos de primer orden son cero.

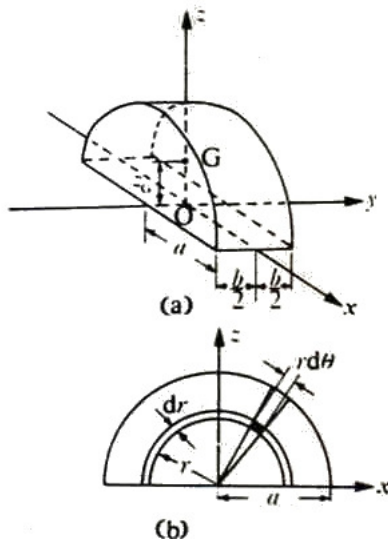


Figura 3.6

Como un ejemplo de localizar el centro de masa de un cuerpo con una distribución uniforme y continua de materia, consideramos la mitad de un cilindro sólido recto, mostrado en la figura 3.6.

Por simetría, el centro de masa deberá estar, situado en el eje  $z$ .

El elemento diferencial de masa ( $dm$ ) con densidad  $\delta$  es:

$$\delta b (rd\theta) dr$$

y su momento de masa de primer orden respecto al eje  $x$  es:

$$\delta b (rd\theta) dr r \sin\theta$$

Para un anillo cilíndrico diferencial de espesor  $dr$  y radio  $r$ , el momento primero de masa respecto al eje  $x$  es:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \delta b r^2 dr \sin\theta d\theta &= \delta b r^2 (-\cos\theta) dr \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= 2\delta b r^2 dr \end{aligned}$$

Y para el cuerpo total, el momento primero de masa es:

$$\int_{r=0}^{r=a} 2\delta b r^2 dr = \left[ 2\delta b \left( \frac{1}{\delta} r^2 \right) \right]_{r=0}^{r=a} = \frac{2}{3} \delta b a^3$$

La masa total del cuerpo es  $\delta \frac{1}{2} \pi a^2 b$  tal que, por definición del centro de Masa.

$$\bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\iint \delta b r^2 \sin \theta dr d\theta}{\iint \delta b dr r d\theta} = \frac{\frac{2}{3} \delta b a^3}{\frac{1}{2} \delta b \pi a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$

### **3.8. Diagramas de Cuerpo Libre**

Un cuerpo rígido puede ser tratado como una partícula cuando todo lo que buscamos es determinar el movimiento de su centro de masa; esto es, cuando no estamos vinculados con efectos rotacionales, si bien el título de esta unidad “3” se refiere a la *cinética de la partícula*, lo que en realidad se estudia son problemas de mecánica del cuerpo rígido en situaciones donde los cuerpos rígidos pueden tratarse como partículas.

La técnica más importante en el análisis de problemas de mecánica de ingeniería es la construcción de un diagrama de cuerpo libre (*dcl*), el que nos permite estar capacitados para aplicar apropiadamente la ecuación (3.19), y poder mostrar en forma clara todas las fuerzas que actúan sobre cualquier cuerpo, o colección de cuerpos, por lo que:

*Un diagrama de cuerpo libre* es un croquis o esquema de un cuerpo, de una porción de un cuerpo o de dos o más cuerpos interconectados y completamente aislados o libres de otros cuerpos, en donde se representan las acciones que solicitan al cuerpo considerado a causa de su interacción con los cuerpos que lo circundan.

Un diagrama de cuerpo libre posee tres características esenciales: (1) es un diagrama o croquis del cuerpo; (2) el cuerpo se representa separado completamente de otros cuerpos incluyendo las cimentaciones, apoyos, etc.; (3) la acción que le ejerce un cuerpo que se retiró durante el

proceso de aislamiento se representa en el diagrama como una o varias fuerzas.

En el diagrama de cuerpo libre (*dcl*) debe identificarse completamente cada fuerza con su magnitud si ésta es conocida o con una letra en caso contrario.

*Cuando el sentido de una fuerza desconocida no sea evidente, puede suponerse o corregirse posteriormente si el supuesto inicial resulta incorrecto.* La pendiente o el ángulo de inclinación de todas las fuerzas que no sean horizontales o verticales, debe especificarse. El exceso de dimensiones en el diagrama de cuerpo libre tiende a volverlo confuso; en consecuencia, en el diagrama deben incluirse sólo aquellas dimensiones desconocidas que se determinarán en el proceso de solución. El *dcl* debe mostrar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y ninguna fuerza que no actúa sobre el cuerpo. En particular *no deberá mostrar fuerzas ejercidas por el mismo y no deberá mostrar fuerzas internas* entre partes del mismo cuerpo.

Cuando se resuelven problemas que incluyen fuerzas y movimiento; en particular en la aplicación de la 2ª ley de Newton el movimiento de centro de masa de un cuerpo rígido ecuación (3.19); una propuesta útil es utilizar dos diagramas de cuerpo libre. Un diagrama mostrando el sistema fuerzas aplicadas al cuerpo y el otro diagrama mostrando el efecto de estas fuerzas en términos de la masa y la aceleración de su centro de masa producida. Las fuerzas masa-aceleración son nombradas fuerzas de efecto.

Como un ejemplo demostrativo (figura 3.7a) que desarrolla el proceso de construcción de los *dcl* para dos cuerpos conectados y también revisa situaciones de rozamiento seco; ver ecuación (3.5). Reconsiderando también que en una *polea ideal*, se desprecia el rozamiento en el rodamiento de la polea y su propia masa, la tensión  $T$  en el cable es la misma en ambos lados de la polea. Pero se observa con atención que *en cinética, la tensión  $T$  no es igual al peso suspendido  $W_2$* ; se presenta con el enunciado siguiente:



Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

Si el peso  $W_2$  es suficientemente grande para provocar el movimiento del sistema cinético mostrado en la figura (3.7a), determinar la tensión (tracción) en el cable, así como también la aceleración, rapidez y distancia recorrida de cada bloque en función del tiempo  $t$ , partiendo del reposo para  $t = 0$ .

*Solución:* Los diagramas tanto de cuerpo libre de fuerzas aplicadas como de fuerzas de efecto, para cada bloque se muestran en la figura (3.7b) y (3.7c) respectivamente. Aceptando que la polea es ideal y el coeficiente de rozamiento cinético  $\mu_k = \mu$  entre el cuerpo de peso  $W$  y la superficie horizontal  $AB$ . Ya que el peso  $W_2$  se mueve verticalmente mientras que el cuerpo  $W_1$  se mueve horizontalmente, cada uno está en movimiento rectilíneo. De la 2ª ley de Newton obtenemos dos ecuaciones del movimiento para el cuerpo  $W_1$ .

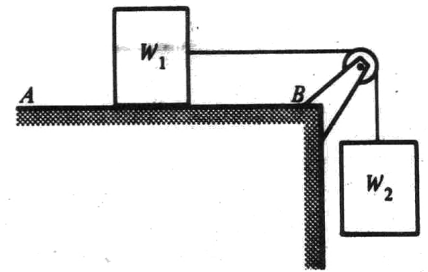


Figura 3.7a

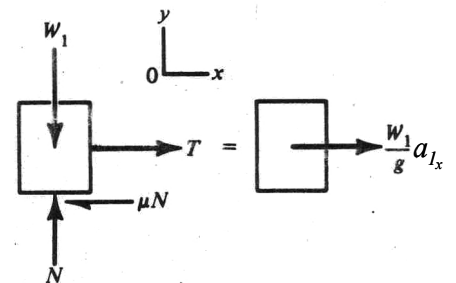


Figura 3.7b

$$[\sum F_x = M\ddot{x}_G]: T - \mu N_1 = \frac{W_1}{g} a_{1_x} \quad (a)$$

$$[\sum F_y = M\ddot{y}_G = 0]: N - W_1 = 0 \quad (b)$$

mientras para el cuerpo  $W_2$  tenemos sólo una ecuación:

$$[\sum F_y = M\ddot{y}_G]: T - W_1 = \frac{W_2}{g} (-a_{2_y}) \quad (c)$$

Por otra parte  $a_{1_x} = -a_{2_y}$ , asumiendo que el cable es inextensible y que permanece tirante; por lo que:

$$a = a_{1_x} = -a_{2_y}$$

además, después de sustituir  $N = W_1$  de (b) en (a) y (b) tenemos las dos siguientes ecuaciones,

$$T - \mu W_1 = \frac{W_1}{g} a; \quad T - W_2 = \frac{W_2}{g} (-a)$$

para los dos valores desconocidos  $T$  y  $a$ . Eliminando  $T$  nos da:

$$\mu W_1 + \frac{a}{g} W_1 = W_2 - \frac{a}{g} W_2$$

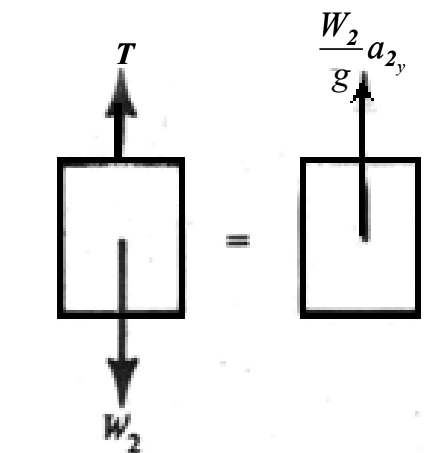


Figura 3.7c

## Principios de Mecánica para Ingeniería

Por consiguiente

$$a = \frac{W_2 - \mu W_1}{W_1 + W_2} g \quad (d)$$

Además

$$T = \left(1 - \frac{a}{g}\right) W_2 = \frac{(1 + \mu) W_1 W_2}{W_1 + W_2} \quad (e)$$

En ambas respuestas (d) y (e)  $a$  y  $T$  son independientes del tiempo. Por lo tanto  $v = at$  y  $s = \frac{1}{2}at^2$  nos da la rapidez y la distancia recorrida para cada cuerpo. El resultado es significativo solo si  $W_2$  sea más grande que  $\mu W_1$ .

### 3.9. 2da. Ley de Newton en Varios Sistemas de Coordenadas

La segunda ley de Newton expresada como una ecuación de movimiento de una partícula o de un cuerpo rígido considerado como partícula, de acuerdo a la ecuación (3.19) puede escribirse en las formas siguientes:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \text{o} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \text{o} \quad \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{r}}$$

Esta ecuación expresa la idea clave de la cinética de la partícula: la aceleración es proporcional a la fuerza resultante dependiendo de la naturaleza del problema, puede ser conveniente utilizar con preferencia, un tipo de sistema de coordenadas con respecto a otro, cuando se establecen las fuerzas y el movimiento. Las fuerzas son representadas en tres tipos de sistemas de coordenadas: Rectangulares, de trayectoria y polares. Puesto que tenemos representaciones para la aceleración en cada uno de estos tres sistemas de coordenadas, estaremos naturalmente capacitados para expresar la segunda ley de Newton en cada uno de estos sistemas.

**Sistema de coordenadas cartesianas:** La segunda ley de Newton en términos de coordenadas cartesianas, puede

escribirse como:

$$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = m(\ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k})$$

Para que ésta ecuación vectorial se cumpla, los coeficientes de los vectores unitarios en cada lado de la ecuación deben ser respectivamente los mismos. Así, para la cinética de la partícula el movimiento plano donde  $F_z = m\ddot{z} = ma_z = 0$ , resultando las dos ecuaciones escalares para movimiento plano (ver ecuación 2.6)

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = ma_x \\ F_y &= m\ddot{y} = ma_y \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

**Sistema de coordenadas de trayectoria:** La segunda ley de Newton en términos de coordenadas de trayectoria con sus componentes normal y tangencial en el “movimiento” de una partícula en un plano, es

$$F_t \mathbf{e}_t + F_n \mathbf{e}_n = m \left( \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t - \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \right)$$

La cual implica las dos ecuaciones escalares:

$$\left. \begin{aligned} F_t &= m \left( \frac{dv}{dt} \right) \\ F_n &= -\frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Los componentes normal y tangencial se usan en los casos donde el movimiento de la partícula esta dado en una trayectoria curva donde  $y = f(x)$ , o en el caso especial del movimiento en una trayectoria circular.

**Sistema de coordenadas polares:** La segunda ley de Newton expresada en coordenadas polares para el movimiento de una partícula en un plano es:

$$F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta = m \left[ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \right]$$

Nuevamente, esta ecuación vectorial implica las dos siguientes ecuaciones escalares para el movimiento de una partícula en un plano.

$$\left. \begin{aligned} F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Las coordenadas de trayectoria y polares no están en ejes inerciales secundarios, debido a que ellos rotan con la partícula o cuerpo en movimiento. Esto es el porqué del término  $\frac{v^2}{\rho}$  que aparece en la segunda ecuación (3.23) y los términos  $-r\dot{\theta}^2$ ,  $r\ddot{\theta}$ , y  $2\dot{r}\dot{\theta}$ , que aparecen en la ecuación (3.24)

### 3.10. Aplicaciones de la 2da. Ley de Newton

Antes de desarrollar varias aplicaciones de la 2da. ley de Newton a movimientos específicos de la partícula en un plano: se expresan 3 ejemplos demostrativos, cada uno correspondiente a la aplicación de la 2da. ley de Newton referida a cada uno de los tres sistemas de coordenadas; coordenadas cartesianas, coordenadas de trayectoria y coordenadas polares, respectivamente.

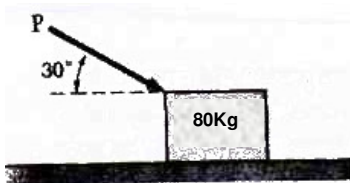


Figura ed-1

Ejemplo demostrativo 1, en coordenadas cartesianas. Un bloque de 80 kg descansa en un plano horizontal. Encontrar la magnitud de la fuerza  $P$  requerida para ocasionarle al bloque una aceleración de  $2.5 \text{ m/s}^2$  hacia la derecha. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es  $\mu_k = 0.25$ . (figura ed-1)

*Solución:*

El peso del bloque es:

$$W = mg = (80\text{kg})\left(9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 785\text{N}$$

Apuntamos que  $F = \mu_k N = 0.25N$  y  $a = 2.5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Indicando que las fuerzas actuando sobre el bloque son equivalentes al vector  $ma$ , teniendo de acuerdo a los diagramas de fuerzas aplicadas y fuerzas de efecto.

$$\sum F_x = ma : P \cos(30^\circ) - 0.25N = (80)(2.5) \quad (1)$$

$$P \cos(30^\circ) - 0.25N = 200 \text{ kgm/s}^2$$

$$\sum F_y = 0 : N - P \sin 30^\circ - 785 = 0 \quad (2)$$

Resolviendo (2) para  $N$  y sustituyendo en (1), obtenemos:

$$P \cos 30^\circ - 0.25(P \sin 30^\circ + 785) = 200 \text{ kgm/s}^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} P - 0.25 \left( \frac{1}{2} P \right) = 200 + \frac{785}{4}$$

$$\frac{(4\sqrt{3} - j)P}{8} = \frac{1600 + 1570}{8} = 3170 \text{ kgm/s}^2$$

$$5.93 \rho = 3170 \Rightarrow \rho = 535 \text{ kgm/s}^2 (N)$$

Ejemplo demostrativo 2 en coordenadas de trayectoria.

Un péndulo de  $2m$  de longitud describe un arco de circunferencia sobre un plano vertical. Si la tensión (tracción) en la cuerda es 2.5 veces el peso de la masa pendular esférica, en la posición representada en la figura (ed-2), hallar la velocidad y aceleración en tal posición.

*Solución:* El peso del péndulo es  $W = mg$ ; ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ); la tensión en la cuerda será  $2.5 mg$ . Reconociendo que  $a_n$  esta dirigida hacia  $O$  y suponiendo  $a_t$  como se indica en el *dcl* de fuerzas aplicadas, la segunda ley de Newton quedará como:

$$+\swarrow \sum F_t = ma_t : mg \sin 30^\circ = ma_t$$

$$\therefore a_t = g \sin 30^\circ = 4.905 \text{ m/s}^2 \quad \leftarrow$$

$$+\swarrow \sum F_n = ma_n : 2.5mg - mg \cos 30^\circ = ma_n$$

$$\therefore a_n = g \left( 2.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1.634(9.81) = 16.03 \text{ m/s}^2 \quad \leftarrow$$

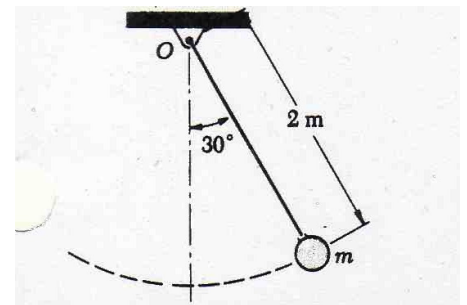
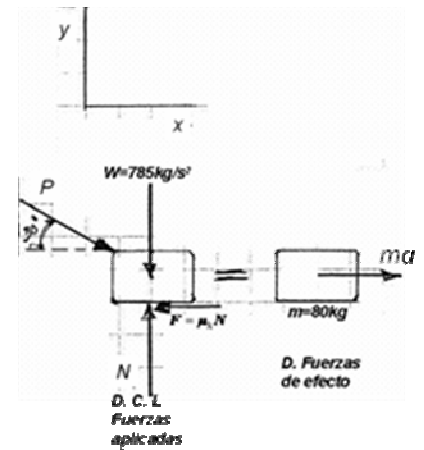
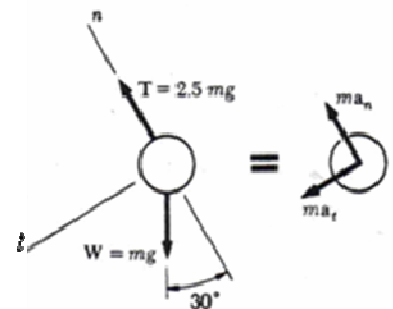


Figura ed-2



Como:

$$a_n = v^2 / \rho, \text{ tenemos } v^2 = \rho a_n = (2)(16.03) = 32.06 \text{ m}^2 / \text{s}^2$$

Por lo que:  $v = \pm 5.66 \text{ m/s}$  (hacia arriba o hacia abajo)  $\leftarrow^r$

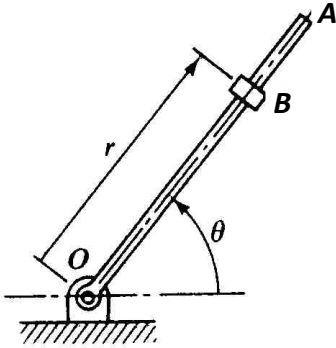
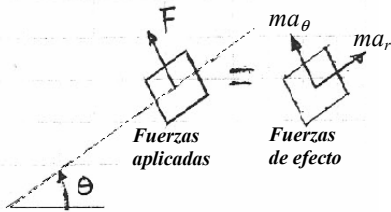


Figura ed-3

Ejemplo demostrativo 3. En coordenadas polares.

Un bloque  $B$  de masa  $m$  puede deslizarse libremente sobre un brazo  $OA$  sin rozamiento que rota en un plano horizontal a una velocidad  $\dot{\theta}_O$  constante. Sabiendo que  $B$  se deja libre a una distancia  $r_O$  desde  $O$ , expresar como una función de  $r$ : (a) la componente  $v_r$  de la velocidad de  $B$  a lo largo de  $OA$ , (b) la magnitud de la fuerza resultante en plano horizontal  $F$  ejercida sobre  $B$  por el brazo  $OA$ .

*Solución:* Como las otras fuerzas son perpendiculares al plano de la figura (ed-3); se representa únicamente en el *dcl* de fuerzas aplicadas, la fuerza  $F$  perpendicular a  $OA$ .



*Ecuaciones del movimiento.* Usando los componentes radial y transversal:

$$\sum F_r = ma_r \quad O = m(r - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \quad F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$

(a) Componente  $v_r$  de la velocidad. Como  $v_l = \dot{r}$ , se tiene:

$$r = \dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dr}$$

Sustituyendo  $r$  en (1), sabiendo que  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_O$ , y separando las variables:

$$v_r dv_r = \dot{\theta}_O^2 r dr$$

multiplicando por 2 en la ecuación anterior, e integrando desde  $O$  a  $v_r$  y desde  $r_O$  a  $r$ , nos da:

$$v_r^2 = \dot{\theta}_O^2 (r^2 - r_O^2) \Rightarrow v_r = \dot{\theta}_O (r^2 - r_O^2)^{1/2} \quad \leftarrow^r$$

(b) fuerza resultante en el plano horizontal  $F$ , haciendo  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_O$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  y  $\dot{r} = v_r$  en la ecuación (2), y sustituyendo  $v_r$

según expresión obtenida en la parte (a), se tiene:

$$F = 2m\dot{\theta}_O(r^2 - r_O^2)^{1/2}\dot{\theta}_O \Rightarrow F = 2m\dot{\theta}_O(r^2 - r_O^2)^{1/2} \quad \leftarrow r$$

*Aplicaciones de la 2da. ley de Newton a movimientos específicos.*

*Movimiento armónico simple (mas).* Como un ejemplo de un movimiento unidimensional, consideremos un tipo de movimiento el cuál es muy común en vibraciones mecánicas de estructuras y máquinas. Este movimiento es el debido a fuerzas, tales que producen una aceleración proporcional al desplazamiento desde alguna posición de equilibrio o reposo y siempre se dirige hacia esa posición. En términos matemáticos.

$$\ddot{x}_O \propto -x$$

Hemos visto en el tema 3.3 figura 3.1, para un sistema masa y resorte en vibración libre que:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

es decir

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad (3.25)$$

Se puede realizar una primera integración, es decir:

$$\ddot{x} = v \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}x$$

por tanto

$$\int v dv = \int -\frac{k}{m}x dx$$

y

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{k}{m} \frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2} \text{ donde } C \text{ es una constante así}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(C^2 - \frac{k}{m}x^2\right)} \quad (3.26)$$

Ahora una segunda integración implica una sustitución esto es inferir la suposición de que  $x = A \text{ sen } \omega t$ , siendo  $A$  y  $\omega$  constantes y sustituyendo en la ecuación (3.25) tenemos:

$$(-\omega^2)A \operatorname{sen} \omega t = \frac{k}{m}(A \operatorname{sen} \omega t)$$

Por consiguiente:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

El mismo resultado podía haber sido alcanzado, habiendo sido hecha la sustitución de  $x = B \cos \omega t$ , de aquí concluimos que la solución general de la ecuación (3.25) es:

$$x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \quad (3.27)$$

La velocidad para el tiempo  $t$  es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t - \omega B \operatorname{sen} \omega t$$

Los valores de  $A$  y  $B$  dependen de las condiciones iniciales. Si, cuando  $t = 0$ ,  $x = x_0$  y  $v = v_0$ , entonces:

$$x_0 = B \quad \text{y} \quad v_0 = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega}$$

Esto nos conduce a:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + x_0 \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.27a)$$

o en forma alterna

$$x = X \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Donde  $X = \sqrt{(v_0/\omega)^2 + x_0^2}$ , que es llamada la Amplitud y  $\phi = \operatorname{tg}^{-1}(x_0 \omega / v_0)$  que es llamado ángulo de fase inicial.

Una gráfica de  $x$  contra  $t$  se muestra en la figura 3.8. La función de  $x$ , como se ve, se repite exactamente después de un intervalo de tiempo  $T$  llamado "Período" sabiendo que la función seno se repite cuando su argumento se incrementa en  $2\pi$ , por consiguiente si el tiempo se incrementa en  $2\pi/\omega$  esta será igual periodo. De aquí:

$$T = 2\pi/\omega \quad (3.28)$$

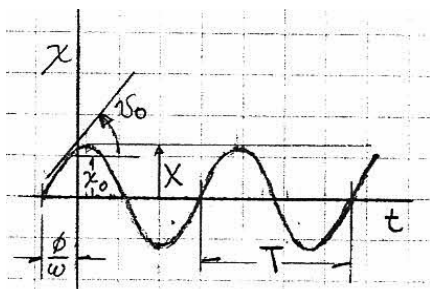


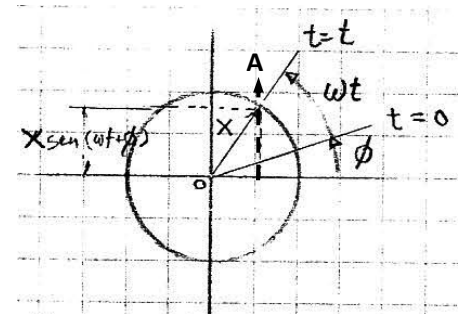
Figura 3.8



La inversa del período es la frecuencia,  $\nu$ . Si el período es medido en segundos entonces la frecuencia  $\nu$  será medida en ciclos por segundo o, en unidades *SI*, en Hertz (*Hz*) donde  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo por segundo}$ . Por lo tanto:

$$\text{frecuencia } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.29)$$

Refiriéndonos a la figura 3.9, se observa que la proyección de radio vector  $OA$  el cuál esta rotando a una velocidad angular  $\omega$  ( $\text{rad/s}$ ) produce un movimiento armónico simple (*mas*).



**Figura 3.9**

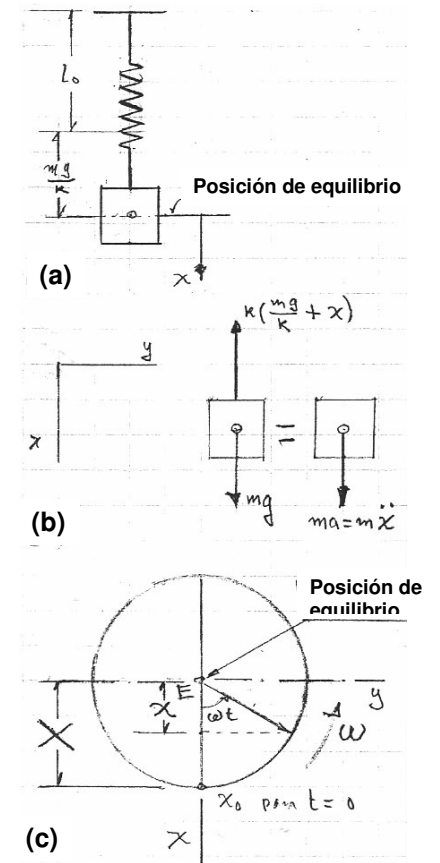
Por la razón previamente mencionada,  $\omega$  es llamada frecuencia circular natural o frecuencia angular natural.

Consideremos el siguiente ejemplo demostrativo de la aplicación al movimiento lineal de un sistema elástico.

**Ejemplo demostrativo 4. Movimiento armónico simple.** Un resorte con rigidez  $2 \text{ kN/m}$  esta colgado verticalmente y dos masas de  $4 \text{ kg}$  cada una sujetas en el extremo inferior. Una de estas masas es súbitamente retirada provocando que el sistema oscile.

Determinar: (a) la amplitud y frecuencia de vibración, (b) la velocidad y aceleración de la masa restante cuando esta pasa por la posición media de la amplitud.

**Solución:** La experiencia en la enseñanza, señala que muchos estudiantes quienes no tienen dificultad al analizar el sistema masa soportada - resorte en movimiento horizontal (figura 3.1), se enfrentan a un bloqueo mental cuando se manifiesta la entrada del efecto de la gravedad como en este caso. En realidad el análisis no es más difícil. El sistema y su diagrama de cuerpo libre y diagrama de fuerzas de efecto se muestra en la figura 4ed (b) cuando la masa sujeta al resorte está en su posición de equilibrio la longitud desde el soporte superior del resorte al centro de



**Figura 4ed**

## Principios de Mecánica para Ingeniería

Masa es  $L_0 + mg/k$  midiendo  $x$  (la deflexión del resorte) desde esta posición. Entonces la longitud del sistema masa-resorte cuando la masa está en movimiento es  $L_0 + (mg/k) + x$ .

Por lo que de acuerdo a los diagramas la ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{x} = mg - k\left(\frac{mg}{k} + x\right)$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad (3.25)$$

Y como en el caso de la figura 3.1,  $\omega^2 = k/m$  siendo la solución general de esta ecuación (3.25)

$$x = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t \quad (3.27)$$

(a) De los datos del ejemplo:  $k = 2kN/m$  y masa de  $4 \text{ kg}$  c/u,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

La deflexión del resorte bajo la carga debida a las dos masas de  $4 \text{ kg}$  c/u.

$$x_{2m} = \frac{mg}{k} = \frac{2 \times 4 \times 9.81}{2 \times 10^3} = 0.03924m$$

La deflexión del resorte bajo la carga debido a la masa de  $4 \text{ kg}$  remanente.

$$x_{1m} = \frac{mg}{k} = \frac{1 \times 9.81}{2 \times 10^3} = 0.01962m$$

Por consiguiente, cuando una masa es removida, la masa remanente oscila respecto a la posición de equilibrio de esta masa remanente con una amplitud de  $x_m = X = 0.01962m$ .

La frecuencia,  $v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  (3.29)

y como  $\omega = (k/m)^{1/2}$

$$v = \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2 \times 10^3}{4}\right)}}{(2\pi)} = 3.56 \text{ Hz}$$

(b) De la ecuación (3.27) en la que  $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$

$$x = A \text{sen} \omega t + B \text{cos} \omega t \quad (3.27)$$

Para  $t = 0$ ,  $A = 0$  y  $B = x_0 = x_m = X$

$$x = X \text{cos} \omega t = X \text{cos} \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} t \quad (a)$$

derivando la ecuación (a) por dos ocasiones y de acuerdo a la figura 4ed-(c), tenemos:

$$\dot{x} = v = X(k/m)^{1/2} \text{sen}(k/m)^{1/2} t = (k/m)^{1/2} (X^2 - x^2)^{1/2} \quad (b)$$

$$\ddot{x} = a = X(k/m) \text{cos}(k/m)^{1/2} t = (k/m)x \quad (c)$$

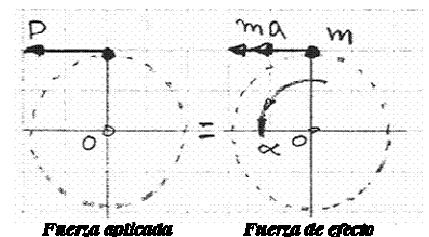
Para  $x = \frac{X}{2} = 0.00981m$ , sustituyendo valores

$$\begin{aligned} \dot{x} = v &= \left(\frac{2000}{4}\right)^{1/2} (0.01962^2 - 0.00981^2)^{1/2} \\ &= (22.36)(0.01699) = 0.3799 \approx 0.38 \text{ m/s} \quad \leftarrow \end{aligned}$$

y

$$x = a = \left(\frac{2000}{4}\right)(0.00981) = 4.905 \text{ m/s}^2 \quad \leftarrow$$

*Movimiento angular.* Consideremos una partícula de masa  $m$  moviéndose en una trayectoria circular, con centro en  $O$  y radio  $r$ , bajo la acción de una fuerza tangencial  $P$  y teniendo una aceleración angular  $\alpha = \omega = \ddot{\theta}$  como se muestra en la figura 3.10.



**Figura 3.10**

Igualando los diagramas de fuerzas aplicadas con el diagrama de fuerzas de efecto:

$$P = ma$$

De la ecuación 2.18, para  $r = \text{constante}$  y tangente a la trayectoria.

$$a = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = r\alpha$$

Así

$$P = m r \alpha$$

Tomando momentos respecto al centro O

$$Pr = m r^2 \alpha$$

Un cuerpo sólido rotando respecto un eje pasando por  $O$ , perpendicular al plano de movimiento, puede ser considerado, como lo describimos en el tema 3.7; estar compuesto de un gran número de partículas, cada uno de masa  $m$  para diferentes radios con respecto al centro de masa  $G$ . Sumando el momento de fuerza para cada partícula para dar el momento total para el cuerpo podemos escribir.

$$\sum Pr = \sum mr^2 \alpha$$

El término  $\sum Pr$  es el momento total de aceleración del cuerpo, esto es, el momento torsional, torque  $T$ , de aceleración y ya que  $\alpha$  es la misma para cada partícula tenemos:

$$T = \alpha \sum (mr^2)$$

La expresión  $\sum (mr^2)$  es el **momento segundo de masa**, el cual es generalmente llamado el **momento de inercia  $I$** , respecto al eje perpendicular que pasa por  $O$ , por tanto la segunda ley de Newton aplicada al movimiento angular viene a ser:

$$\text{Torque} = T = I\alpha \quad (3.30)$$

Unidades  $T$  en  $Nm$ ,  $I$  en  $kgm^2$ , y  $\alpha$  en  $rad/s^2$ . El momento de inercia puede expresarse en la forma:

$$I = MK^2 \quad (3.31)$$

Donde  $M$  es la masa total del cuerpo y  $K$  el radio para el cuál la masa total puede ser concentrada de tal forma que se requiera el mismo torque como para el cuerpo real.

Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

El radio  $K$  es nombrado el radio de giro respecto al eje perpendicular pasando por  $O$  (figura 3.11)

Para un *Disco circular* de diámetro  $D$ ;  $K^2 = \frac{D^2}{8}$

Para un *Disco anular*, con diámetro exterior  $D$  y diámetro interior  $d$

$$K^2 = \frac{D^2 + d^2}{8}$$

Obsérvese que, en el caso de cuerpos compuestos, los valores de  $I$  respecto al mismo eje pueden ser sumados, mientras que los valores de  $K$  o  $K^2$ , aún cuando ellos sean respecto al mismo eje, no pueden ser sumados.

Ejemplo demostrativo de la aplicación de la segunda ley de Newton al movimiento angular.

Ejemplo demostrativo 5. Un volante de 5 toneladas de masa y teniendo un radio de giro de  $1m$  es acelerado desde el reposo a una rapidez de  $1200 \text{ rev/min}$  en 20 segundos contra un torque debido al rozamiento de  $5 \text{ kNm}$  ¿Cuál debe ser el torque suministrado por el motor de impulsión?

*Solución:* Los diagramas de torque de fuerzas aplicadas y fuerzas de efecto se muestran en la figura 5ed, donde  $T$  es torque de impulsión y  $T_F$  es el torque por rozamiento.

Aplicando la ecuación (3.30)

$$T - T_F = I\alpha \Rightarrow T = T_F + I\alpha \quad (5a)$$

Evaluando los términos de la ecuación (5a)

$$\alpha = \frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

Con

$$\omega_2 = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 125.7 \text{ red/s}, \quad \omega_1 = 0, \quad t = 20s$$

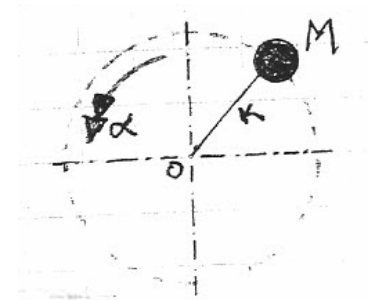


Figura 3.11

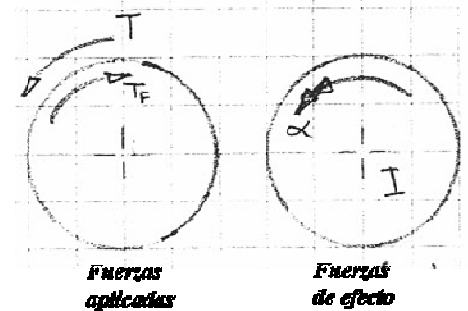


Figura 5 ed

Tenemos que:

$$\alpha = \frac{125.7 - 0}{20} = 6.285 \text{ rad/s}^2$$

y de acuerdo a la ecuación (3.31),  $I = MK^2$  con  $M = 5000\text{Kg}$ ,  $K = 1\text{m}$

$$I = 5000 \times 1^2 = 5000 \text{ kgm}^2$$

Por lo que sustituyendo  $T_F = 5000\text{Nm}$  en la ecuación (5a) del torque, nos da:

$$T = 5000 + (5000 \times 6.285) = 36425 \text{ Nm} = 36.425 \text{ KN} \quad \leftarrow r$$

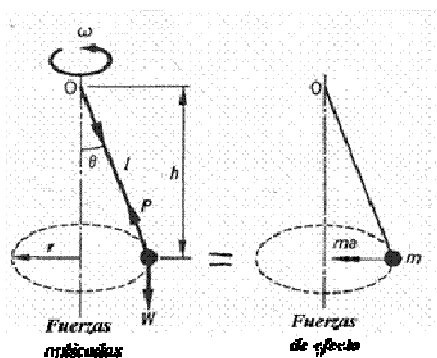


Figura 3.12

*Movimiento circular (péndulo cónico).* Una masa  $m$  en un extremo de una varilla ligera o una cuerda inextensible, sujeta en el otro extremo  $O$ , se hace girar con una velocidad angular  $\omega$  en una trayectoria circular horizontal de radio  $r$ , la cuerda haciendo un ángulo  $\theta$  con la vertical como se muestra en la figura 3.12. Las fuerzas que actúan sobre la masa son el peso  $W$  y la tensión de la cuerda o varilla  $P$ . El movimiento circular produce en la masa una aceleración radial  $a_r$  hacia el centro de la circunferencia.

La ecuación 2.18, para  $r = \text{constante}$ .

$$a_r = r\omega^2$$

Comparando los diagramas de fuerzas aplicadas y de fuerzas de efecto en el plano del círculo:

$$P \sin \theta = mr\omega^2 \quad (i)$$

Resolviendo verticalmente

$$P \cos \theta = mg \quad (ii)$$

Dividiendo (i) entre (ii) nos da:

$$\text{tg } \theta = \frac{r\omega^2}{g}$$

de la geometría de La figura 3.12

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{h}$$

Donde  $h$  es la altura del péndulo cónico.

Igualando

$$\frac{r}{h} = \frac{r\omega^2}{g} \Rightarrow h = \frac{g}{\omega^2} \quad (3.32)$$

La altura del péndulo cónico en consecuencia depende en la rapidez angular y esta propiedad permite al péndulo cónico ser utilizado como un regulador de rapidez. La función del regulador es conservar la rapidez de una máquina primaria, como una máquina turbo generadora, dentro de un rango deseado para toda variación de carga.

El regulador opera solamente en un cambio o variación de la rapidez la cual cambia la altura y mediante un mecanismo apropiado éste puede variar el suministro de vapor, combustible o agua como fuentes de energía. La figura 3.13 muestra un arreglo simple para controlar el suministro de vapor.

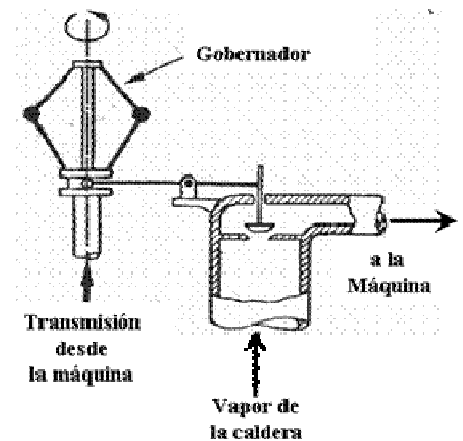


Figura 3.13

Ejemplo demostrativo por movimiento circular (péndulo cónico)

Ejemplo demostrativo 6. Una masa de  $5\text{kg}$  sujeta en el extremo inferior de una cuerda delgada; el otro extremo de la cuerda sujeto a un brazo cruzado el cual está fijo a un árbol vertical. La sujeción al brazo cruzado es de  $75\text{mm}$  desde la línea del eje del árbol y de  $300\text{mm}$  desde el centro de la masa  $G$  de la masa de  $5\text{kg}$ : Si la cuerda se rompe cuando la tensión sobre ella es de  $98\text{N}$ , encontrar:

- La rapidez del árbol en el punto de rompimiento de la cuerda.
- El radio de giro de la masa y su rapidez.

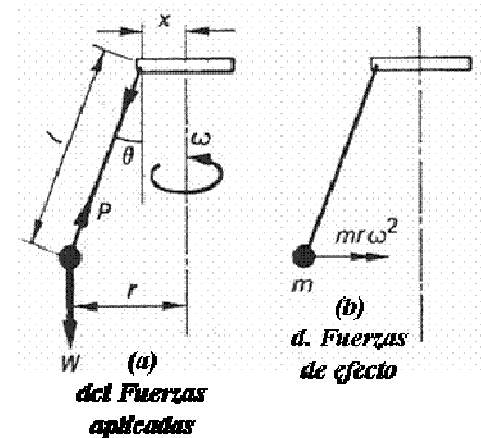


Figura 6 ed

*Solución:* refiriéndonos a la figura 6ed.

- $P$  = tensión en la cuerda
- $l$  = longitud de la cuerda

## Principios de Mecánica para Ingeniería

$x$  = radio de brazo cruzado

$r$  = radio de la masa al punto de rompimiento

$\omega$  = rapidez en el punto de rompimiento

$\theta$  = ángulo de la cuerda con la vertical.

Resolviendo verticalmente:

$$P \cos \theta = mg \quad (i)$$

Resolviendo en el plano de la trayectoria circular:

$$P \sin \theta = mr \omega^2 \quad (ii)$$

Sustituyendo los datos  $P = 98N$ ,  $m = 5kg$ ,  $g = 9.81m/s^2$  en la ecuación (i)

$$\cos \theta = \frac{mg}{P} = \frac{5 \times 9.81}{98} = 0.5$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

de la geometría figura 6ed. (a)

$$l \sin \theta = r - x$$

Con valores  $l = 300mm$ ,  $x = 75$ ,  $\sin \theta = 0.866$

$$\begin{aligned} (b) \quad r &= l \sin \theta + x \\ &= (300 \times 0.866) + 75 \\ &= 334.8mm \end{aligned}$$

$\leftarrow$   
 $r$

(a) De la ecuación (ii) con  $P = 98N$ ,  $\sin \theta = 0.866$ ,  $m = 5kg$ ,  $r = 0.3348m$

$$\omega^2 = \frac{P \sin \theta}{mr} = \frac{98 \times 0.866}{5 \times 0.3348} = 50.70$$

$$\therefore \omega = 7.12 \text{ rad/s}, \quad n = \frac{7.12 \times 60}{2\pi} = 68 \text{ rev/min} \quad \leftarrow$$

*Balaceo de masas.* Cuando una flecha sosteniendo varias masas excéntricas está en balance estático, el centro de la masa del sistema está situado en el eje de la flecha, de tal



Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

forma que la flecha y las masas fijadas a la flecha permanecen en la posición en que son colocadas. Sin embargo, cuando la flecha gira, las fuerzas centrífugas actúan sobre las masas, y si éstas no están rotando en el mismo plano, los momentos de los pares de fuerzas<sup>8</sup> también actúan sobre la flecha. Por consiguiente para un balance dinámico, (a) la fuerza resultante actuando sobre la flecha deberá ser igual a cero y (b) la resultante de todos los momentos de los pares de fuerzas actuando sobre la flecha deberá ser cero.

Por tanto una partícula de masa  $m$  rotando en una trayectoria circular de radio  $r$  requiere una fuerza radial  $P$  para mantener a ésta en la trayectoria, la fuerza  $P$  se llama *fuerza centrípeta*, debido a que actúa radialmente sobre la partícula hacia el centro de la flecha, la reacción hacia  $P$  actúa radialmente hacia la fuerza y es llamada *fuerza centrífuga*; esta reacción  $F$  es suministrada por un soporte tal como una chumacera o rodamiento y puede ser considerada como la fuerza que tira radialmente hacia fuera en el soporte (figura 3.14)

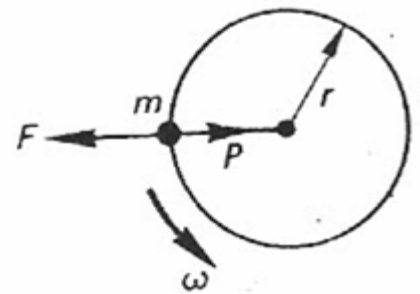


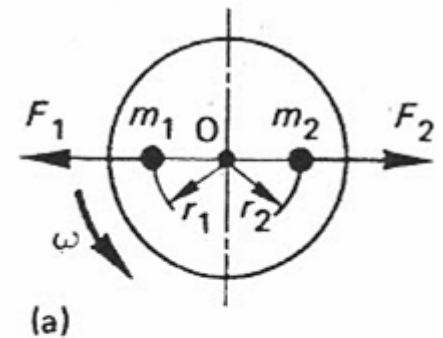
Figura 3.14

Un componente rotando, tal como una pieza de trabajo, en el porta herramienta o mandril de un torno mecánico puede tener su centro de masa no coincidiendo con el eje de rotación del mandril, y el efecto de esto es producir una fuerza de desbalanceo.

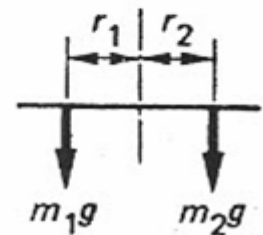
El valor de  $P$ , y por ende  $F$ , de acuerdo con la 1ª ecuación (3.24) para  $r =$  constante, esta dada por:

$$F = ma_r = mr\omega^2 \quad \text{radialmente hacia fuera.}$$

En la sustitución mostrada en la figura 3.15(a),  $m_1$  es la masa de desbalanceo de un radio  $r_1$  y  $F_1$  es la fuerza centrífuga debida a la rotación de  $m_1$ . El desbalanceo puede ser corregido por medio de una masa  $m_2$  colocada a un radio  $r_2$  de tal forma que la fuerza centrífuga  $F_2$  debida a la rotación de  $m_2$  es igual y opuesta a  $F_1$ , de esta manera



(a)



(b)

Figura 3.15

<sup>8</sup>. Un par de fuerzas son dos fuerzas paralelas de la misma magnitud pero con sentidos opuestos.

$$m_1 r_1 \omega^2 = m_2 r_2 \omega^2$$

quedando

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

que es la condición para el *Balaceo estático* como se muestra en la figura 3.15 (b).

Para asegurar el *Balaceo dinámico*, las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  deberán no solamente ser iguales y opuestas, sino que también deberán estar situadas en el mismo plano con referencia al eje de rotación.

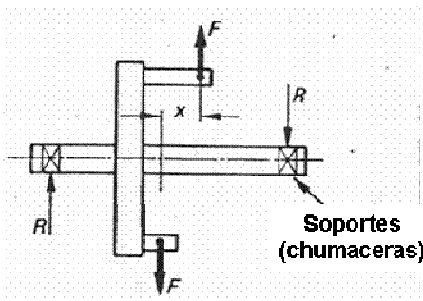


Figura 3.16

Si las fuerzas centrífugas están separadas por una distancia  $x$  como se muestra en la figura 3.16, el efecto será producir un momento del par de fuerzas igual a  $Fx$  el cual tendería a flexionar a la flecha e inducir cargas adicionales en los soportes (rodamientos y chumaceras), rotando con la flecha, las cuales deberán ser iguales y su suma igual a cero, es decir con direcciones opuestas y para que se tenga un estado de balanceo dinámico es necesario que el momento de este par de fuerzas en los soportes sea igual a cero, es decir que no se tengan estas cargas adicionales en los soportes.

La fuerza de desbalanceo es proporcional al cuadrado de la rapidez  $\omega$  (ver la 1ª ecuación (3.24)), ya que esta es especialmente importante para asegurar un buen balanceo cuando las componentes están rotando a una alta rapidez.

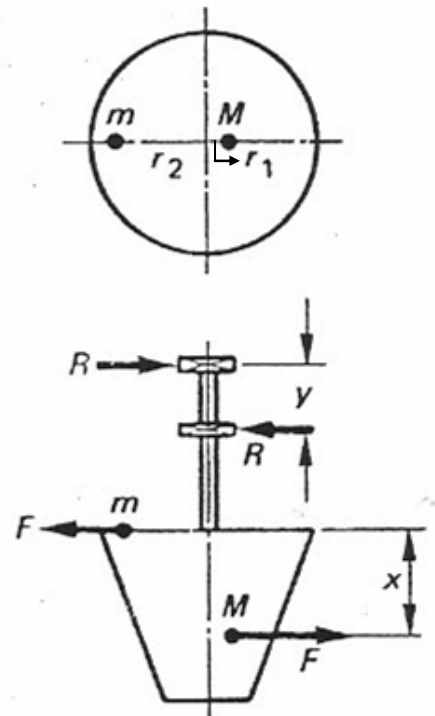
Se hace notar que un estado de balanceo puede siempre alcanzarse agregando un apropiado producto de masa-brazo  $m_b r_b$  en un par de planos transversales elegidos arbitrariamente. Esto es bastante independiente del número y distribución de masas iniciales y por consiguiente es también aplicable cuando la masa tiene una distribución continua, como en el caso de un rotor sólido.

Las máquinas de balanceo estándar son usadas para medir la cantidad de desbalanceo e indicar lo que se necesita hacer para corregirlo. Algunas veces el balanceo se

alcanza, como se ha implicado aquí, agregando masas de balanceo. El procedimiento de balanceo estándar para ruedas de automóvil es un ejemplo de esto. Algunos balanceos se realizan quitando material por medio de taladrado como es el caso de rotores de pequeños motores eléctricos.

*Ejemplo demostrativo de balanceo de masas*

Ejemplo demostrativo 7. Un agitador rotativo de masa de  $1000\text{kg}$  es estáticamente balanceado por una masa de  $5\text{kg}$  situada a un radio de  $1.5\text{m}$ . La línea radial del centro de masa  $M$  del agitador y de la masa de balanceo están separadas en  $1\text{m}$  como se muestra en la figura 7ed. El agitador esta suspendido verticalmente desde soportes con rodamiento c/u y separados en  $300\text{mm}$ . Calcular el radio del centro de masa y la carga de desbalanceo en cada soporte cuando el agitador esta rotando a  $60^{\text{rev}}/\text{min}$ .



**Figura 7 ed**

*Solución:* refiriéndonos a la figura 7ed y al enunciado del ejemplo.

$m$  es la masa de balanceo estático a un radio  $r_2$   
 $M$  es la masa del agitador a un radio  $r_1$

De la condición de balanceo estático con  $m = 5\text{kg}$  y  $M = 1000\text{kg}$ ,  $r_2 = 1.5\text{m}$ ,

$$Mr_1 = mr_2$$

$$\therefore r_1 = \frac{mr_2}{M} \text{ y sustituyendo valores}$$

$$= \frac{5 \times 1.5}{1000} = 0.0075\text{m} = 7.5\text{mm} \quad \leftarrow r$$

Fuerza centrífuga  $F = mr_2\omega^2 = Mr_1\omega^2$

Con  $\omega = \frac{60}{60} \times 2\pi = 6.28\text{rad}/\text{s}$

$$F = 5 \times 1.5 \times (6.28)^2 = 295.8\text{N}$$

Par de desbalanceo  $C = Fx = 295.8\text{m}$

Este par es igual y opuesto al par que se genera en las reacciones  $R$  de los soportes.

Par resistente  $C = Ry = 0.3R$

Igualando los pares de desbalanceo y resistente, obtenemos la carga de desbalanceo.

$$0.3R = 295.8 \Rightarrow R = \frac{295.8}{0.3} = 986 N \quad \leftarrow r$$

*Varias masas en movimientos circular –Balanceo de masas coplanares.* Las mismas condiciones generales aplicadas como las discutidas previamente en el caso de dos masas así consideramos para tres masas como las mostradas en la figura 3.17, con las masas  $m_1, m_2$  y  $m_3$  situadas en los puntos  $A, B,$  y  $C$  respectivamente, rotando

con una velocidad angular  $\omega$  respecto a un eje que pasa por  $O$  perpendicular al plano definido por radios de estas tres masas.

Por balanceo estático, la suma de los momentos de los pesos respecto a  $O$  debe ser cero.

$$m_1 g r_1 - m_2 g r_2 \cos \alpha - m_3 g r_3 \cos \theta = 0$$

Por balanceo dinámico, la suma de las fuerzas centrífugas deber ser cero. La posición de las fuerzas centrífugas en el espacio es mostrada en la figura 3.17 (b); El diagrama vectorial de fuerzas se muestra en la figura 3.17 (c) con

$$F_1 = m_1 r_1 \omega^2 \text{ paralelo a } OA$$

$$F_2 = m_2 r_2 \omega^2 \text{ paralelo a } OB$$

$$F_3 = m_3 r_3 \omega^2 \text{ paralelo a } OC$$

Si las masas están en balanceo dinámico, el diagrama será polígono cerrado, Si no es así, entonces habrá una fuerza resultante la cual será la fuerza de desbalanceo dinámico.

Ejemplo demostrativo de *balanceo de masas coplanares.* Ejemplo demostrativo 8. Un plato frontal de un torno portando dos masas, una de  $3kg$  y la otra de  $1.5kg$  fijas en a los radios de  $600mm$  y  $200mm$  respectivamente desde el eje de rotación como se muestra en la figura 8ed(a). Calcular la fuerza de desbalanceo cuando el plato frontal de sujeción

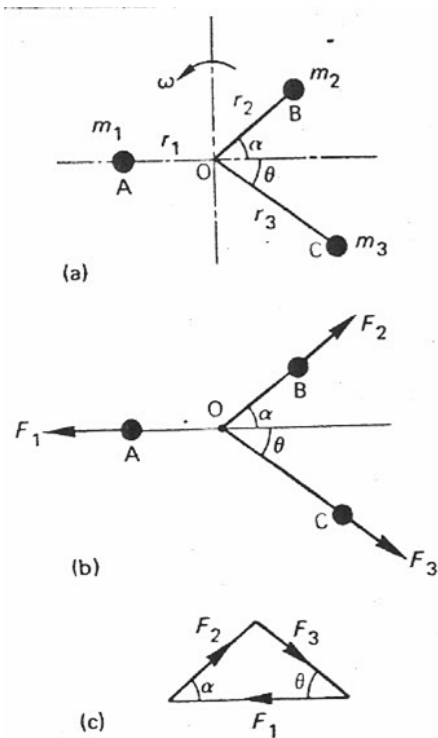


Figura 3.17

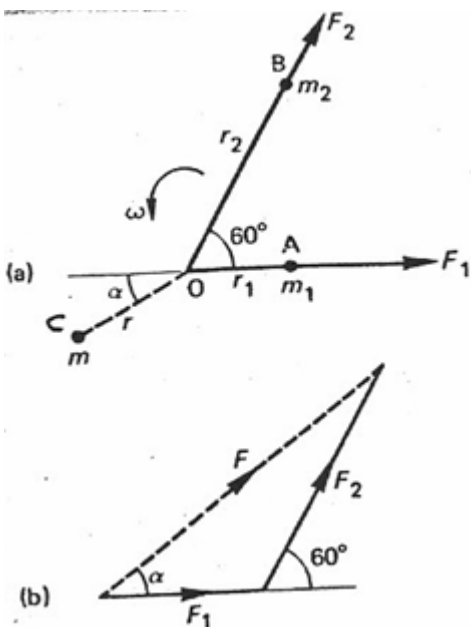


Figura 8 ed

Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

esta girando a  $300 \text{ rev/min}$ , y por consiguiente la posición y tamaño de una masa de balanceo situada a un radio de  $500 \text{ mm}$ .

Solución:

$$\text{Fuerza centrífuga} \quad F_1 = m_1 r_1 \omega^2$$

$$\text{con } m_1 = 1.5 \text{ kg}, r_1 = 0.2 \text{ m}, \omega = \frac{300}{60} \times 2\pi = 31.4 \text{ rad/s}$$

$$\text{Por lo que } F_1 = 1.5 \times 0.2 \times 31.4^2 = 295.8 \text{ N}$$

$$\text{Fuerza centrífuga } F_2 = m_2 r_2 \omega^2$$

$$\text{con } m_2 = 3 \text{ kg}, r_2 = 0.6 \text{ m}, \omega = 31.4 \text{ rad/s},$$

$$F_2 = 3 \times 0.6 \times 31.4^2 = 1774.7 \text{ N}$$

Del diagrama vectorial figura 8ed(b), tenemos

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\left[ (F_1 + F_2 \cos 60^\circ)^2 + (F_2 \sin 60^\circ)^2 \right]} \\ &= \sqrt{\left[ (295.8 + 1774.7 \times 0.5)^2 + (1774.7 \times 0.866)^2 \right]} \\ &= 1939.6 \text{ N fuerza } F \text{ de desbalanceo} \end{aligned} \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Para balancear esta fuerza, se requiere una masa de balanceo que proporcione una fuerza igual y opuesta a  $F$ . Si la masa de desbalanceo es  $m$  a un radio  $r$ , entonces

$$F = mr\omega^2$$

$$\therefore m = \frac{F}{r\omega^2}$$

$$\text{con } F = 1939.6 \text{ N}, r = 0.5 \text{ m}, \omega = 31.4 \text{ rad/s}$$

$$m = \frac{1939.6}{0.5(31.4)^2} = 3.93 \text{ kg} \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

La posición angular esta dada por el radio  $OC$  en el tercer cuadrante, que tiene un ángulo  $\alpha$  con la línea  $OA$ . De la figura 8ed(b)

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{1774.7(0.866)}{295.8 + 0.5(1774.7)} \right)$$

$$= \operatorname{tg}^{-1}(1.2989) = 52.41^\circ \quad \leftarrow r$$

### 3.11 Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

#### *Ejemplos de Discusión*

Ejemplo 3.1. Un tren de masa 500 toneladas es arrastrado por una locomotora hacia arriba de una pendiente de 1:80, su rapidez decrece de 45 a 15 km/h en 50 segundos. Si la fuerza efectiva de tracción permanece constante y las resistencias al movimiento es equivalente a 65 N/tonelada, calcular la fuerza efectiva de tracción aplicada por la locomotora.

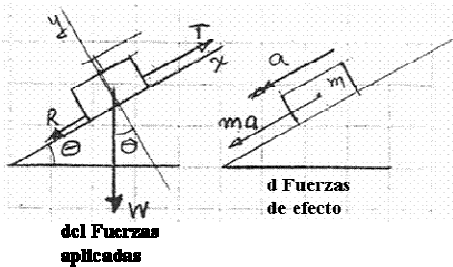


Figura 3.18

*Solución:* La fuerza efectiva de tracción en las ruedas de la locomotora es transferida al tren en la barra de enganche, refiriéndonos a la figura 3.18,  $T$  es la fuerza efectiva de tracción,  $R$  la resistencia al movimiento, y  $W$  el peso del tren. Considerando las fuerzas a lo largo de la pendiente en la dirección de la misma y de acuerdo a la ecuación (3.1) y a los diagramas de la figura 3.18

$$F = -R - W \operatorname{sen} \theta + T = -ma \quad (1)$$

El valor de  $a$  se encuentra usando la ecuación

$$v = v_0 + a \Delta t$$

$$\text{Si } v = \frac{15 \times 1000}{360} = 4.17 \text{ m/s}, \quad v_0 = \frac{45000}{5600} = 12.5 \text{ m/s},$$

$$\Delta t = 50 \text{ s}$$

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{4.17 - 12.5}{50} = -0.1667 \text{ m/s}^2$$

En el diagrama de fuerzas de efecto, la aceleración se muestra en la dirección correcta, es decir, contra el movimiento, por consiguiente de la ecuación (1)

$$T = R + W \operatorname{sen} \theta - ma$$

$$\text{con los datos } R = 65 \times 500 = 32.5 \times 10^3 \text{ N}$$

$$m = 500 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$W = 500 \times 9.81 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta = 1/80$$

$$a = 0.1667 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore T = (32.5 \times 10^3) + \frac{500 \times 9.81 \times 10^3}{80} - 500 \times 0.1667 \times 10^3$$

$$= (32.5 + 61.31 - 83.4) 10^3$$

$$= 10.41 \times 10^3 \text{ N} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Ejemplo 3.2. Una fuerza  $\mathbf{R} = (3t\mathbf{i} + 0.4t^2\mathbf{j})\text{N}$  es aplicada a una partícula de masa  $0.1\text{kg}$  la cual puede moverse libremente en un campo gravitacional de intensidad  $2.36\text{N/kg}$ . La fuerza gravitacional actúa en la dirección  $(-\mathbf{j})$  y  $t$  es el tiempo en segundos.

En el tiempo  $t=0$  la velocidad de la partícula es de  $(700\mathbf{i} + 200\mathbf{j})\text{m/s}$ . Determine su velocidad cuando  $t=2.0\text{s}$ .

*Solución* El diagrama de cuerpo libre figura 3.19 para la partícula muestra la fuerza  $\mathbf{R}$  y el peso  $\mathbf{W}$  actuando sobre esta, en la que:

$$\mathbf{W} = W(-\mathbf{j}) = -mg\mathbf{j}$$

de la segunda ley de Newton (ecuación(3.1)),

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

donde  $\mathbf{a}$  es la aceleración de la partícula. Así

$$\mathbf{R} + \mathbf{W} = m\mathbf{a}$$

$$(3t\mathbf{i} + 0.4t^2\mathbf{j}) - (0.1)(2.36)\mathbf{j} = (0.1)\mathbf{a}$$

$$\therefore \mathbf{a} = [30t\mathbf{i} + (2.36 + 4t^2)\mathbf{j}]\text{m/s} \quad (i)$$

Para encontrar la velocidad tenemos que integrar la ecuación (i). Ya que

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

se tiene:

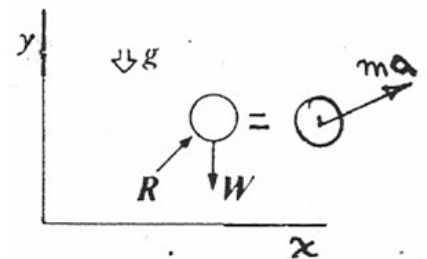


Figura 3.19

$$\int_{v_1}^{v_2} d\mathbf{v} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a} dt$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \int_0^2 [30t\mathbf{i} + (2.36 + 4t^2)\mathbf{j}] dt$$

obsérvese que  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son vectores unitarios fijos, nosotros obtenemos

$$\mathbf{v}_2 - (700\mathbf{i} + 200\mathbf{j}) = \frac{30(2)^2}{2}\mathbf{i} + \left(2.36(2) + \frac{4(2)^3}{3}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2 = (760\mathbf{i} + 215.4\mathbf{j}) m/s \quad \leftarrow^r$$

$$\text{o } v_2 = 790 m/s \quad \angle \theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{215.4}{760}\right) = 15.824^\circ \quad \leftarrow^r$$

$$= 15^\circ 49'$$

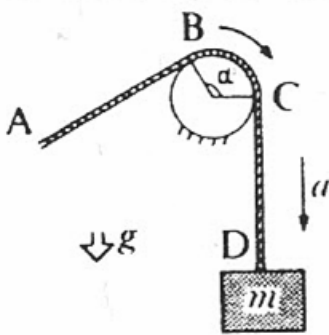


Figura 3.20

Ejemplo 3.3. Una caja de masa  $m$  esta siendo bajada por medio de una cuerda  $ABCD$  la que pasa sobre un cilindro fijo, el ángulo central de contacto con el cilindro es  $\alpha$  como se muestra en la figura 3.20. El alargamiento que sufre la cuerda por la masa, puede ser ignorado.

Si el coeficiente de rozamiento entre la cuerda y el cilindro es  $\mu$ , demostrar que la tensión en la cuerda en  $B$  y  $C$  esta gobernada por la relación:  $T_C/T_B = e^{\mu\alpha}$

Si la aceleración de la caja bajando es  $\mathbf{a}$ , determine la tensión  $T_B$ .

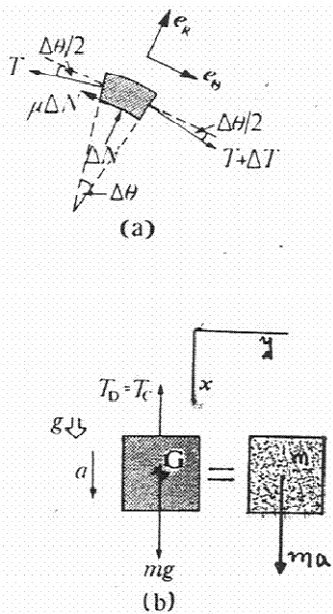


Figura 3.21

*Solución:* La figura 3.21(a) es el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la cuerda en contacto con el cilindro que sustenta el ángulo pequeño  $\Delta\theta$  al centro de la curvatura, la variación en tensión a través del elemento es indicado por las fuerzas  $T$  y  $(T + \Delta T)$ . La fuerza de contacto con el cilindro ha sido resuelta en componentes, en las direcciones  $e_r$  y  $e_\theta$ . Puesto que el deslizamiento esta ocurriendo, la componente en la dirección  $e_\theta$  es  $\mu$  veces la componente en la dirección  $e_r$  (ecuación (3.5)).



Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

Ya que  $\Delta\theta/2$  es muy pequeño podemos remplazar  $\cos(\Delta\theta/2)$  por la unidad, obteniéndose

$$\begin{aligned} [\sum F_\theta = ma_\theta] \\ T + \mu\Delta N - (T + \Delta T) = 0 \Rightarrow \Delta T = \mu\Delta N \end{aligned} \quad (i)$$

Para la dirección radial, podemos reemplazar  $\sin(\Delta\theta/2)$  por  $\Delta\theta/2$  y escribir

$$\begin{aligned} [\sum F_r = ma_R] \\ \Delta N - (2T + \Delta T)\Delta\theta/2 = 0 \end{aligned}$$

y, como el termino  $\Delta T\Delta\theta/2 = 0$  es un termino de segundo orden de pequeñez no lo tomaremos en cuenta; quedando

$$T\Delta\theta = \Delta N \quad (ii)$$

De aquí, eliminando a  $\Delta N$  de (i) y (ii), tenemos

$$\Delta T / T = \mu\Delta\theta \quad (iii)$$

En el límite como  $\Delta\theta$  se aproxima a cero, la ecuación (iii) viene dando

$$\begin{aligned} dT / T = \mu d\theta \\ \text{y} \quad \int_{T_B}^{T_C} dT / T = \mu \int_0^\alpha d\theta \end{aligned}$$

considerando  $\mu$  constante, de esta manera

$$\begin{aligned} \text{Ln}(T_C / T_B) = \mu\alpha \\ \text{o} \quad T_C / T_B = e^{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (iv)$$

Esta es una relación bien conocida. Se percibe que la forma del cilindro no necesita ser circular.

Puesto que la masa de la cuerda es despreciable, no existe variación en la tensión entre  $C$  y  $D$ , como el  $dcl$  y la ecuación del movimiento lo confirman.

Del  $dcl$  para la caja (figura 3.21 (b))

$$\sum F_x = m\ddot{x}_G$$

$$\begin{aligned} mg - T_C &= ma \\ T_C &= m(g - a) \end{aligned} \tag{v}$$

Combinando las ecuaciones (v) y (iv), se tiene:

$$T_B = m(g - a)e^{-\mu\alpha} \quad \leftarrow r$$

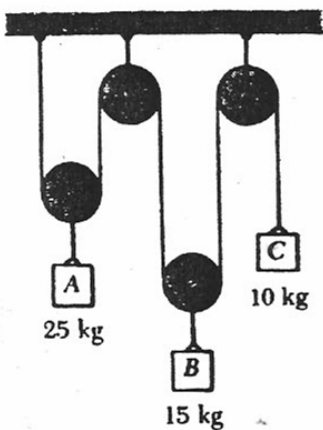


Figura 3.22

Ejemplo 3.4. El sistema de poleas, cuerdas y bloques de la figura 3.22, se abandona del reposo, admitiendo que no hay rozamiento en las poleas y que la masa de c/u de las poleas y cuerdas es despreciable, determinar la aceleración de cada bloque.

*Solución:* La cinemática de este conjunto de bloques y poleas, muestra que la longitud de la cuerda que pasa sobre las poleas es constante y de aquí que las coordenadas de posición de los tres bloques tenga la siguiente relación.

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$

derivando con respecto al tiempo por dos ocasión

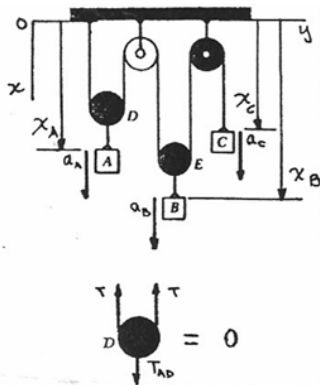
$$2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

y

$$2a_A + 2a_B + a_C = 0 \tag{1}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, sucesivamente, a cada polea y cada bloque, tenemos

*Poleas.*- Como se admiten que la masa de cada polea es despreciable, resulta para la polea  $D$ .



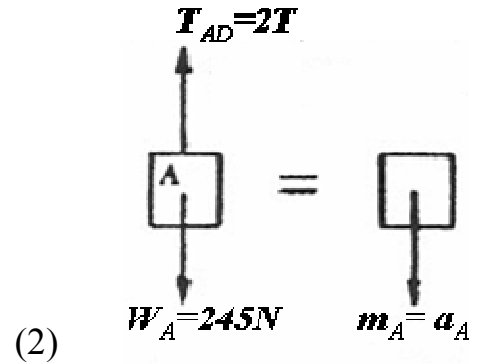
$$\sum F = ma = 0: \Rightarrow T_{AD} - 2T \Rightarrow T_{AD} = 2T$$

En forma análoga para la polea E;  $T_{BE} = 2T$

Bloque A:  $W_A = m_A g = (25)(9.81) = 245 N$

$$\sum F = ma_A: \quad 245 - 2T = 25a_A$$

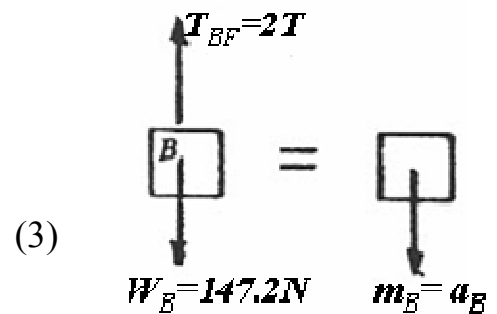
$$\therefore a_A = 9.81 - 0.08T$$



Bloque B:  $W_B = m_B g = (15)(9.81) = 147.2 N$

$$\sum F = ma_B: \quad 147.2 - 2T = 15a_B$$

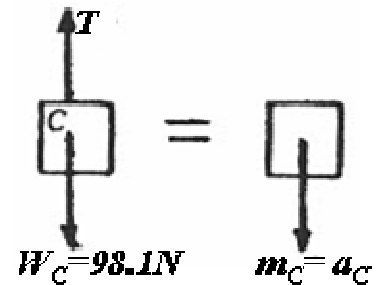
$$\therefore a_B = 9.81 - 0.1333T$$



Bloque C:  $W_C = m_C g = (10)(9.81) = 98.1 N$

$$\sum F = ma_C: \quad 98.1 - T = 10a_C$$

$$\therefore a_C = 9.81 - 0.1T$$



Sustituyendo en (1) las expresiones de  $a_A$ ,  $a_B$ ,  $a_C$  obtenidas en las ecuaciones (2), (3) y (4)

$$2(9.81 - 0.08T) + 2(9.81 - 0.1333T) + (9.81 - 0.1T) = 0$$

$$5(9.81) - (0.16 + 0.2666 + 0.1)T \Rightarrow T = 93.14 N$$

*Aceleración en cada bloque* Sustituyendo el valor de  $T$  en las ecuaciones (2), (3) y (4), resulta

$$a_A = 9.81 - 0.08(93.14) = 2.36 m/s^2 \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$a_B = 9.81 - 0.1333(93.14) = -2.61 m/s^2 \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$a_C = 9.81 - 0.1(93.14) = 0.50 m/s^2 \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Ejemplo 3.5. Determinar a que velocidad debe circular un vehículo por una curva de una carretera con radio  $\rho = 125m$ , peraltada con una inclinación  $\theta = 18^\circ$ , para que no actúen sobre las ruedas fuerzas de rozamiento transversales.

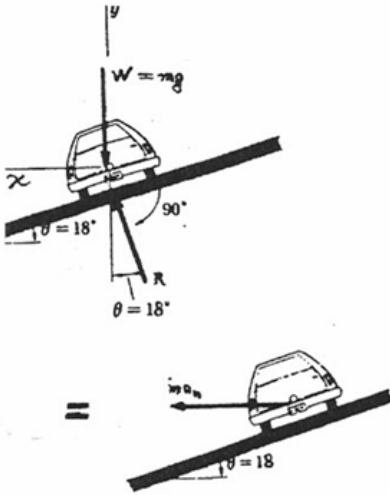


Figura 3.23

*Solución:* El vehículo describe una trayectoria circular horizontal de radio  $\rho$ . La componente normal  $a_n$  de la aceleración esta dirigida hacia el centro de la trayectoria; su modulo es  $a_n = v^2 / \rho$ , donde  $v$  es la velocidad del vehículo. Puesto que no existe fuerza de rozamiento en dirección transversal, la reacción  $R$  de la carretera es normal a su plano, tal como aparece en la figura 3.23. Aplicando la segunda ley de Newton, resulta

$$\sum F_y = 0: \quad R \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow R = \frac{mg}{\cos \theta} \quad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n \quad R \sin \theta = ma_n \quad (2)$$

Sustituyendo en (2) la expresión (1), y teniendo en cuenta que  $a_n = v^2 / \rho$ :

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow v^2 = g \rho \tan \theta$$

Introduciendo los valores numéricos  $\rho = 125m$  y  $\theta = 18^\circ$  en esta ecuación, se obtiene finalmente

$$v^2 = (9.81)(125) \tan 18^\circ$$

$$v = 19.96 \text{ m/s} ; \quad v = 71.9 \text{ Km/h} \quad \leftarrow$$

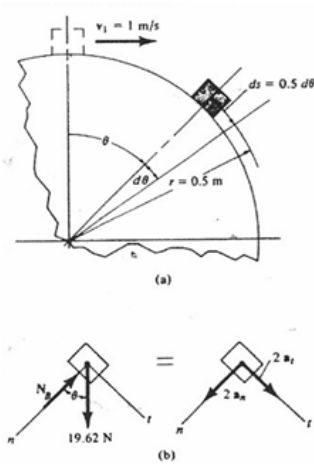


Figura 3.24

Ejemplo 3.6. A un bloque que tiene una masa de  $2kg$  se le da una velocidad inicial de  $1m/s$  cuando esta en la parte superior del cilindro liso, ver figura 3.24(a). Si el bloque se mueve a lo largo de una trayectoria de  $0.5m$  de radio, determine el ángulo  $\theta = \theta_{m\acute{a}x}$  el cual empieza a dejar la superficie del cilindro.

**Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración**

*Solución* En la figura 3.24 (b) se indican los diagramas de cuerpo libre (fuerzas aplicadas) y el cinético (fuerzas de efecto) para el bloque, localizado en la posición general  $\theta$ . El bloque debe tener una aceleración tangencial  $a_t$ , ya que su rapidez siempre esta creciendo conforme se desliza hacia abajo. El peso es  $W = 2(9.81) = 19.62N$

Aplicando las ecuaciones de movimiento da por resultado

$$\sum F_t = ma_t : \quad 19.62 \text{sen} \theta = 2a_t \quad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n : \quad -N_B + 19.62 \text{cos} \theta = 2 \frac{v^2}{0.5} \quad (2)$$

Estas dos ecuaciones contienen cuatro incógnitas,  $\theta$ ,  $a_t$ ,  $N_B$ ,  $v$ . En el instante que  $\theta = \theta_{max}$  el bloque dejara la superficie del cilindro, de modo que  $N_B = 0$

Puede obtenerse una tercera ecuación para la solución observando que la magnitud de la aceleración tangencial  $a_t$  puede relacionarse con la rapidez del bloque  $v$  y con el ángulo  $\theta$ , Según la ecuación (2.28) en la que  $ds = r d\theta$  ver figura 3.24(b). Así,

$$a_t = \frac{v dv}{0.5 d\theta} \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1) y separando variables, tenemos

$$v dv = 4.905 \text{sen} \theta d\theta \quad (4)$$

Integrando ambos miembros en esta ecuación (4) Percatándose de que cuando  $\theta = 0^\circ$ ,  $v = 1m/s$ , da por resultado

$$\int_1^v v dv = 4.905 \int_{0^\circ}^\theta \text{sen} \theta d\theta$$

$$\frac{v^2}{2} \Big|_1^v = -4.905 \text{cos} \theta \Big|_{0^\circ}^\theta \Rightarrow v^2 = 9.81(1 - \text{cos} \theta) + 1$$

Sustituyendo este valor de  $v^2$  con  $N_B = 0$  en (2) y despejando  $\cos \theta_{\text{máx}}$  nos da

$$19.62 \cos \theta_{\text{máx}} = \frac{2}{0.5} [9.81(1 - \cos \theta_{\text{máx}}) + 1]$$

$$2(9.81) \cos \theta_{\text{máx}} = 4(9.81) - 4(9.81) \cos \theta_{\text{máx}} + 4$$

$$6(9.81) \cos \theta_{\text{máx}} = 4(9.81) + 4$$

$$\cos \theta_{\text{máx}} = \frac{43.24}{58.86} = 0.7346$$

$$\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(0.7346) = 42.7^\circ \quad \leftarrow r$$

**Ejemplo 3.7.** El cilindro  $C$  de  $2\text{ kg}$  mostrado en la figura 3.25(a) tiene un perno  $P$  concéntrico pasando por la ranura del brazo  $OA$ . Si el brazo gira en el plano vertical a una razón constante de  $\dot{\theta} = 0.5 \text{ rad/s}$ , calcule la fuerza que el brazo ejerce sobre el perno  $P$  cuando  $\theta = 60^\circ$ . Desprecie el rozamiento en el cálculo y suponga que el cilindro ajusta en forma libre en la ranura recta horizontal  $G$ .

**Solución:** Para resolver este ejemplo, se utilizarán las ecuaciones escalares (3.24) para el movimiento de una partícula en un plano, referido a un sistema de coordenadas polares

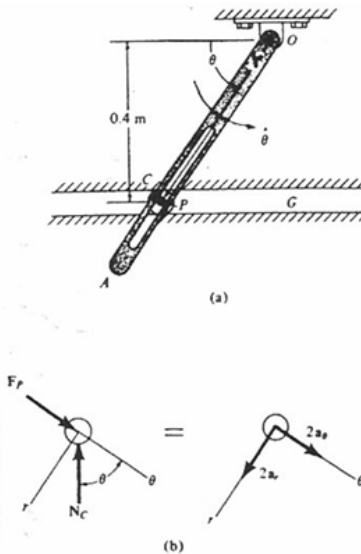
$$\left. \begin{aligned} \sum F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = ma_r \\ \sum F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = ma_\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

En los diagramas de cuerpo libre y cinéticos fig 3.25(b), la fuerza del perno,  $F_P$ , actúa perpendicularmente a la ranura del brazo  $OA$ .  $N_c$  representa la fuerza normal de la pared inferior de la ranura horizontal  $G$  sobre el cilindro. Tanto  $2a_r, (ma_r)$  como  $2a_\theta, (ma_\theta)$  se suponen actuando en la dirección positiva de  $r$  y  $\theta$  respectivamente

Aplicando las ecuaciones de movimiento. Ecuaciones (3.24)

$$\sum F_r = ma_r : -N_c \sin \theta = 2a_r = 2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta : F_P - N_c \cos \theta = 2a_\theta = 2(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$



**Figura 3.25**

De la figura 3.25(a),  $r$  puede relacionarse con  $\theta$  mediante la ecuación

$$r = \frac{0.4}{\text{sen}\theta} = 0.4\text{csc}\theta$$

Como  $d(\text{csc}\theta) = -(\text{csc}\theta\cot\theta)d\theta$  y  $d\cot\theta = -(\text{csc}^2\theta)d\theta$ , entonces  $r$  y las derivadas de  $r$  y  $\theta$  con respecto al tiempo en las ecuaciones (1) y (2) se convierten

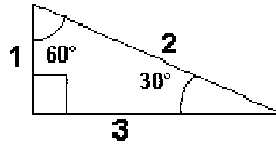
$$\dot{\theta} = 0.5, \ddot{\theta} = 0$$

$$r = 0.4\text{csc}\theta$$

$$\dot{r} = -0.4\text{csc}\theta\cot\theta\dot{\theta} = -0.2\text{csc}\theta\cot\theta$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -0.2(-\text{cs}\theta\cot\theta\dot{\theta})\cot\theta = -0.1\text{cs}\theta(-\text{csc}^2\theta\dot{\theta}) = \\ &= 0.1\text{csc}\theta(\cot^2\theta + \text{csc}^2\theta) \end{aligned}$$

Evaluando estas expresiones en  $\theta = 60^\circ$ , obtenemos



$$\dot{\theta} = 0.5, \ddot{\theta} = 0, r = 0.462, \dot{r} = -0.133, \ddot{r} = 0.192$$

Por lo que

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0765 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = (r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 + 2(0.133)(0.5) = -0.133 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1) y (2) con

$$\theta = 60^\circ, \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \text{cos}60^\circ = \frac{1}{2}, \text{ nos da}$$

$$-N_c \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2(0.0765) \Rightarrow N_c = -\frac{4}{3}(0.0765) = -0.177 \text{ N} \quad \leftarrow r$$

$$\begin{aligned} -F_P - N_c \left( \frac{1}{2} \right) &= 2(-0.133) \Rightarrow F_P = \frac{1}{2}(-133) - 2(0.133) = \\ &= -0.354 \text{ N} \quad \leftarrow r \end{aligned}$$

Como las fuerzas  $N_C$  y  $F_P$  resultaran como cantidades negativas, sus sentidos son opuestos a los mostrados en el diagrama de cuerpo libre *dcl* de la figura 3.25(b).

**Ejemplo 3.8.** Una caja de un elevador de masa 2 toneladas esta conectada a un contrapeso con masa de 1 tonelada por un cable, inextensible ligero pasando por una polea de transmisión de masa de 400kg y diámetro 1m. Si la caja esta acelerando hacia arriba a  $1.5 \frac{m}{s^2}$ , calcular el torque de transmisión requerido en la flecha de la polea y la máxima tensión en el cable.

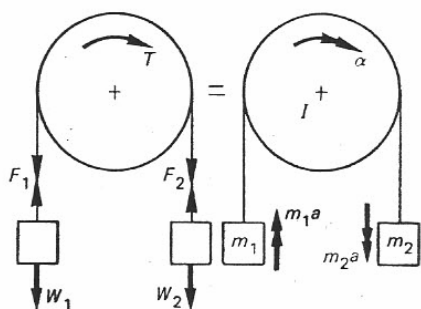


Figura 3.26

**Solución:** Considerando los diagramas de fuerzas y torques, aplicados y de efecto, figura 3.26, el cable es inextensible, de aquí que la aceleración de cada masa es la misma. Debido a que la polea tiene inercia y es conducida, la tensión en el cable de cada lado de la polea es diferente. Estableciendo la ecuación de movimiento para cada parte del sistema:

$$\text{Masa } m_1 \text{ (caja elevador)} \quad F_1 - w_1 = m_1 a \quad (i)$$

$$\text{Masa } m_2 \text{ (contra peso)} \quad F_2 - w_2 = m_2 a \quad (ii)$$

**Polea:** Tomando en cuenta momentos respecto al eje de rotación

$$-T + F_1 r - F_2 r = -I \alpha \quad (iii)$$

Sustituyendo  $\alpha = \frac{a}{r}$ ,  $W_1 = m_1 g$ ,  $W_2 = m_2 g$

$$\text{de la ecuación (i)} \quad F_1 = m_1 (a + g)$$

$$\text{de la ecuación (ii)} \quad F_2 = m_2 (g - a)$$

$$\text{de la ecuación (iii)} \quad T = \frac{I \alpha}{r} + m_1 r_1 (a + g) - m_2 r (g - a)$$

Sustituyendo los siguientes valores en la ecuación del torque (momento torsional)

$$I = M k^2 = M \frac{D^2}{8} = 400 \left( \frac{1}{8} \right) = 50 \text{ Kgm}^2$$



$$m_1 = 2000\text{kg}, \quad m_2 = 1000\text{kg}, \quad a = 1.5\text{m/s}^2, \quad g = 9.81\text{m/s}^2,$$

$$r = 0.5\text{m}, \quad \alpha = \frac{1.5}{0.5} = 3\text{rad/s}, \quad \text{resulta}$$

$$T = 50 \times 3 + 2000 \times 0.5 \times (1.5 + 9.81) - 1000 \times 0.5 \times (9.81 - 1.5)$$

$$= 150 + 11310 - 4155 = 7305\text{Nm}$$

La tensión máxima es la que se necesita para acelerar la masa más grande. Esta es la dada por la ecuación (i)

$$F_1 = m_1(a + g)$$

$$= 2000(1.5 + 9.81) = 22620\text{N} = 22.62\text{KN}$$

**Ejemplo 3.9.** Para el regulador centrífugo, figura 3.27(a), se dan los siguientes datos:  $l = 0.5\text{m}$ ,  $D = 5\text{cm}$ ,  $n = 300\text{rev/min}$ , y  $\theta = 45^\circ$ . ¿Cuál es la fuerza  $P$  que actúa sobre el manguito soporte inferior  $A$ , si cada bola tiene una masa de  $1\text{kg}$  y se desprecian las masas de todos los otros miembros móviles del sistema?

**Solución:** Cada una de las bolas efectúa un movimiento circular simple para un ángulo  $\theta$  fijo.

De acuerdo al *dcl* figura 3.27(b), resolviendo verticalmente

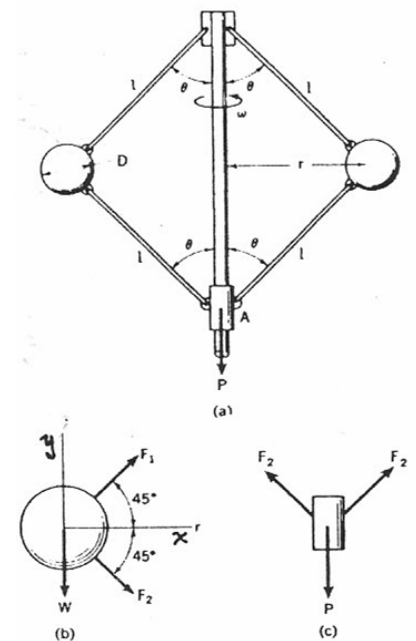
$$F_1 \text{sen}45^\circ - F_2 \text{sen}45^\circ - mg = 0 \quad (i)$$

y resolviendo en el plano de la trayectoria circular horizontal de la bola en consideración.

$$F_1 \text{cos}45^\circ + F_2 \text{cos}45^\circ = mr\omega^2 \quad (ii)$$

Sustituyendo  $m = 1\text{kg}$ ,  $g = 9.81\text{m/s}^2$  en la ecuación (i)

$$(F_1 - F_2)(0.707) - 9.81 = 0 \quad (i')$$



**Figura 3.27**

y sustituyendo las condiciones  $m = 1kg$ ,  $l = 0.5m$ ,

$$r = l \sin \theta = 0.5(0.707) \text{ y } \omega = \left[ \frac{(300)(2\pi)}{60} \right] \text{ en la ecuación (ii)}$$

$$(F_1 + F_2)(0.707) = 1(0.5)(0.707) \left[ \frac{(300)(2\pi)}{60} \right]^2$$

$$= 348.89$$

$$\therefore (F_1 + F_2)(0.707) - 348.89 = 0 \tag{ii'}$$

resolviendo este sistema de ecuaciones simultaneas (i') y (ii'), se obtiene

$$F_1 = 253.68N \text{ y } F_2 = 239.80N$$

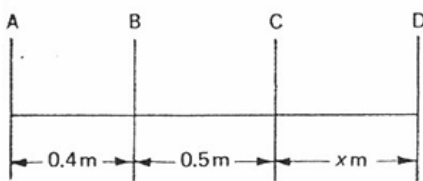
Ahora de acuerdo al "dcl" del manguito soporte A y despreciando el rozamiento como se muestra en la figura 3.27(c), puede decirse de las condiciones de equilibrio, que:

$$P = 2F_2(0.707) = 2(239.8)(0.707) = 339N \quad \leftarrow r$$

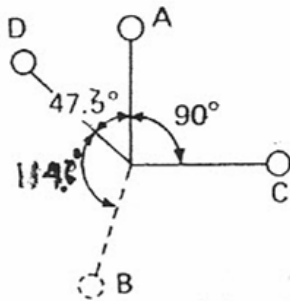
**Ejemplo 3.10** Una flecha rotativa llevando cuatro masas A, B, C y D, sujetas rígidamente; con los centros de masa estando a 30 mm, 36 mm, 39 mm y 33 mm respectivamente de su eje de rotación de la flecha; A, C y D son de 75kg, 5kg y 4kg; la distancia axial entre A y B es 40 mm y entre B y C es de 50 mm; las excentricidades de A y C están a 90° una de la otra.

Encontrar, para un balanceo completo: (a) los ángulos entre A, B y D, (b) la distancia axial entre los planos de revolución de C y D, y (c) la masa B.

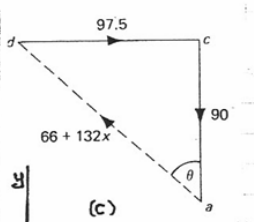
**Solución:** El plano B, fig 3.28(a) se elige como el plano de referencia puesto que este contiene una de las masas desconocidas y las distancias medidas a la derecha de este plano serán consideradas como positivas. Utilizando los datos dados, la siguiente tabla es recopilada



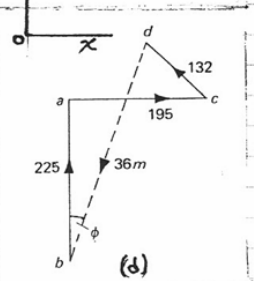
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.28

Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

Plano	$m$ (kg)	$r$ (mm)	$mr$ (kg mm)	$l$ (m)	$mr l$ (kg mm)
A	7.5	30	225	-0.4	-90
B	$m_B$	36	$36m_B$	0	0
C	5	39	195	0.5	97.5
D	4	33	132	$0.5 + x$	$66 + 132x$

El polígono de los momentos de los pares de fuerza, fig 3.28(c) es construida, con los valores de la columna  $mr l$ , la dirección del momento del par de fuerzas debida a A es hacia abajo ya que es negativa.

Por la figura 3.28(c) y el valor correspondiente de la columna  $mr l$

$$ad = \sqrt{[(97.5)^2 + (-90)^2]} = 66 + 132x$$

$$= 132.67 = 66 + 132x \Rightarrow x = 0.505m \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

y  $\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{97.5}{90}\right) = 47.3^\circ \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$

El polígono de las fuerzas, fig 3.28 (d), se construye, usando los valores de la columna  $mr$  y las direcciones conocidas de las fuerzas en A, C y D.

De la figura 3.28 (d), el valor del vector  $db$  del cierre del polígono

$$-db = 225j + 195i - 132\cos(47.3^\circ)l + 132\text{sen}(47.3^\circ)\hat{j}$$

$$= [195 - 132\cos(47.3^\circ)]i + [225 + 132\text{sen}(47.3^\circ)]j$$

$$\therefore db = \sqrt{(105.5)^2 + (322)^2} = 338.8$$

Pero de la columna  $mr$   $B = 36m_B$ , tenemos

$$db = 338.8 = 36m_B \Rightarrow m_B = \frac{338.8}{36} = 9.41kg \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

y también

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{105.5}{322}\right) = 18.1^\circ \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

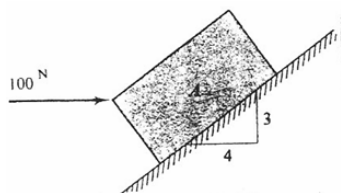
Por lo que el ángulo entre B y D = 114.6°

Las posiciones relativas de las masas son mostradas en la figura 3.28 (b)

### *Ejercicios de Trabajo*

*Observación previa:* En los ejercicios siguientes se supone que los cordones cuerdas y cables son flexibles, inextensibles y de masa despreciable. Las poleas se asumen de masa despreciable, y los pernos ejes y espigas se consideran lisas a menos que se indique lo contrario.

- 3.1. En el piso de un ascensor se coloca una balanza de resorte. Despréciese la masa de la plataforma de la balanza. Cuando el ascensor esta detenido, un hombre se para en la plataforma de la balanza y esta indica  $80kg$ . Calcule (a) la aceleración del elevador cuando la balanza indica  $100kg$ , (b) la lectura de la balanza, cuando el elevador tiene una aceleración de  $4.0 \frac{m}{s^2}$  hacia abajo.
- 3.2. Un astronauta pesa  $750N$  sobre la superficie de la tierra. Suponga que la tierra es una esfera cuyo radio mide  $6400km$ . Calcule:  
 (a) la masa y el peso del astronauta cuando se encuentra en una estación espacial “estacionaria” (cuya orbita es circular a  $800km$  sobre la superficie de la tierra).  
 (b) La velocidad que debe poseer el satélite para que el astronauta experimente la sensación de falta de peso o ingravidez.



**Figura 3.29**

- 3.3. La masa del bloque A, figura 3.29, es  $35kg$  y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie inclinada, es de  $0.50$ . Calcule la aceleración de A sometido a la acción de una fuerza horizontal de  $100N$  cuando su velocidad es: (a)  $2.5 \frac{m}{s}$  hacia arriba en la dirección del plano inclinado, (b)  $5.0 \frac{m}{s}$  hacia abajo en la dirección del plano inclinado, (c) nula

Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

3.4. Las masas de los bloques  $A$  y  $B$  del sistema de la figura 3.30 son  $2.6\text{kg}$  y  $1.0\text{kg}$  respectivamente. El coeficiente de rozamiento entre  $A$  y el plano es  $0.25$ . La velocidad inicial del bloque  $A$  es  $3\text{ m/s}$  en el sentido de descenso sobre el plano inclinado. Calcule:

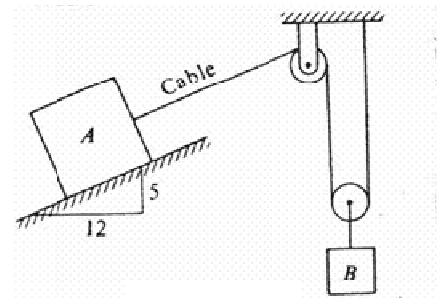


Figura 3.30

- (a) la aceleración del bloque  $A$ .
- (b) la tensión en el cable.

3.5. Los bloques  $A$  y  $B$ , de la figura 3.31, parten del reposo en la posición representada. La masa de  $B$  es el doble de la masa de  $A$ . El coeficiente de rozamiento estático es  $0.40$  para todas las superficies y el coeficiente de rozamiento cinéticos  $0.30$ . Calcule la aceleración del bloque  $A$ .

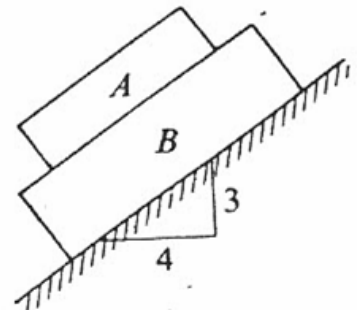


Figura 3.31

3.6. El bloque  $A$  de masa  $m$  representado en la figura 3.32 se desliza en una pista circular vertical cuyo diámetro mide  $4\text{m}$ . El coeficiente del rozamiento entre  $A$  y la pista es de  $0.30$ . En la posición representada la velocidad del bloque es  $3.0\text{ m/s}$  en el sentido de descenso. Calcule la aceleración de  $A$  en este instante.

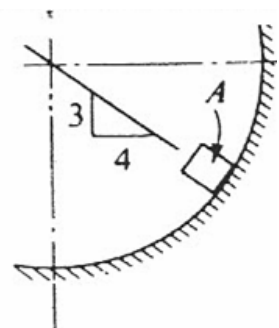


Figura 3.32

3.7. La partícula  $A$  de  $2\text{kg}$  está atada al extremo de una cuerda de  $2.5\text{m}$  y oscila contenida en un plano vertical tal como se indica en la figura 3.33. Cuando el ángulo  $\theta$  es  $30^\circ$ , la magnitud de la velocidad de  $A$  es  $1.5\text{ m/s}$ . Calcule la tensión la cuerda y la aceleración angular en la posición indicada en la figura.

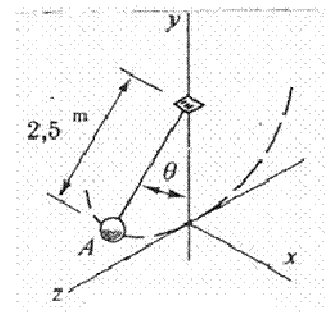


Figura 3.33

3.8. El cuerpo  $A$  de  $9\text{kg}$  reposa en la figura 3.34, descansa sobre un plano liso. La fuerza  $P$  aplicada al cuerpo  $A$  se incrementa muy lentamente a partir de cero. Calcule el valor máximo que puede

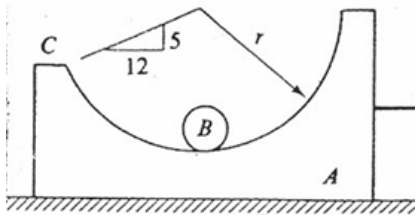


Figura 3.34

adquirir la fuerza  $P$  sin que el cilindro liso de  $6\text{ kg}$  salga del cuerpo  $A$  por el punto  $C$ .

- 3.9. Suponga que la partícula  $A$  de la figura 3.35 se conecta a un punto  $B$  mediante una cuerda de  $3.0\text{ m}$  al punto  $O$  mediante otra cuerda de  $5.0\text{ m}$

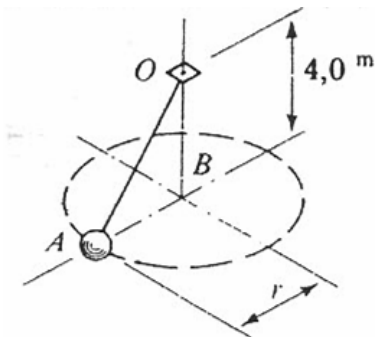


Figura 3.35

(a) Deduzca una expresión que permita calcular la tensión en la cuerda  $AB$  en términos de la masa del cuerpo y la velocidad angular de  $AB$ .

(b) ¿Qué valor tiene la velocidad angular cuando se anula la tensión de la cuerda  $AB$ ?

(c) El ángulo  $AOB$  disminuye al hacerlo la velocidad angular, calcula el valor de la velocidad angular para el cual el ángulo  $AOB$  se anula.

- 3.10. Un automóvil de carreras recorre una curva con rapidez constante de  $250\text{ km/h}$ . El radio de curvatura de la pista es  $500\text{ m}$ , medido horizontalmente, el

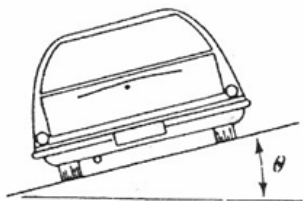


Figura 3.36

peralte de la pista, ángulo  $\theta$ , figura 3.36, es  $30^\circ$ . Calcule el mínimo del coeficiente de rozamiento entre la pista y las llantas, requerido para evitar el deslizamiento del vehículo.

- 3.11. La mesa giratoria representada en la figura 3.37 gira contenida en un plano horizontal con aceleración angular constante  $3.0\text{ rad/s}^2$  en el

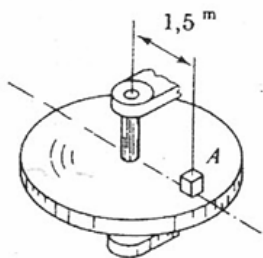


Figura 3.37

sentido atihorario cuando se observa hacia abajo. La masa del bloque  $A$  colocada sobre el disco es  $2.0\text{ kg}$ . Calcule la magnitud de la fuerza de rozamiento del disco sobre el bloque en el instante en que la velocidad angular del disco es  $2.0\text{ rad/s}$

en el sentido antihorario. Suponga que el bloque no desliza.

- 3.12. Un hombre hace oscilar un cubo lleno de agua hasta que gira según una circunferencia vertical de  $0.75\text{ m}$  de radio. ¿Cuál es la mínima velocidad con que debe llegar el cubo al punto mas alto de la circunferencia para que el agua no se vierta?

Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

3.13. Un conductor automotriz toma una curva en una carretera horizontal sin peraltar a  $72 \text{ km/h}$ . Si el radio de la curva es de 50m, determinar:  
 (a) El valor mínimo de coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la carretera para que no haya deslizamiento. y (b) ¿Con que ángulo debería peraltarse la carretera para que el conductor pudiera tomar la curva a la misma velocidad con un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0.30$ ?

3.14. En la figura 3.38, sabiendo que  $\mu = 0.45$ , determinar la aceleración de cada bloque del sistema si  $m_A = 5 \text{ kg}$ ,  $m_B = 20 \text{ kg}$ ,  $m_C = 15 \text{ kg}$ .

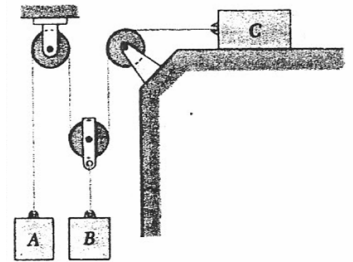


Figura 3.38

3.15. Las masas de los bloques A y B de la figura 3.39 son 2kg y 4kg, respectivamente. Los coeficientes de rozamiento son 0.4 entre A y B, y 0.2 entre B y la superficie horizontal. Desprecie la masa del cuerpo C. Calcular; (a) el valor máximo que puede adquirir P sin que se inicie el movimiento, (b) el valor mínimo que debe tener P para que A se deslice sobre B.

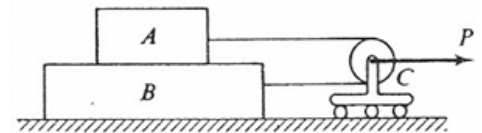


Figura 3.39

3.16. El anillo B de la figura 3.40 se desliza sobre la barra OA, que gira contenida en el plano vertical. En la posición mostrada, la velocidad y aceleración angulares de OA son  $5 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario y  $3 \text{ rad/s}^2$  en sentido horario respectivamente. En el instante considerando  $r$  es  $300 \text{ mm}$  y se incrementa a razón de  $600 \text{ mm/s}$ . El coeficiente de rozamiento entre el anillo y la barra es 0.2. Calcule la aceleración del anillo relativa a la barra.

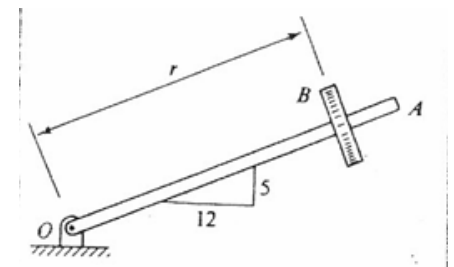


Figura 3.40

3.17. En el instante bajo consideración, el carrito-trole T, figura 3.41, tiene una velocidad de  $4 \text{ m/s}$  a la

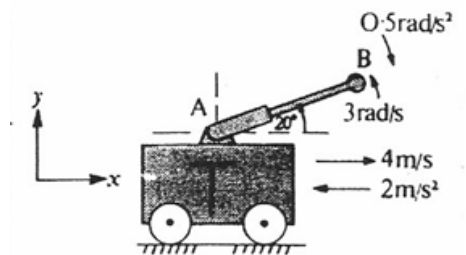


Figura 3.41

derecha y esta desacelerando a  $2\text{m/s}^2$ . El brazo telescópico  $AB$  tiene una longitud de  $1.5\text{m}$ , la cual está aumentando a una razón constante de  $2\text{m/s}$ . Al mismo tiempo, el brazo tiene una velocidad angular en sentido antihorario de  $3\text{rad/s}$  y una aceleración angular en el sentido horario de  $0.5\text{rad/s}^2$ . Además el brazo telescópico lleva un cuerpo de masa concentrada de  $3.0\text{kg}$  en el extremo B. Determinar la fuerza  $R$  ejercida por el brazo sobre este cuerpo para la posición mostrada.

- 3.18. Una partícula moviéndose con movimiento armónico simple (mas) tiene una velocidad de  $2\text{m/s}$  cuando está pasando por la posición media de su carrera y una aceleración de  $2.7\text{m/s}^2$  cuando está a  $0.67\text{m}$  de su posición media, Encontrar la amplitud y el período de oscilación.
- 3.19. Una corredera se mueve a lo largo de una trayectoria con movimiento armónico simple (mas), la carrera es  $0.67\text{m}$  y el período es  $1.8\text{s}$ . Determine la velocidad y aceleración de la corredera en (a) al principio de la carrera, (b) a un cuarto de la carrera, y (c) a la mitad de la carrera.
- 3.20. El volante de un arreglo motor-generator tiene un momento de inercia de  $420\text{kgm}^2$  y los rotores de este arreglo tienen un momento de inercia de  $130\text{kgm}^2$ . La flecha común estando sin carga, gira a  $750\text{ rev/min}$ , cuando de súbito se le solicita el arreglo motor-generator una carga que motiva que la rapidez caiga a  $650\text{ rev/min}$  en  $1.5\text{ segundos}$ . Calcular el valor de la carga debida al torque (momento-rotación) uniforme que produce la caída de la rapidez.



Parte A: Fuerza, Masa y Aceleración

3.21. Una masa de 5 toneladas es levantada por una grúa malacate con una aceleración de  $0.8 \text{ m/s}^2$ . El malacate consiste de un tambor (cilindro hueco) de  $0.6\text{m}$  de diámetro exterior alrededor del cual es enrollado un cable ligero con un extremo pasando hacia abajo, a la carga, el tambor es impulsado a girar por un motor eléctrico a través de un tren de engranes como se muestra en la figura 3.42. El momento de inercia de las partes de rotación es equivalente a una masa  $1550\text{kg}$  con un radio de giro de  $200\text{mm}$  respecto al eje del tambor. Si el torque de rozamiento del sistema es equivalente a  $450\text{Nm}$  en el tambor, Calcule el torque de transmisión requerido en la flecha del tambor para levantar la carga a la razón requerida.

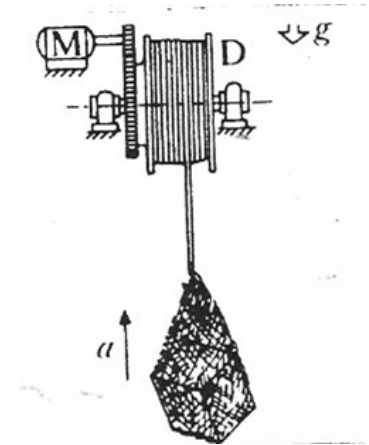


Figura 3.42

- 3.22. (a) Un regulador centrífugo de tipo péndulo cónico consiste, de dos masas cada una de  $5\text{kg}$ . Los eslabones de conexión superiores están sujetos al brazo transversal fijo al árbol del regulador en un punto a  $75\text{mm}$  del eje del árbol. La distancia desde el punto de sujeción de cada eslabón con el brazo transversal al centro de las masas rotando es de  $225\text{mm}$ . Determine la rapidez del regulador centrífugo cuando los eslabones hacen un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical, despreciar las masas de los eslabones.
- (b) Para incrementar la rapidez de trabajo del regulador, un resorte se conecta a las masas, el resorte pasa a través de un orificio en el árbol del regulador. Si la fuerza en el resorte es  $120\text{N}$  cuando los eslabones tienen un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical, determine el incremento en rapidez producido por esta modificación.
- 3.23. Un regulador centrífugo, el cual consiste de dos masas girando conectadas por un resorte de tensión, es requerido para lograr su trabajo a una rapidez de  $120 \text{ rev/min}$ , con un radio de la circunferencia trazada por el movimiento de las

masas del R. C., de 150mm. La máxima rapidez del regulador viene siendo 180 *rev/min* y para esta rapidez, el radio de acción de las masas es de 200mm. Si cada masa es de 5kg y el rozamiento en el mecanismo del regulador puede ser despreciado, determinar (i) la rigidez requerida del resorte y (ii) la rapidez del regulador en *rev/min* cuando el radio de acción es de 175mm.

3.24. En un plano en rotación, masas de 5kg y 10kg estando en radios de 50mm y 75mm desde su eje de rotación, y separadas radialmente en un ángulo de 120°, estas masas giran a 120 *rev/min*. Calcule la posición de una masa de 20kg situada en el mismo plano, la cuál proporciona el balance dinámico.

3.25. Una armadura, de masa 500kg, gira a 500 *rev/min* soportada por cojinetes separados a una distancia de 1.5m, el centro de gravedad de la armadura esta a 25mm del eje de rotación y a 0.5m de uno de los soportes o cojinetes. Calcular la reacción en cada cojinete debida al desbalanceo de la armadura.

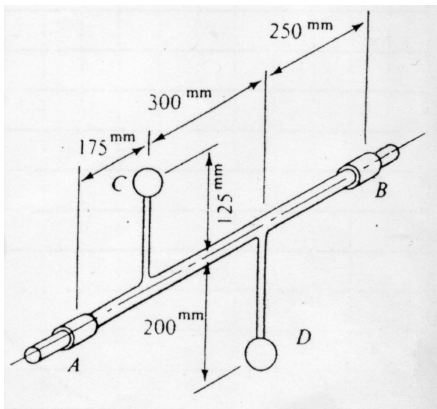


Figura 3.43

3.26. El eje de la figura 3.43 gira a 1200 *rev/min* apoyado en los cojinetes A y B. Las masas ubicadas en C y D son 2kg y 5kg, respectivamente. Desprecie el efecto de la gravedad y calcule las fuerzas que ejercen los cojinetes sobre el eje cuando éste se encuentra en la posición definida en la figura.



# 3

## CINÉTICA DE LA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO PLANO

### Parte B: Impulso–Cantidad de Movimiento y Trabajo–Energía

#### 3.12. Impulso y Cantidad de Movimiento Lineal

Existen dos métodos para integrar la ecuación (3.1)  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  o la ecuación (3.16)  $\sum \mathbf{F}_i = M \dot{\mathbf{r}}_G$ . Estos datos se basan matemáticamente en la dependencia funcional de las fuerzas y por lo tanto de las aceleraciones, y para la partícula, son inmediatamente recomendable las relaciones cinemáticas.

En esta sección, consideraremos las fuerzas como función del tiempo, para inferir los principios de impulso—cantidad de movimiento lineal.

Y en la sección 3.18 la fuerza será considerada como una función principalmente de posición y el *principio trabajo-energía* será obtenido.

El principio de impulso-cantidad de movimiento lineal para una partícula de masa  $m$  sujeta a una fuerza  $\mathbf{F}$ , de la ecuación (3.1) se tiene:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \mathbf{F} dt = m d\mathbf{v}$$

Integrando de  $t_1$  a  $t_2$  y de  $v_1 = v_2$  nos da:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{v_1}^{v_2} m d\mathbf{v} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \quad (3.33)$$

La integral  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$  se llama impulso y generalmente se le asigna el símbolo  $\mathbf{J}$ .

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Trabajo – Energía Cinética**

(obsérvese que el impulso es una cantidad vectorial)

Por lo tanto Impulso = variación en *momentum*

$$\text{o} \quad J = \Delta(mv) = \Delta G \quad (3.34)$$

donde  $G$  se establece para  $mv$  la cual se ha definido como el *momentum* lineal (cantidad de movimiento lineal)<sup>8</sup> de la partícula. La cantidad de movimiento lineal también es un vector cuya dirección coincide con la dirección de la velocidad. Las dimensiones del *momentum* lineal se obtienen en la forma siguiente:

$$mv = M(LT^{-1}) = (FT^2L^{-1})(LT^{-1}) = FT = F \Delta t$$

Luego las dimensiones y por lo tanto las unidades comunes del *momentum* lineal ( $mv$ ) y del impulso lineal ( $F \Delta t$ ) son iguales.

La ecuación (3.16)  $\sum F_i = M \ddot{r}_G$  describe el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas o un cuerpo rígido, la que puede ser expresada como:

$$\sum F_i = \mathbf{R} = M \ddot{r}_G = M \mathbf{a}_G = M \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_G),$$

donde  $\mathbf{R}$  es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas o cuerpo rígido, la ecuación puede expresarse como:

$$\mathbf{R} dt = M d\mathbf{v}_G$$

Al integrar la ecuación anterior con respecto al tiempo

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R} dt = M \int_{v_1}^{v_2} d\mathbf{v}_G = M(\mathbf{v}_{G_2} - \mathbf{v}_{G_1}) \\ \text{o} \quad J = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta \mathbf{G} \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

donde los subíndices 1 y 2 identifican los valores inicial y final de los intervalos de tiempo y velocidad.

<sup>8</sup> El termino *momentum* es de Newton y es la cantidad de movimiento que es la medida conjuntamente de su velocidad y la cantidad de materia.

### 3.13. Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal.

Las ecuaciones (3.34) y (3.35) pueden usarse de modo directo si se dispone de una relación de datos Fuerza-Tiempo como se muestra en la figura 3.44. En este caso el área bajo la curva es el impulso y puede igualarse a la variación o cambio en cantidad de movimiento lineal.

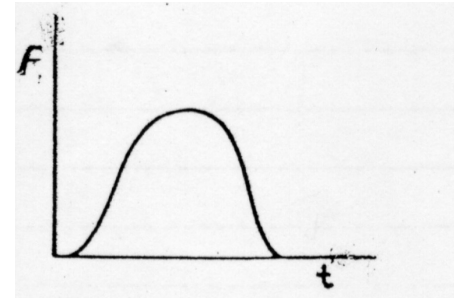


Figura 3.44

En problemas de colisión, la relación impulso-*momentum* se utiliza en unión con la Tercera Ley de Newton. De acuerdo a esta ley, la fuerza de contacto sobre un cuerpo durante el choque o colisión es igual y opuesta a aquella sobre el otro, y por tanto el impulso recibido por un cuerpo será igual y opuesto a aquel recibido por el otro. De esto se desprende que el *momentum* lineal (cantidad de movimiento lineal) recibida por un cuerpo será igual a aquella pérdida por el otro.

Consideremos el impacto o choque colineal de dos esferas *A* y *B*, como se muestra en la figura 3.45.

Para la masa *A*,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{J} = M_A (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$$

Pero la masa *B*,

$$\int_{t_1}^{t_2} -\mathbf{F} dt = -\mathbf{J} = M_B (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

Sumando estas dos ecuaciones,

$$0 = M_A \mathbf{u}_2 + M_B \mathbf{v}_2 - (M_A \mathbf{u}_1 + M_B \mathbf{v}_1)$$

o  $(M_A \mathbf{u}_1 + M_B \mathbf{v}_1) = (M_A \mathbf{u}_2 + M_B \mathbf{v}_2)$  (3.36)

así, la cantidad de movimiento lineal antes del choque es igual a la cantidad de movimiento lineal después del choque.

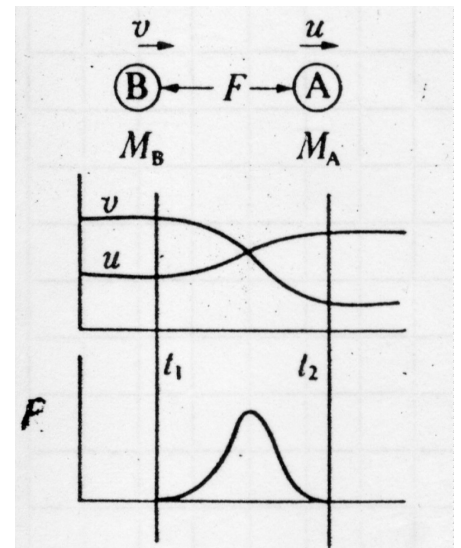


Figura 3.45

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento

Este razonamiento se puede extender para incluir la interacción de cualquier número de cuerpos independientes en colisión y conducirnos al principio de la conservación de la cantidad de movimiento (*momentum*) lineal, que establece que el *momentum* lineal de cualquier sistema de cuerpos en colisión permanece constante no importando que tome lugar dentro del sistema, con tal de que el sistema sea independiente y no haya fuerzas externas actuando.

### Ejemplo demostrativo de impulso y *momentum* lineal, temas 3.12 y 3.13.

Ejemplo demostrativo 9. Un furgón de ferrocarril *A* de masa 20 toneladas viajando a 5 m/s en una vía horizontal choca con un furgón *B* estacionado, de masa 50 toneladas. Los furgones se mueven acoplados después del choque o colisión. Encontrar su velocidad común y si el impacto es de 0.05 segundos de desviación, determinar la fuerza que actúa durante la colisión.

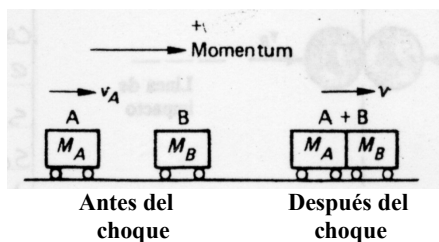


Figura 3.46

*Solución:* El movimiento es en una misma línea recta, por tanto una dirección positiva del *momentum* puede asignarse, siendo como se muestra en la figura 3.46.

Por el principio de conservación del *momentum*, si  $v$  es la velocidad común después del choque. La cantidad de movimiento lineal total final = a la cantidad de movimiento lineal total inicial.

$$(M_A + M_B)v = M_A v_A + 0$$

donde:

$$v = \frac{M_A v_A}{M_A + M_B}$$

con  $M_A = 20 \times 10^3 \text{ kg}$ ,  $M_B = 50 \times 10^3 \text{ kg}$ ,  $v_A = 5 \text{ m/s}$ ,

$$v = \frac{20 \times 10^3 \times 5}{7 \times 10^3} = 1.43 \text{ m/s} \quad \leftarrow$$

Impulso de  $A$  en  $B$  = Cambio en cantidad de movimiento lineal de  $B$

= Cantidad de movimiento lineal final de  $B$  – cantidad de movimiento lineal inicial de  $B$

$$Pt = M_B v - 0$$

$$\therefore P = \frac{M_B v}{t}$$

con  $M_B = 50 \times 10^3 \text{ kg}$ ,  $v = 1.43 \text{ m/s}$ ,  $t = 0.05 \text{ s}$ ,

$$P = \frac{50 \times 10^3 \times 1.43}{0.05} = 1430 \times 10^3 \text{ N}$$

$$= 1430 \text{ kN}$$

$r$   
←

Por lo que la velocidad final es  $1.43 \text{ m/s}$  y la fuerza que actúa durante la colisión es  $1430 \text{ kN}$ .

### 3.14. Impacto Directo

Los principios del impulso y la cantidad de movimiento fueron introducidos en las secciones 3.12 y 3.13 para partículas y para cuerpos que podían ser considerados como partículas en situaciones donde sus deformaciones y rotaciones podían ignorarse, sin embargo, este tema se amplía para poder manejar problemas con cuerpos deformables, en los cuales puede suponerse que la interacción se lleva a cabo sin rotaciones.

Los movimientos relativos de los cuerpos en el instante del impacto, se describen con referencia a la línea que es perpendicular al plano de las superficies en contacto de los cuerpos- Esta línea es llamada *línea de impacto* y se muestra en la figura 3.47. El movimiento relativo produce un impacto o colisión central cuando los centros de masa de los dos cuerpos están sobre la línea de impacto durante la colisión. Si los centros de masas de los dos cuerpos no están sobre la línea de impacto, se dice que este movimiento relativo produce un impacto excéntrico. En este tema se analiza únicamente el impacto central, el cual

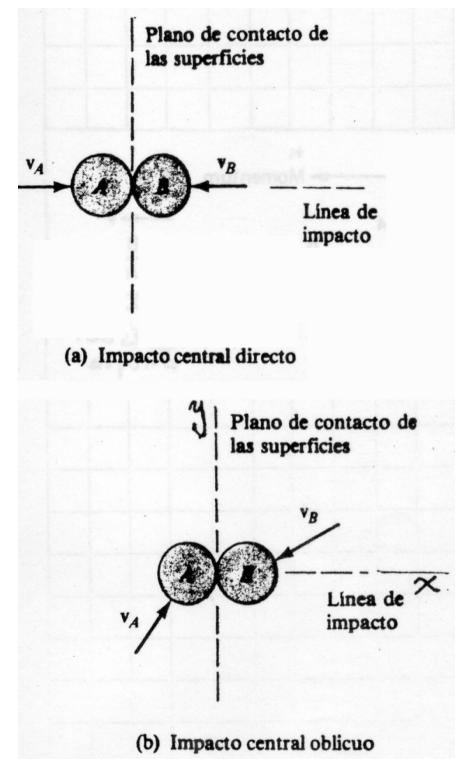


Figura 3.47



## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento

puede ocurrir de dos maneras como se muestra en la figura 3.47.

El *impacto central directo* es el caso simple en que dos masas sufren un impacto colineal, figura 3.47(a) lo único que interesa es el rebote de los dos cuerpos, ya que las deformaciones de estos lo afectan. Debe recordarse que todos los cuerpos se deforman durante un impacto puesto que todas las fuerzas causan deformaciones. Cada deformación tiene dos componentes, una elástica o deformación recuperable, y una plástica o deformación permanente. Generalmente ambas ocurren, simultáneamente pudiendo ser iguales.

La deformación plástica disipa energía principalmente en forma de calor. Esta pérdida de energía es la que reduce las velocidades del rebote.

En el impacto de dos cuerpos, sus respectivas deformaciones pueden ser bastante diferentes, tanto en la magnitud total de la deformación de cada cuerpo como en las proporciones de las deformaciones plásticas y elásticas.

El tratamiento unificado de los problemas de impacto se basa en los *principios del impulso-cantidad de movimiento*. Supóngase que los cuerpos en colisión son esferas con masas, características de deformación y velocidades diferentes. Es importante considerar cuatro instantes sucesivos en el evento de impacto como se muestra en la figura 3.48(a) antes del impacto los cuerpos se mueven en una trayectoria a la colisión. Sus velocidades pueden estar en la misma dirección, o en direcciones opuestas. Las cantidades de movimiento (*momentum*) en esta situación es la información inicial para el análisis.

Figura 3.48(b) se realiza el contacto y ambos cuerpos se deforman. Sus velocidades cambian rápidamente, pero son algo similares ya que los dos cuerpos se mueven juntos por instantes. Cuando se alcanza la máxima deformación,  $v'_A = v'_B = v_C$ , donde la velocidad común  $v_C$  se alcanza al

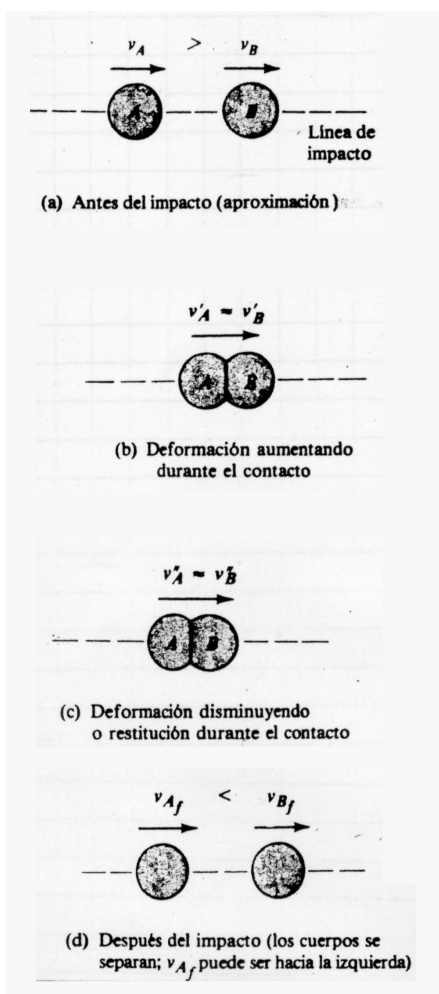


Figura 3.48

final de esta fase.

Figura 3.48(c) los cuerpos están todavía en contacto pero están ya rebotando. En el inicio de esta fase las partículas aún tienen la velocidad común  $v_A'' = v_B'' = v_C$ . A través de esta fase la deformación está disminuyendo, lo cual se conoce como *restitución*.

Figura 3.48(d) sí existe separación, los cuerpos se mueven con nuevas velocidades, las velocidades finales  $v_{Af}$  y  $v_{Bf}$  dependen de las cantidades de movimiento iniciales y de la energía perdida durante el impacto, la velocidad final  $v_{Af}$  puede ser positiva o negativa aún si  $v_A$  y  $v_B$  hubieran sido positivas.

Supóngase que no existen otras fuerzas actuando sobre los dos cuerpos aparte de la fuerza mutua entre ellos. En este caso la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos se conserva, y utilizando la ecuación (3.36), referida en la dirección de la línea de impacto, se obtiene la siguiente ecuación escalar.

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} \quad (3.37)$$

Esta ecuación (3.37) contiene dos incógnitas  $v_{Af}$  y  $v_{Bf}$ .

Es evidentemente necesaria una relación adicional para poder determinar las velocidades finales. En esta relación debe reflejarse la capacidad de los cuerpos en contacto para recuperarse del choque y puede expresarse mediante el cociente  $e$  del impulso durante el tiempo de restauración y el impulso durante el tiempo de deformación. Este cociente recibe el nombre de *coeficiente de restitución*. Si representamos por  $F_R$  y  $F_D$ , respectivamente, los módulos de las fuerzas de contacto durante los períodos de restauración y deformación (Figura 3.49), la definición de  $e$  combinada con el principio de la cantidad de movimiento lineal nos dará para la masa del cuerpo  $A$ .

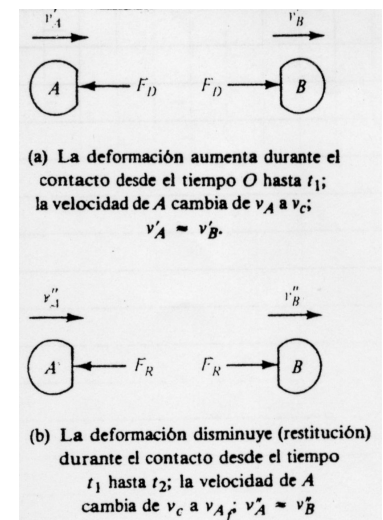


Figura 3.49

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

$$e = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F_R dt}{\int_0^{t_1} F_D dt} = \frac{m_A [-v_{Af} - (-v_C)]}{m_A [-v_C - (-v_A)]} = \frac{v_C - v_{Af}}{v_A - v_C} \quad (a)$$

Análogamente para la masa del cuerpo  $B$  tendremos:

$$e = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F_R dt}{\int_0^{t_1} F_D dt} = \frac{m_B [-v_{Bf} - (-v_C)]}{m_B [-v_C - (-v_{Bf})]} = \frac{v_{Bf} - v_C}{v_C - v_B} \quad (b)$$

La velocidad común  $v_C$  durante la máxima deformación puede eliminarse de las dos expresiones para  $e$ , nótese que un cociente no se altera si un cociente igual se le suma directamente al numerador y al denominador [por ejemplo,  $a/b = (a+a)/(b+b)$ ]. Por lo tanto, las ecuaciones (a) y (b) de los cocientes igual a  $e$ , se obtiene:

$$e = \frac{v_{Bf} - v_C + v_C - v_{Af}}{v_C - v_B + v_A - v_C} = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_A - v_B} \quad (3.38a)$$

Es decir con palabras:

$$e = \frac{[\text{velocidad relativa de separación}]}{[\text{velocidad relativa de aproximación}]} \quad (3.38b)$$

Gran atención debe aplicarse cuando se utiliza este coeficiente pues su valor depende de la geometría de los cuerpos en colisión como también en las propiedades de sus materiales.

El coeficiente de restitución se aproxima a la unidad cuando los cuerpos son elásticos perfectos y es nulo cuando los cuerpos son inelásticos y permanecen juntos después del impacto. El choque se denomina *impacto plástico* cuando la velocidad relativa final es nula. La energía cinética del sistema se conserva durante el choque

cuando el coeficiente de restitución es la unidad, pero el coeficiente siempre es menor que uno (1) porque alguna parte de la energía se utiliza en la generación de sonido, vibraciones en los cuerpos, deformaciones permanentes y en otras formas posibles. En consecuencia, los límites para el valor de  $e$  correspondiente a cualquier par de cuerpos son cero y la unidad. Así:

$$0 \leq e < 1 \text{ en la práctica}$$

Los conceptos del impacto central directo pueden ser fácilmente extendidos al caso en que las velocidades inicial y final no son colineales. Este caso se conoce como *impacto oblicuo*, Figura 3.50, donde un sistema de coordenadas se coloca por conveniencia en el lugar del impacto. La información inicial normalmente disponible consta de las masas  $m_A$  y  $m_B$ , y de sus velocidades iniciales  $v_A$  y  $v_B$ . Las velocidades finales  $v_{Af}$  y  $v_{Bf}$ , son desconocidas en magnitud y dirección, de tal manera que se requieren cuatro ecuaciones independientes para determinar los dos componentes de cada velocidad.

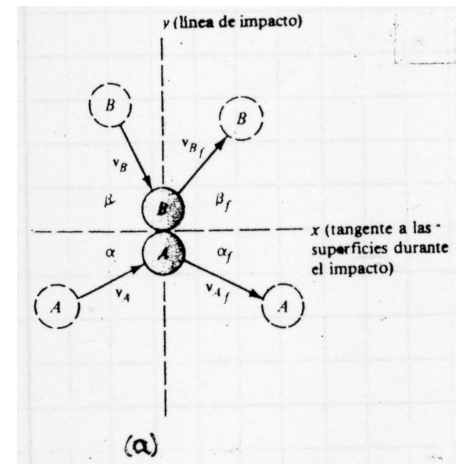


Figura 3.50(a)

El problema de un impacto central oblicuo se resuelve utilizando la superposición de dos movimientos, si durante el contacto no existe fuerza de rozamiento mutua entre los cuerpos. Los dos movimientos distintos son los que están sobre los cuerpos moviéndose sobre líneas paralelas sin ninguna posibilidad de colisión. El movimiento en la dirección del eje  $y$  es equivalente a un movimiento central directo, el cual fue ya analizado con este planteamiento se obtienen los siguientes cuatro ecuaciones:

1. Considérese únicamente la masa  $A$  (Figura 3.50b); de la ecuación 3.35 se obtiene:

$$m_A (v_A)_x + \int F_x dt = m_A (v_{Af})_x$$

Ya que no se tiene rozamiento,  $F_x=0$ , y la componente en  $x$  de la cantidad de movimiento del cuerpo  $A$  se conserva, es decir:

$$(v_A)_x = (v_{Af})_x \quad (3.39)$$

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento

de la figura 3.50(a),  $v_A \cos \alpha = v_{Af} \cos \alpha_f$

2. Similarmente, la componente en  $x$  de la cantidad de movimiento del cuerpo  $B$  se conserva, esto es:

$$(v_B)_x = (v_{Bf})_x \quad (3.40)$$

de la figura 3.50(a),  $v_B \cos \beta = v_{Bf} \cos \beta_f$

3. La cantidad de movimiento total de los cuerpos en la dirección  $y$  se conserva como en el impacto central directo, esto es:

$$m_A (v_A)_y + m_B (v_B)_y = m_A (v_{Af})_y + m_B (v_{Bf})_y \quad (3.41)$$

de la figura 3.50(a):

$$m_A v_A \text{sen} \alpha - m_B v_B \text{sen} \beta = m_A v_{Af} \text{sen} \alpha_f + m_B v_{Bf} \text{sen} \beta_f$$

4. El coeficiente de restitución es aplicable al movimiento en la dirección del eje  $y$ , como en el impacto central directo. De la ecuación (3.38b) se obtiene que:

$$e = \left( \frac{\text{velocidad relativa de separación}}{\text{velocidad relativa de aproximación}} \right)_{\text{Dirección } y} \quad (3.42)$$

de la figura 3.50(a):

$$e = \frac{v_{Bf} \text{sen} \beta_f + v_{Af} \text{sen} \alpha_f}{v_A \text{sen} \alpha + v_B \text{sen} \beta}$$

Las 4 ecuaciones de 3.39 a 3.42 pueden utilizarse para resolver problemas de impacto oblicuo donde se considere que no existe rozamiento durante la colisión; obsérvese que las ecuaciones están basadas en la figura 3.50 y que son únicamente para ese caso.

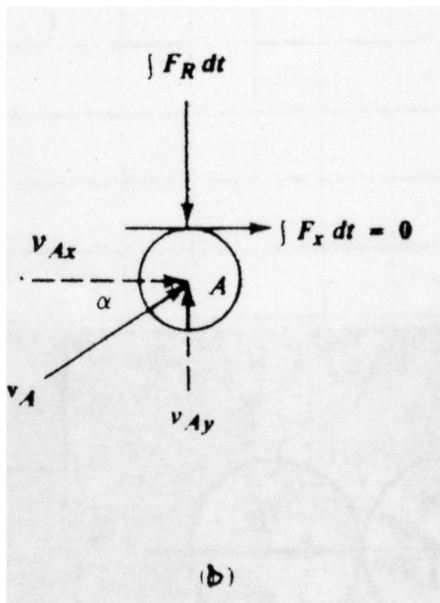


Figura 3.50(b)

Ejemplo demostrativo de impacto central directo (tema 3.14) Ejemplo demostrativo 3.10. En el instante de chocar dos discos para jockey de 100g cada uno se mueven sobre hielo liso, como se indica en la vista superior representada en la figura 3.51(a). Las velocidades de  $A$  y  $B$  antes del impacto son  $12\text{m/s}$  y  $15\text{m/s}$  en las direcciones indicadas en la figura. El coeficiente de restitución de los cuerpos es 0.56. Calcule la velocidad de cada disco después del choque.

*Solución:* La línea del impacto coincide con la dirección  $x$  y es equivalente a un choque central directo en esta dirección, cambiando únicamente los componentes  $x$  de las velocidades de los discos. El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal en esta dirección se expresa como:

$$m_A(v_{Ax}) + m_B(v_{Bx}) = m_A(v_{Axf}) + m_B(v_{Bxf}) \quad (a)$$

Sustituyendo valores:

$$0.100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(12) + 0.100(-15) = 0.100(v_{Axf}) + 0.100(v_{Bxf})$$

y de la ecuación (3.37a) utilizando los componentes de las velocidades en la dirección de la línea de impacto en este caso la ecuación es para  $e$  en impacto oblicuo.

$$e = 0.56 = -\frac{(v_{Axf}) - (v_{Bxf})}{12(0.866) - (-15)} \quad (b)$$

Resolviendo las ecuaciones simultaneas (a) y (b) se obtiene:

$$v_{Af_x} = -9.41\text{m/s}, \quad v_{Bf_x} = 4.81\text{m/s}$$

El diagrama de cuerpo libre del disco  $A$  definido en la figura 3.51(b) muestra que el impulso en la dirección  $y$  es nulo; en consecuencia se conserva la componente  $y$  de la cantidad de movimiento del disco  $A$ , esto implica que la componente  $y$  de la velocidad  $A$  no cambia. Un análisis semejante prueba que la componente  $y$  de la velocidad de  $B$  no cambia durante el choque. La velocidad final de  $A$  es:

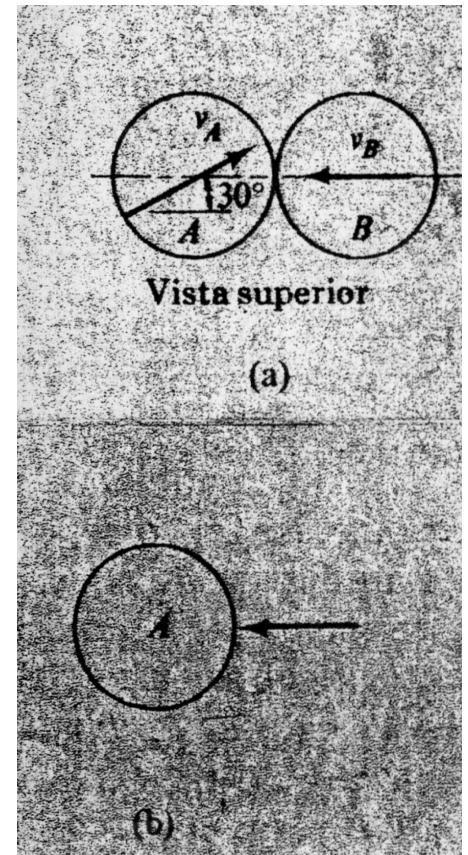


Figura 3.51

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

$$\mathbf{v}_{Af} = -9.41 \hat{i} + 0.5(l^2) \hat{j} \left( \frac{m}{s} \right)$$

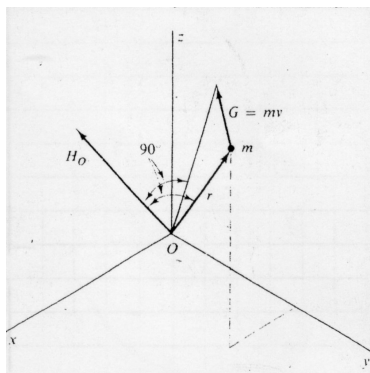
$$\mathbf{v}_{Af} = 11.16 \frac{m}{s} \text{ con un ángulo } \angle 32.5^\circ \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \end{matrix}$$

Y la velocidad final de **B** es:

$$\mathbf{v}_{Bf} = 4.81 \hat{i}, \quad \mathbf{v}_{Bf_x} = 4.81 \frac{m}{s} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \end{matrix}$$

### 3.15. Cantidad de Movimiento Angular

La cantidad de movimiento (*momentum*) lineal  $\mathbf{G}$  de una partícula teniendo una masa  $m$  y una velocidad  $\mathbf{v}$  es  $\mathbf{G} = m \mathbf{v}$ .



**Figura 3.52**

El vector  $\mathbf{G}$  está localizado en la partícula, como se muestra en la figura 3.52. Considere que el punto fijo  $O$  es el origen del sistema de referencia inicial  $Oxyz$ .

La cantidad de movimiento angular de la partícula calculada con respecto al punto  $O$  es el momento de la cantidad de movimiento lineal calculado con respecto al punto fijo  $O$ . La cantidad de movimiento angular,  $\mathbf{H}_O$ , se expresa como:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} \quad (3.43)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector que define la posición de la partícula con respecto a  $O$ . El vector correspondiente a la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_O$  es perpendicular al plano definido por el vector de posición  $\mathbf{r}$ , y el vector de velocidad  $\mathbf{v}$  como se muestra en la figura 3.52.

Derivando la ecuación 3.43 con respecto al tiempo se obtiene el cambio por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento angular, esto es:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m \mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{v}}$$

o

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{v} \times m \mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \mathbf{a}$$

El primer término del lado derecho de la igualdad es cero ( $\mathbf{v} \times m \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), y el 2do. Término es lo mismo como  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Por lo que el índice de variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular puede expresarse como:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O \quad (3.44)$$

donde  $\mathbf{M}_O$  es el momento con respecto a  $O$  de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. La ecuación (3.44) es una ecuación vectorial que puede descomponerse en las ecuaciones escalares siguientes:

$$\dot{H}_x = M_x, \quad \dot{H}_y = M_y, \quad \dot{H}_z = M_z \quad (3.44a)$$

donde  $H_x, H_y, H_z$  y  $M_x, M_y, M_z$  son las cantidades de movimiento angular y los momentos de la fuerza resultante, respectivamente, calculados con respecto a los ejes fijos  $x, y, z$ .

Las ecuaciones (3.44) y (3.44a) son la forma matemática *del principio de la cantidad de movimiento angular aplicado a partículas, este principio postula que el índice de variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular de una partícula referida a un punto fijo  $O$  (o al eje fijo) es igual al momento con respecto al punto  $O$  (o al eje fijo) de la fuerza resultante actuando sobre la partícula.*

La ecuación (3.44) es integrable cuando  $\mathbf{M}_O$  puede expresarse como una función del tiempo en un sistema de referencia inercial; integrándola desde el tiempo inicial  $t_i$  hasta el tiempo final  $t_f$  se obtiene:

$$\Delta \mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_f - (\mathbf{H}_O)_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{M}_O dt \quad (3.45)$$



**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

donde  $\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{M}_O dt$  es el *impulso angular* (Con respecto a O)

de la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. La ecuación (3.45) es la expresión matemática del *principio del impulso angular y la cantidad de movimiento angular aplicado a una partícula, el principio establece que durante el intervalo de tiempo comprendido entre  $t_i$  y  $t_f$ , la variación en la cantidad de movimiento angular respecto a cualquier punto fijo O es igual al impulso angular respecto al punto O actuando sobre la partícula*. La ecuación (3.45) puede resolverse en tres ecuaciones escalares igual a lo ocurrido a la ecuación (3.44).

### 3.16. Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular

Si  $\mathbf{M}_O$  es nulo, la ecuación (3.44) se convierte:

$$\mathbf{H}_O = 0$$

$\mathbf{H}_O$  debe ser constante durante el intervalo en el cual  $\mathbf{M}_O$  es nulo, luego

$$(\mathbf{H}_O)_f = (\mathbf{H}_O)_i$$

*El principio de conservación de la cantidad de movimiento angular de una partícula establece que si el momento respecto a un punto fijo O de la fuerza resultante actuando sobre una partícula es cero, la cantidad de movimiento angular de la partícula se conserva.*

La ecuación (3.44) es una ecuación vectorial y no obstante que el momento total  $\mathbf{M}_O$  puede no ser igual a cero, frecuentemente ocurre que una componente de  $\mathbf{M}_O$  respecto a un eje que pase por O sea igual a cero. En este caso la cantidad de movimiento angular total  $\mathbf{H}_O$  no se conserva, pero la componente de  $\mathbf{H}_O$  en la dirección de la componente del momento nulo si lo hace.

### Ejemplo demostrativo del principio de cantidad de movimiento angular y su conservación.

Ejemplo demostrativo 3.11. La masa  $m$  en la figura 3.53 puede deslizarse a lo largo del brazo  $OA$ , la cual esta sujeta a una flecha rotando libremente respecto al eje  $z$  a una rapidez angular  $\omega$ , cuando  $R=R_1$ . La masa esta restringida por una cuerda o cable que va sobre un pasador liso en  $\theta$  y baja a través de la flecha a un punto donde la fuerza  $f$  es aplicada. Si el cable es jalado hasta  $R=R_2$  ( $R_1 = 4R_2$ ), ¿Cuál será el valor  $\omega_2$  ( $\omega$ ) en la nueva posición? Despreciar la masa del brazo y flecha y el rozamiento en los rodamientos que soporten la flecha. (rapidez angular  $\omega = \dot{\Phi}$ )

*Solución:* Para  $R$  establecido

$$\mathbf{v} = \omega R \hat{e}_\phi$$

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \omega m R^2 \hat{\mathbf{k}}$$

donde  $\hat{e}_\phi$  es un vector unitario en la dirección del incremento del ángulo  $\Phi$ , tangente a la trayectoria circular del radio  $R$ . Cuando el cable es jalado las fuerzas actúan solamente sobre el sistema (consistente de la masa  $m$ , brazo y flecha) son las fuerzas  $f$  y las reacciones en los rodamientos, los cuales no tienen componente del momento respecto al eje  $z$  de la flecha, por lo que de acuerdo al principio de impulso-cantidad de movimiento angular ecuación (3.44)

$$\dot{H}_O = M_O$$

como  $M_{Oz} = 0 \Rightarrow H = M_O = 0$

y de acuerdo a la ecuación (3.45)

$$\Delta H_O = (H_O)_f - (H_O)_i = 0$$

$$\therefore (H_O)_f = (H_O)_i$$

$$\omega_2 m R_2^2 = \omega_1 m R_1^2$$

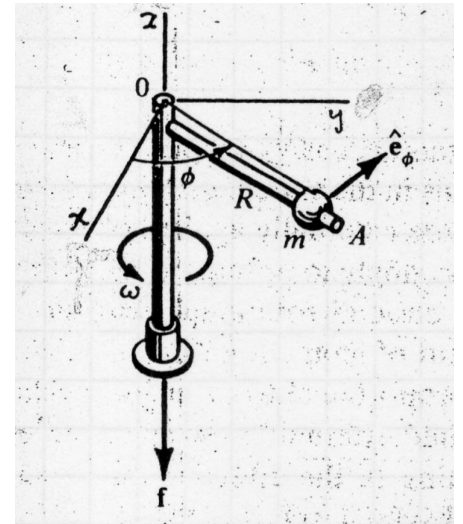


Figura 3.53

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

$$\therefore \omega_2 = \omega_1 \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) = 16\omega_1 \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

### 3.17. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

Los ejemplos de discusión y ejercicios de trabajo de aplicación de los principios del impulso y cantidad de movimiento (lineal y angular) que requieren para su solución métodos relativos a la conservación tanto de la cantidad de movimiento lineal o angular como de la conservación de la energía cinética se contemplan en la sección o tema 3.19. En esta sección se contemplan ejemplos y ejercicios donde únicamente se tengan fuerzas impulsivas.

#### *Ejemplos de discusión*

**Ejemplo 3.11.** Una partícula de masa  $45\text{kg}$  moviéndose a rapidez de  $1.5\text{m/s}$  en la dirección positiva del eje  $x$ . Una fuerza  $(9\hat{i} - 13.5\hat{j})\text{N}$  se aplica a ésta por dos segundos. ¿Cuál es su velocidad al final del intervalo de  $2\text{s}$ ?

*Solución:* El impulso lineal de la fuerza es:

$$\mathbf{J} = \int (9\hat{i} - 13.5\hat{j}) dt = 18\hat{i} - 27\hat{j} (\text{Ns})$$

La cantidad de movimiento lineal inicial es:

$$(m\mathbf{v})_1|_{t=0} = (45)(1.5) = 67.5\hat{i} (\text{Ns})$$

La variación de cantidad de movimiento lineal es:

$$mv_2 - mv_1$$

$$(m\mathbf{v}_2)|_{t=2} - (m\mathbf{v}_1)|_{t=0} = 45v_2|_{t=2} - 67.5\hat{i}$$

Por el principio de impulso lineal-*momentum*,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= 18\hat{\mathbf{i}} - 27\hat{\mathbf{j}} = \Delta m\mathbf{v} = 45v_2|_{t=2} - 67.5\hat{\mathbf{i}}, \\ \therefore v_2|_{t=2} &= \frac{18+67.5}{45}\hat{\mathbf{i}} - \frac{27}{45}\hat{\mathbf{j}} = (1.9\hat{\mathbf{i}} - 0.6\hat{\mathbf{j}})m/s \\ v_2|_{t=2} &= 1.99 \approx 2m/s \quad \angle 16.8^\circ \quad \leftarrow \end{aligned}$$

Ejemplo 3.12. En 3 segundos una partícula de masa 7.5kg cambia su velocidad de:

$$[-100\hat{\mathbf{i}} + 150\hat{\mathbf{j}} - 50\hat{\mathbf{k}}](mm/s) \quad \text{a} \quad [-50\hat{\mathbf{j}} + 25\hat{\mathbf{k}}](mm/s)$$

¿Qué fuerza promedio producirá este cambio?

*Solución:* El cambio en el *momentum* lineal es:

$$\begin{aligned} \Delta(m\mathbf{v}) &= 7.5(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = 7.5[(-50\hat{\mathbf{j}} + 25\hat{\mathbf{k}}) - (-100\hat{\mathbf{i}} + 150\hat{\mathbf{j}} - 50\hat{\mathbf{k}})] \\ &= 7.5(100\hat{\mathbf{i}} - 200\hat{\mathbf{j}} + 75\hat{\mathbf{k}})10^{-3}(Ns) \end{aligned}$$

El impulso total en 3 segundos se igualará a este cambio de *momentum* lineal. Definiéndose la fuerza promedio como:

$$F_{prom.} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt = \frac{\mathbf{J}(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1};$$

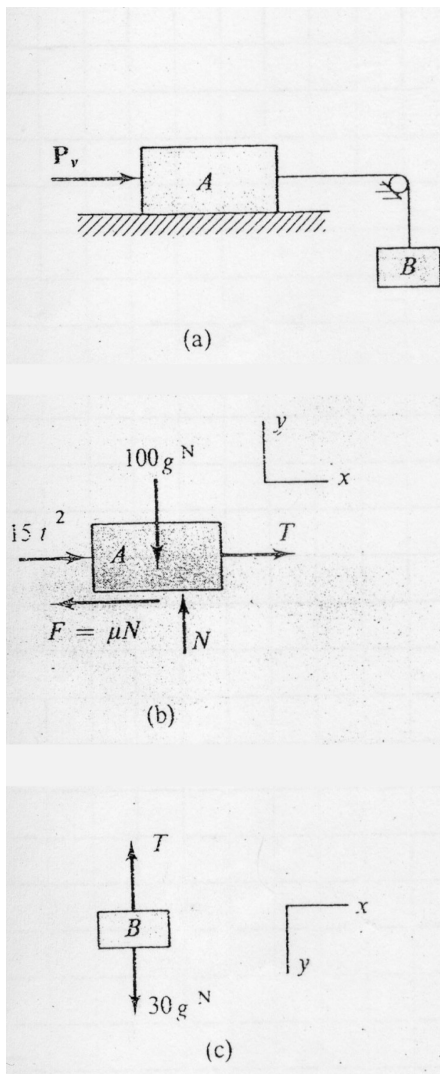
Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{prom.} &= \frac{1}{3}[7.5(100\hat{\mathbf{i}} - 200\hat{\mathbf{j}} + 75\hat{\mathbf{k}})10^{-3}]N \\ &= 2.5(0.100\hat{\mathbf{i}} - 0.200\hat{\mathbf{j}} + 0.075\hat{\mathbf{k}})N \\ &= (0.250\hat{\mathbf{i}} - 0.500\hat{\mathbf{j}} + 0.1875\hat{\mathbf{k}}) \\ F_{prom.} &= 0.589N \approx 0.6N \end{aligned}$$

Ejemplo 3.13. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo A de 100kg representado en la figura 3.54(a) y el plano horizontal es 0.40. La masa del cuerpo B es 30kg. La magnitud de la fuerza variable  $P_v$  es dada por la ecuación

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

$P_v = 15t^2$ , donde  $P_v$  esta en *Newtons* y  $t$  esta en segundos. Cuando  $t = 0$  la velocidad de  $A$  es  $2.0 \text{ m/s}$  hacia la derecha. Determine la velocidad de  $A$  cuando  $t = 5\text{s}$ .



**Figura 3.54**

*Solución:* Los *dcl* de  $A$  y  $B$  son mostrados en las figuras 3.54(b) y (c). Las magnitudes de las velocidades de  $A$  y  $B$  son las mismas, y sus velocidades finales son  $v_{Af} = v_f \hat{i}$  y  $v_{Bf} = v_f \hat{j}$ . Se tienen tres cantidades desconocidas,  $N$ ,  $T$  y  $V_f$ , y se cuenta con dos ecuaciones de las componentes del impulso lineal y del *momentum* lineal para el cuerpo  $A$  y otra ecuación escalar correspondiente al cuerpo  $B$ . Para el cuerpo  $A$  la ecuación escalar en la dirección  $y$  es:

$$J_y = m_A (v_{Ayf} - v_{Ayi})$$

Es decir:

$$\int_0^5 (N - 100g) dt = 100(0 - 0) \Rightarrow N = 981(N)$$

Para el cuerpo  $A$  la ecuación escalar en la dirección de  $x$  es:

$$J_x = m_A (v_{Axf} - v_{Axi}),$$

$$\int (15t^2 + T - \mu N) dt = 100(v_f - 2.0),$$

$$5t^3 \Big|_0^5 + \int_0^5 T dt - 0.4(981)t \Big|_0^5 = 100(v_f - 2.0),$$

quedando:

$$\int T dt - 1.337 = 100(v_f - 2.0) \quad (a)$$

La ecuación del impulso y cantidad de movimiento lineal para el cuerpo  $B$  es:

$$J_y = m_B (v_{Bf} - v_{Bi})$$

$$\int (30g - T) dt = 30(v_{Bf} - 2.0)$$

La cual se reduce a:

$$1.472 - \int T dt = 30(v_f - 2.0) \quad (b)$$

Resolviendo las ecuaciones simultaneas (a) y (b) se tiene:

$$\mathbf{v}_f = 3.038 \frac{m}{s}, \quad \mathbf{v}_f = 3.038 \hat{\mathbf{l}} \quad \leftarrow$$

La tensión  $T$  es variable, y esta solución no proporciona un valor específico de  $T$ .

**Ejemplo 3.14.** Una masa puntual de  $0.5 \text{ kg}$  lleva una velocidad  $v = 10 \text{ m/s}$  dirigida según el eje  $x$  en el instante  $t = 0$ . Sobre esta partícula se ejercen las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  cuyas intensidades varían en el tiempo según se indica en la gráfica adjunta. Determinar la velocidad final  $\mathbf{v}$  de la partícula al cabo de 3 segundos.

**Solución :** Al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal en forma de componentes (ecuaciones escalares). Se obtiene para las direcciones  $x$ ,  $y$  respectivamente la figura 3.55.

$$\left[ \int \sum F_x dt = m \Delta v_x \right]; \quad -[4(1) + 2(3-1)] = 0.5(v_{xf} - 10)$$

$$\therefore v_{xf} = -6 \frac{m}{s}$$

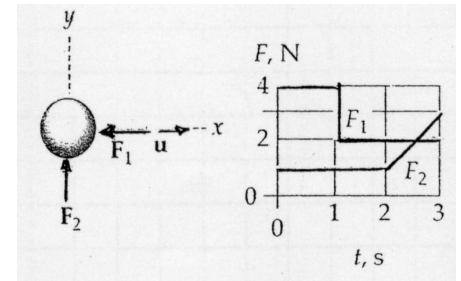
$$\left[ \int \sum F_y dt = m \Delta v_y \right]; \quad [1(2) + 2(3-2)] = 0.5(v_y - 0)$$

$$\therefore v_y = 8 \frac{m}{s}$$

Por lo que:

$$\mathbf{v} = -6 \hat{\mathbf{l}} + 8 \hat{\mathbf{j}} \frac{m}{s} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \frac{m}{s}$$

$$\theta_x = \text{tg}^{-1} \left( \frac{8}{-6} \right) = 126.9^\circ$$



**Figura 3.55**

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento

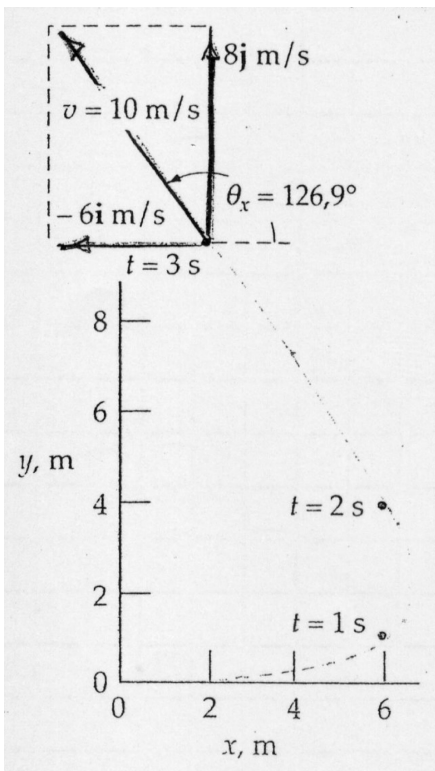


Figura 3.56

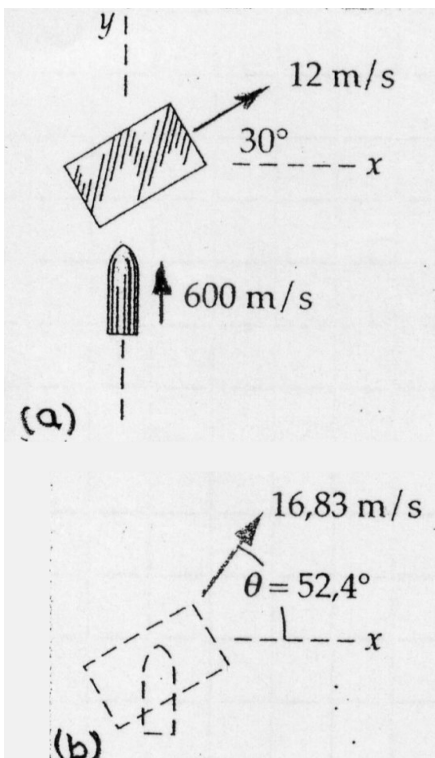


Figura 3.57

En la figura 3.56 se representa la velocidad para  $t = 3s$  junto con sus componentes, incluyendo la trayectoria de la masa puntual durante los tres primeros segundos.

**Ejemplo 3.15.** La figura 3.57(a) muestra una bala de 50g, que se desplaza a 600 m/s para chocar centralmente con el bloque de 4 kg y se incrusta en él. Si el bloque se deslizaba, sobre un plano horizontal liso, con una rapidez de 12m/s, en la dirección que se indica justo antes del impacto, determinar la velocidad  $v$  del bloque y la bala inmediatamente después del impacto.

*Solución:* Como la fuerza del impacto es interna al sistema compuesto por el bloque y la bala, y no hay fuerzas exteriores que actúen sobre el sistema en el plano del movimiento, se deduce que la cantidad de movimiento del sistema se conserva en las direcciones  $x$ - $y$ . Por lo tanto,

$$[\sum \mathbf{G} = 0] \Rightarrow \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2; \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}$$

donde según datos  $m_1 = 0.050 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 600 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$ ,  
 $m_2 = 4 \text{ kg}$ ,  $v_2 = 12 \cos 30^\circ \hat{i} + 12 \sin 30^\circ \hat{j}$

Por lo que sustituyendo valores en la ecuación vectorial de conservación de la cantidad de movimiento exterior,

$$0.050(600) \hat{j} + 4(12)(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) = (4 + 0.050) \mathbf{v}$$

$$\therefore \mathbf{v} = 10.26 \hat{i} + 13.33 \hat{j} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \leftarrow$$

La rapidez final y su dirección son:

$$[v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}]; \quad v = \sqrt{(10.26)^2 + (13.33)^2} = 16.83 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \leftarrow$$

$$\left[ \tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \right]; \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{13.33}{10.26} \right) = 52.4^\circ \quad \leftarrow$$

**Ejemplo 3.16.** La partícula esférica 1 lleva una velocidad de  $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  en la dirección indicada y choca

con la partícula esférica 2, de igual masa y diámetro, que se haya inicialmente en reposo. Si en estas condiciones el coeficiente de restitución  $e$  es 0.6, determinar la velocidad de cada esfera inmediatamente después del choque, (ver figura 3.58(a)).

*Solución:* Durante el contacto la geometría indica que la normal  $n$  a las superficies en contacto forma un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con la dirección de  $v_1$ , tal como se indica en la figura 3.58(b). Así, las componentes iniciales de las velocidades serán:  $(v_1)_n = v_1 \cos 30^\circ = 6 \cos 30^\circ =$

$$5.196 \text{ m/s} \quad (v_1)_t = v_1 \sin 30^\circ = 6 \text{ m/s} \sin 30^\circ = 3 \text{ m/s} \quad \text{y}$$

$$(v_2)_n = (v_2)_t = 0$$

La conservación de la cantidad de movimiento lineal del sistema de dos partículas en la dirección  $\eta$ , nos da:

$$m_1(v_1)_\eta + m_2(v_2)_\eta = m_1(v'_1)_\eta + m_2(v'_2)_\eta$$

O sea como  $m_1 = m_2$

$$5.196 + 0 = (v'_1)_\eta + (v'_2)_\eta \quad (a)$$

La expresión del coeficiente de restitución es:

$$e = \frac{(v'_2)_\eta - (v'_1)_\eta}{(v_1)_\eta - (v_2)_\eta}; \quad 0.6 = \frac{(v'_2)_\eta - (v'_1)_\eta}{5.196 - 0} \quad (b)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (a) y (b) resulta:

$$(v'_1)_\eta = 1.039 \text{ m/s}; \quad (v'_2)_\eta = 4.16 \text{ m/s}$$

Con la suposición de que las superficies son lisas, no hay fuerzas en la dirección  $t$ , por lo que, en esa dirección se conservan las cantidades de movimiento de partículas. Por lo que para las partículas 1 y 2 se tiene:

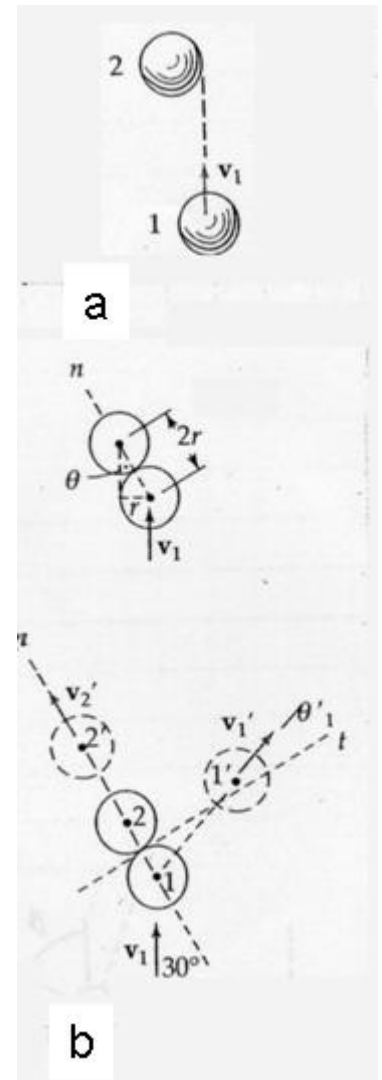


Figura 3.58



**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

$$m_1(v_1)_t = m_1(v'_1)_t; \quad (v'_1)_t = (v_1)_t = 3 \text{ m/s}$$

$$m_2(v_2)_t = m_2(v'_2)_t; \quad (v'_2)_t = (v_2)_t = 0$$

Las velocidades finales inmediatamente después del choque son:

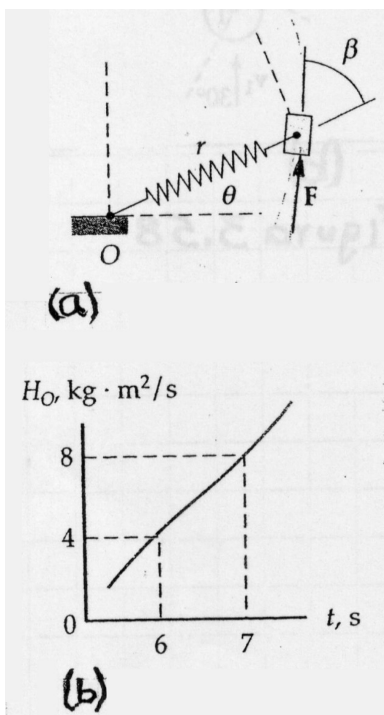
$$v'_1 = 1.039e_\eta + 3e_t \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$v'_1 = \sqrt{[(1.039)^2 + 3^2]} = 3.17 \text{ m/s} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$v'_2 = 4.16e_\eta \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right); \quad v'_2 = 4.16 \text{ m/s} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

En el ángulo  $\theta'$  que  $v'_1$  forma con la dirección  $t$  es:

$$\theta' = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{(v'_1)_\eta}{(v'_1)_t} \right] = \text{tg}^{-1} \left[ \left( \frac{1.039}{3} \right) \right] = 19.1^\circ \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$



**Figura 3.59**

**Ejemplo 3.17.** El pequeño bloque de 2kg se desliza por una superficie horizontal lisa bajo las acciones de la fuerza del resorte y una fuerza  $F$ , figura 3.59(a). La cantidad de movimiento angular (*momentum* angular) del bloque respecto a O varía con el tiempo tal como se muestra en la gráfica de la figura 3.59(b). Para  $t = 6.55$ , se sabe que  $r = 15 \text{ cm}$  y  $\beta = 60^\circ$ . Hallar  $F$  en ese instante.

**Solución :** El único momento de las fuerzas respecto a O es el debido a  $F$  ya que la fuerza del resorte pasa por O. Así,  $\sum M_O = rF \text{sen} \theta$ . Según la gráfica de la figura 3.54(b), la variación de  $H_O$  por unidad de tiempo para  $t=6.5\text{s}$  es muy aproximadamente  $(8-4)/(7-6)$ , o sea

$$H_o = 4 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Por lo tanto de acuerdo a la ecuación (3.43)

$$[\dot{H}_O = M_O]; \quad F(0.150) \text{sen} 60^\circ = 4 \Rightarrow F = 30.8 \text{ N} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Ejemplo 3.18. La masa de un péndulo simple es  $m$  estando soportada por una cuerda de longitud  $L$ , el péndulo oscila contenido en un plano vertical. Utilice el principio de la cantidad de movimiento angular para definir la ecuación diferencial que describe el movimiento.

*Solución:* El *dcl* de la masa oscilando en el plano  $xz$  se muestra en la figura 3.60. El momento de la fuerza de tensión con respecto a  $O$  es cero; por tanto, el momento resultante con respecto al punto  $O$  de todas las fuerzas respecto a  $O$  es el momento del peso, esto es:

$$\mathbf{M}_O = -mgL \text{sen} \theta \hat{j}$$

La magnitud de la cantidad de movimiento lineal de la masa del péndulo es  $mL\dot{\theta}$ , la cantidad de movimiento angular es el momento de la cantidad de movimiento lineal; entonces:

$$H_O = L \left( mL\dot{\theta} \right) \hat{j}$$

Cuando  $H_O$  se deriva con respecto al tiempo, el principio de cantidad de movimiento angular nos da:

$$mL^2 \ddot{\theta} \hat{j} = -mgL \text{sen} \theta \hat{j}$$

o

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \text{sen} \theta = 0 \quad \leftarrow r$$

Ejemplo 3.19. Para un cuerpo que rota respecto a un eje fijo  $z$  que pasa por  $O$ , perpendicular al plano  $x$ - $y$ , demostrar que la suma de los impulsos angulares de las fuerzas externas respecto al eje fijo es igual a la variación de  $I_O \omega$ , donde  $I_O \omega$  es el momento angular  $H_O$  de todo el cuerpo.

*Solución:* De la figura 3.61 vemos que el momento del *momentum* o sea la cantidad de movimiento angular respecto al eje  $z$  de una partícula  $i$  del cuerpo la cual se mueve en una trayectoria circular,

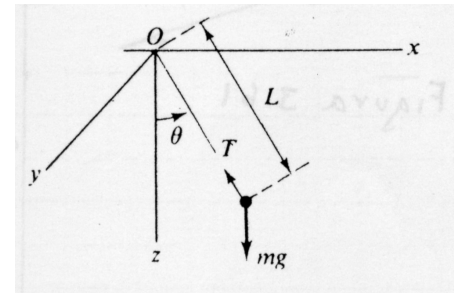


Figura 3.60

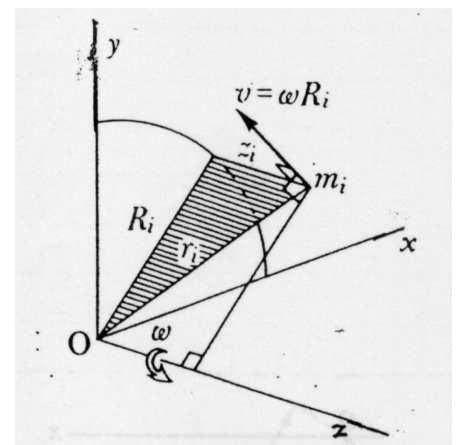


Figura 3.61

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

de radio  $R_i$ , respecto al eje  $z$  es:

$$\delta H_O = R_i(m_i \omega R_i)$$

Para un cuerpo rígido rotando respecto al eje  $z$  con velocidad angular  $\omega$ , el momento total del *momentum* (cantidad del movimiento angular total) es:

$$\begin{aligned} H_O &= \sum R_i(m_i \omega R_i) \\ &= \omega \sum m_i R_i^2 \end{aligned}$$

ya que  $\sum m_i R_i^2$  es  $I_O$ , el momento de inercia del cuerpo respecto al eje  $z$  pasando por  $O$ , el momento del *momentum* total es:

$$H_O = I_O \omega$$

De la ecuación (3.43) para un cuerpo rígido en general.

$$\sum M_O = \dot{H}_O = \frac{dH_O}{dt} = \frac{d(I_O \omega)}{dt} \hat{k}$$

Como los momentos de las fuerzas y  $\omega$  están en la dirección de  $\hat{k}$ , la ecuación anterior puede escribirse en forma escalar.

$$\sum M_O = \frac{dH_O}{dt} = \frac{d(I_O \omega)}{dt}$$

Cuando se integra esta expresión se tiene:

$$\int_1^2 (\sum M_O dt) = \Delta H_O = I_O (\omega_2 - \omega_1) \quad \leftarrow (3.44')$$

Donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las celeridades angulares inicial y final

$$\int_1^2 (\sum M_O dt) = \sum (\text{impulsos angulares})_O$$

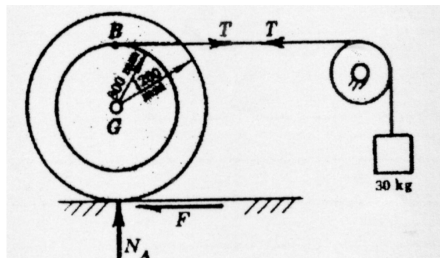


Figura 3.62

**Ejemplo 3.20.** En la figura 3.62, la rueda de  $75\text{kg}$  tiene un radio de giro respecto a  $G$  de  $900\text{mm}$  e inicialmente rueda en sentido antihorario a  $10\text{rad/s}$  ¿Cuánto tiempo le tomará hasta que este rotando a  $6\text{rad/s}$  en sentido horario? La masa de la polea es despreciable y ésta gira sobre

rodamientos sin rozamiento.

*Solución:* En el diagrama de cuerpo libre (*dcl*), la fuerza de rozamiento se supone actuando hacia la izquierda. Por las relaciones cinemáticas la velocidad inicial de G es de acuerdo a los datos y al sistema de coordenadas elegido:

$\mathbf{v}_{G_1} = \omega_1 \hat{\mathbf{k}} \times r_{AG} \hat{\mathbf{j}} = 10(1.2)(-\hat{\mathbf{i}}) = -12\hat{\mathbf{i}} \left(\frac{m}{s}\right)$ , es decir, hacia la izquierda y su velocidad final es:  
 $\mathbf{v}_{G_2} = \omega_2 \hat{\mathbf{k}} \times r_{AG} \hat{\mathbf{j}} = \omega_2 r_{AG} \hat{\mathbf{i}}; \quad \mathbf{v}_{G_2} = (6)(1.2)\hat{\mathbf{i}} = 7.2\hat{\mathbf{i}} \frac{m}{s}$   
hacia la derecha.

Para hallar las velocidades del bloque de 30kg de masa, se determina la velocidad inicial y final del punto B de la rueda:  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B/G} + \mathbf{v}_G$ . Por tanto la velocidad inicial de B

es:  $\mathbf{v}_{B_1} = \omega_1 \hat{\mathbf{k}} \times r_{GB} \hat{\mathbf{j}} - 12\hat{\mathbf{i}} \quad \mathbf{v}_{B_1} = -10(0.8)\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{i}} = -20\hat{\mathbf{i}} \left(\frac{m}{s}\right)$   
y la velocidad lineal de B:

$\mathbf{v}_{B_2} = -\omega_2 \hat{\mathbf{k}} \times r_{GB} \hat{\mathbf{j}} + 7.2\hat{\mathbf{i}} = +6(0.8)\hat{\mathbf{i}} + 7.2\hat{\mathbf{i}} \Rightarrow \mathbf{v}_{B_2} = 12\hat{\mathbf{i}} \frac{m}{s}$  para el bloque  $\mathbf{v}_{B_1} = 20\hat{\mathbf{i}}$  y  $\mathbf{v}_{B_2} = 12\hat{\mathbf{i}}$  de acuerdo al sistema de coordenadas  $x, y, z$ .

Por consiguiente de acuerdo a las relaciones entre impulsos y cantidad de movimiento lineal y angular en sus ecuaciones escalares.

$$\sum (Imp)_x = \Delta G_x, \text{ o sea, } \int_{t_1=0}^{t_2=t} R_x dt = M(v_{Gx_2} - v_{Gx_1})$$

$$\sum (Imp \text{ Ang})_G = \Delta H_G, \text{ o sea,}$$

$$\int_{t_1=0}^{t_2=t} \sum M_G dt = \Delta H_G = I_G(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\sum (Imp)_y = \Delta G_y, \text{ o sea, } \int_{t_1=0}^{t_2=t} R_y dt = M(v_{By_2} - v_{By_1})$$

Sustituyendo los valores conocidos, se tiene:

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

$$\int_{t_1=0}^{t_2=t} R_x dt = \Delta G_x \Rightarrow (T - f)t = 75[7.2 - (-12)] \quad (1)$$

$$\int_{t_1=0}^{t_2=t} (\sum M_G dt) = \Delta H_G \Rightarrow -(0.8T + 1.2T)t = 75(0.9)^2 [-6 - 10] \quad (2)$$

Debido a que  $I_G = MK^2 = 75(0.9)^2$  – ecuación (3.30) y para el bloque de 30kg de masa:

$$\int_{t_1=0}^{t_2=t} R_y dt = \Delta G_y \Rightarrow (T - 9.81| \times 30)t = 30(-12 - 20) \quad (3)$$

Simplificando las ecuaciones (1), (2) y (3)

$$Tt - Ft = 1440 \text{ (Ns)} \quad (1')$$

$$-0.8Tt - 1.2Ft = -972 \text{ (Ns)} \quad (2')$$

$$-Tt - 294.3 t = -960 \text{ (Ns)} \quad (3')$$

multiplicado por  $\left(-\frac{1}{1.2}\right)$  ambos miembros de la ecuación (2') y por (-1) con los miembros de la ecuación (3') se tiene:

$$Tt - Ft = 1440 \text{ (Ns)} \quad (1'')$$

$$\frac{2}{3} Tt + Ft = 810 \text{ (Ns)} \quad (2'')$$

$$-Tt + 294.3 t = 960 \text{ (Ns)} \quad (3'')$$

sumando (1'') y (2'') y despejando  $Tt$  y después sustituir este valor en (3'') nos da:

$$\frac{5}{3} Tt = 2250 \Rightarrow Tt = 1350 \text{ (Ns)}$$

de (3')

$$t = \frac{960 + 1350}{294.3} = 7.849s \approx 7.85s \quad \leftarrow r$$

**Ejercicios de Trabajo**

- 3.27. Un bloque de  $1.5\text{kg}$  se pone en movimiento sobre un plano horizontal liso bajo la acción de una fuerza horizontal  $F$  que varía de acuerdo con la expresión  $F = 3t - 5t^2$ . Hallar la velocidad máxima.
- 3.28. Partiendo del reposo, un bloque de  $10\text{kg}$  desciende por un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal. Suponiendo un coeficiente de rozamiento cinético de  $0.3$  entre el bloque y el plano. ¿Cuál es la rapidez del bloque al cabo de  $5\text{s}$ ?
- 3.29. El cuerpo  $A$  de  $120\text{kg}$ , Figura 3.63, se conecta al cuerpo  $B$  de  $40\text{kg}$  mediante un alambre flexible. Los coeficientes de rozamiento son  $0.20$  entre  $A$  y el plano y  $0.25$  entre  $B$  y el plano. Calcule la velocidad del cuerpo  $A$ ,  $3\text{s}$  después de iniciado el movimiento a partir del reposo.
- 3.30. Un proyectil es disparado por un cañón a  $600\text{ m/s}$  con un ángulo de  $30^\circ$  respecto a la horizontal. Si la masa del proyectil es  $10\text{kg}$  y la velocidad de retroceso (velocidad reculada) del cañón es limitada a  $1.2\text{ m/s}$ , calcular la masa mínima requerida del cañón.
- 3.31. Un furgón  $A$  de ferrocarril de masa  $30\text{ toneladas}$  viajando a  $36\text{ km/hora}$  en una vía a nivel, colisiona con otro furgón  $B$  de masa  $10\text{ toneladas}$  viajando a  $18\text{ km/hora}$  en la misma vía pero en dirección opuesta.

Si el furgón  $A$  se mueve en la misma dirección inicial con una velocidad de  $14.4\text{ km/hora}$  después de la colisión, encontrar la velocidad del furgón  $B$ .

- 3.32. Las masas de los cuerpos  $A$  y  $B$ , figura 3.64, son  $4\text{kg}$  y  $2\text{kg}$  respectivamente, los cuerpos están interconectados por una cuerda que pasa por poleas lisas en  $A$  y  $C$ . El coeficiente de rozamiento

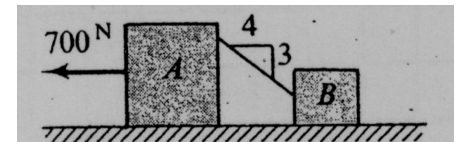


Figura 3.63

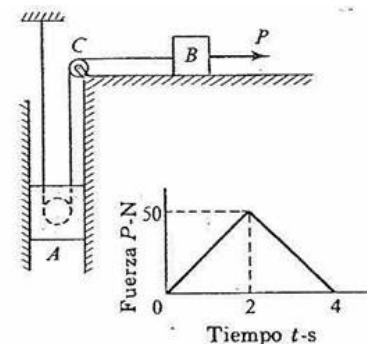


Figura 3.64

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Impulso – Cantidad de Movimiento**

entre  $B$  y el plano horizontal es  $0.20$ . La magnitud de la fuerza  $P$  varía como se indica en la gráfica  $P-t$ . Para  $t = 0$  la velocidad de  $B$  es  $10\text{m/s}$  a la derecha.

a). ¿La velocidad del cuerpo  $B$  alcanza un valor de cero durante el intervalo  $0 < t < 4\text{s}$ ?

b). determine la velocidad de  $B$  cuando  $t = 4\text{s}$ .

*sugerencia:* para el inciso (a), la velocidad mínima se alcanza para  $a = 0$  y con el uso de la gráfica  $P-t$  se puede determinar al tiempo en que se alcanza.

3.33. Dos cuerpos que se mueven sobre un plano horizontal chocan, el impacto es central directo. Antes del impacto, la velocidad del cuerpo  $A$  de  $40\text{kg}$  es  $20\text{m/s}$  dirigida hacia la derecha y la velocidad del cuerpo  $B$  de  $20\text{kg}$  es  $10\text{m/s}$  hacia la izquierda. El coeficiente de restitución es  $0.6$ . Calcule:

a). La velocidad de cada cuerpo después del impacto.

b). El valor promedio con respecto al tiempo de la fuerza que el cuerpo  $A$  ejerce sobre el cuerpo  $B$ ; si el tiempo de contacto durante el impacto es  $0.05\text{s}$ .

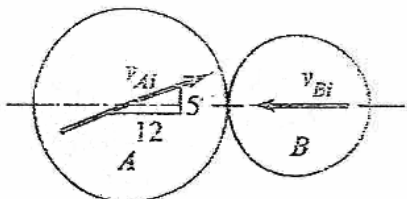


Figura 3.65

3.34. Las masas de los discos  $A$  y  $B$  en la figura 3.65 son de  $15\text{kg}$  y  $10\text{kg}$  respectivamente. Los discos se deslizan en un plano horizontal liso. Justamente antes de la colisión central oblicua, las velocidades de  $A$  y  $B$  son de  $780$  y  $400\text{mm/s}$ , como se muestra, las superficies de contacto son lisas y el coeficiente de restitución es  $0.4$ . Determine la velocidad de  $A$  después del impacto.

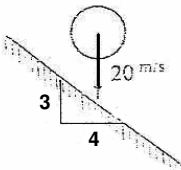


Figura 3.66

3.35. Una bola rebota sobre un plano inclinado liso, figura 3.66 la velocidad de la bola antes de chocar con el plano inclinado es de  $20\text{m/s}$  hacia abajo, el coeficiente de restitución es  $0.8$ . Calcule la velocidad de la bola inmediatamente después del impacto.

3.36. Calcule con respecto al origen  $O$  de un sistema de coordenadas fijo la cantidad de movimiento angular de una partícula de  $0.50\text{kg}$  cuando pasa por el punto  $(4\hat{i} + 10\hat{j} - 10\hat{k})\text{m}$  y su velocidad es  $(2\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k})\text{m/s}$

3.37. El péndulo de la figura 3.67 se compone de la masa  $m$  y la varilla delgada  $L$  de masa despreciable. Comprobar que la ecuación diferencial de su movimiento es  $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right)\text{sen}\theta = 0$ .

3.38. Las masas de las partículas  $A$  y  $B$  figura 3.68 son  $3m$  y  $m$ , respectivamente. Las partículas están unidas por una barra rígida cuya masa puede despreciarse. El conjunto gira contenido en el plano vertical  $xy$  alrededor de un eje horizontal que pasa por el punto  $O$ .

- (a). Calcule con respecto a  $O$  la cantidad de movimiento angular de las partículas.
- (b). Utilizando el principio de la cantidad de movimiento angular obtenga la ecuación diferencial que describe el movimiento.

3.39. Determinar la masa  $B$ , figura 3.69, para que la velocidad de la masa  $A$  de  $50\text{kg}$  varíe de  $4\text{m/s}$  a  $8\text{m/s}$  en  $6\text{s}$ . Asumir que el tambor de  $800\text{mm}$  de diámetro rota sin que haya rozamiento en los rodamientos de la flecha que los soporta.

3.40. Un volante de inercia de masa  $2000\text{kg}$  y radio de giro  $1200\text{mm}$  gira respecto a un centro fijo  $O$  desde el "reposo" hasta una rapidez de  $120\text{rpm}$  en  $200\text{s}$ . ¿Cuál es el momento  $M$  necesario?

3.41. Una cuerda de masa despreciable sostiene dos masas de  $5\text{kg}$  y  $7\text{kg}$ , figura 3.70, suspendidos de una polea con masa  $5\text{kg}$ , radio  $600\text{mm}$  y radio de

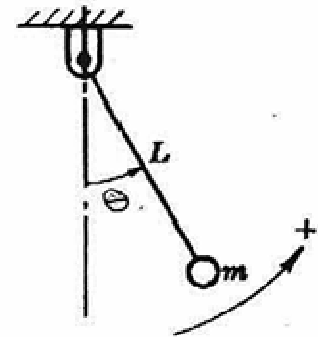


Figura 3.67

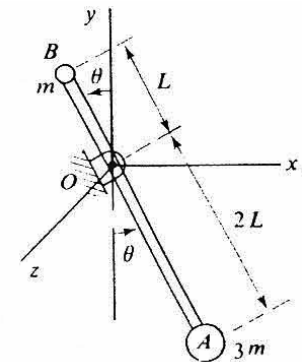


Figura 3.68

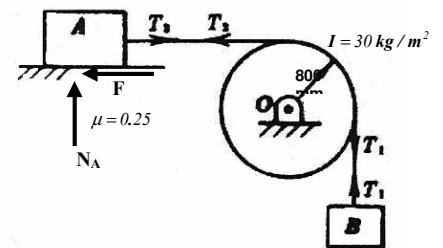


Figura 3.69

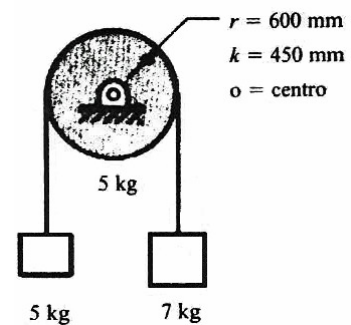


Figura 3.70



## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

giro 450mm ¿Cuánto tardan las velocidades de las masas en variar de 3 a 6 m/s.

### 3.18. Trabajo, Potencia y Energía

La solución de  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  es menos obvia que la solución de  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t)$ , cuando la fuerza es una función de la posición, no obstante algún avance es siempre posible; por lo que también es posible integrar la ecuación (3.16) con respecto al desplazamiento con la consideración de la ecuación (2.28) para la aceleración tangencial.  $F_t = m\left(\frac{dv}{dt}\right) = mv\left(\frac{dv}{ds}\right)$  dada por sus componentes en un sistema de coordenadas  $x, y, z$ , tenemos:

$$F_x = mv_x \frac{dv_x}{dx}, \quad F_y = mv_y \frac{dv_y}{dy}, \quad F_z = mv_z \frac{dv_z}{dz}$$

Cada ecuación puede ahora ser integrada, para dar:

$$\int F_x dx = \int mv_x dv_x = \frac{1}{2}mv_x^2 + constante$$

$$\int F_y dy = \int mv_y dv_y = \frac{1}{2}mv_y^2 + constante$$

$$\int F_z dz = \int mv_z dv_z = \frac{1}{2}mv_z^2 + constante$$

sumando estas tres ecuaciones,

$$\int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \frac{1}{2}mv^2 + constante \quad (3.46)$$

$$\text{donde } v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (3.47)$$

La integral en el lado izquierdo de la ecuación (3.46) se aprecia ser equivalente a  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  o a  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  ya que:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (d_x \hat{i} + d_y \hat{j} + d_z \hat{k}) \\ &= \int (F_x dx) + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

El término  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  es definido como el trabajo hecho por la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  cuando actúa sobre una partícula moviéndose a lo largo de una trayectoria dada, designándose por  $U$ . La definición demuestra que solamente la componente de la fuerza actuando a lo largo de la trayectoria realiza trabajo sobre la partícula; mientras que el término  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , se utiliza para definir el trabajo hecho por la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  cuando actúa sobre un sistema de partículas o cuerpo rígido; siendo; el elemento diferencial de la variación de los vectores de posición del centro de masa  $\mathbf{G}$  del sistema de partículas o cuerpo rígido. Por lo tanto:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}mv^2 + \text{constante}$$

o

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (3.48)$$

El término  $\frac{1}{2}mv^2$  se denomina Energía Cinética de la Partícula y se designa *e.c*; por consiguiente la ecuación 3.48 representa el *principio de Energía –Trabajo mecánico para una partícula* y se puede leer como:

***Trabajo hecho = variación de energía cinética***

Las dimensiones del trabajo son  $FL$ , así en el sistema  $SI$  las unidades son  $Nm=J$  (*joules*).

Las dimensiones de la energía cinética son  $ML^2T^{-2}$  y sus unidades en el sistema  $SI$  son:

$$kg \frac{m^2}{s^2} = \left( kg \frac{m}{s^2} \right) m = Nm = J, \text{ (Joule)}$$

obsérvese que el trabajo y la energía cinética son cantidades escalares.

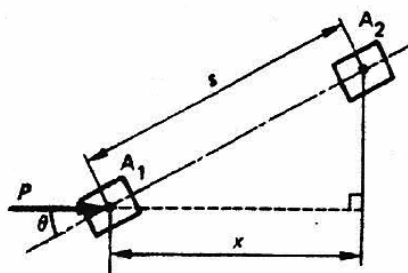


Figura 3.71

### Trabajo de una fuerza y de un par de fuerzas

*Trabajo de una fuerza.* El trabajo es hecho cuando una fuerza es aplicada a un cuerpo y desplaza el punto de aplicación en la dirección de la fuerza. Refiriéndose a la figura 3.71 y de acuerdo a la integral del primer miembro de la ecuación (3.48)

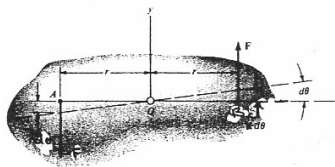
$$\int_{S_1=0}^{S_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1=0}^{S_2} P d s \cos \theta = P S \cos \theta = P x \quad (3.49)$$

Trabajo hecho = magnitud de la fuerza  $\times$  la distancia recorrida en la dirección de la fuerza  
 =  $Px$

Lo cual puede presentarse como:

Trabajo hecho =  $P \cos \theta \cdot s$ , para dar una definición alterna.

Trabajo hecho = Componente de la fuerza en la dirección del movimiento  $\times$  distancia recorrida.



3.72

Figura

*Trabajo de un par de fuerzas.* Considérese un cuerpo rígido arbitrario con las fuerzas  $F$  y  $-F$  actuando sobre él, en el plano  $x$ - $y$ , como se indica en la figura 3.72. Por conveniencia, se coloca el origen  $O$  de tal modo que la recta  $AB$  coincida con el eje  $x$  y el eje  $y$  pase por el punto medio de la distancia  $AB$ . Para cualquier movimiento de translación del cuerpo, el trabajo neto de las fuerza  $F$  y  $-F$  es, por deducción, cero. Sin embargo, en un desplazamiento angular  $d\theta$ , el trabajo del par de fuerzas es positivo por consiguiente el trabajo infinitesimal  $dU$  puede expresarse como:

$$\begin{aligned} dU &= dU_A + dU_B = -F(-r d\theta) + F(r d\theta) \\ &= F(2r)d\theta \Rightarrow dU = Cd\theta \end{aligned}$$

Donde  $C$  es la magnitud del momento del par de fuerzas. El trabajo  $U_{1-2}$  del par (momento del par de fuerzas) durante una rotación finita del cuerpo es la integral de esta última expresión, es decir:

$$U_{1-2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C d\theta \quad (3.50)$$

Esta ecuación 3.50 está limitada al caso común donde el vector momento  $C$  es perpendicular al plano del movimiento.

Las ecuaciones anteriores (3.49) y (3.50) para el trabajo de una fuerza o del momento de un par de fuerzas (par) son útiles para resolver muchos problemas. Existen varios casos especiales como son:

*Trabajo de una fuerza constante:* El trabajo  $U_{1-2}$  de la fuerza  $F$  constante al mover el cuerpo desde la posición  $S_1$  hasta la posición  $S_2$  puede expresarse de acuerdo a la ecuación.

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ como } U_{1-2} = F(\cos\theta)(S_2 - S_1) \quad (3.51)$$

*Trabajo de un par constante.* Cuando el momento de un par de fuerzas  $C$  es constante, la ecuación 3.50 toma la fuerza siguiente:

$$U_{1-2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C d\theta = C(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.52)$$

El cálculo del trabajo total se hace más simple por el hecho de que algunas de las fuerzas aplicadas no realizan trabajo. Como ejemplos, la fuerza de reacción normal en un cuerpo deslizándose en una superficie no realiza trabajo. La fuerza de tensión en un cable inextensible sujeto a un punto fijo así como también las reacciones en soportes como bisagras lisas o rotulas. Las reacciones en pistas (incluyendo el rozamiento) en una rueda rodando sin deslizamiento no hacen trabajo debido a que el contacto de la rueda con la pista tiene velocidad cero por ser el centro instantáneo de rotación.

*Potencia mecánica:* La potencia se define como el índice de variación con respecto al tiempo del trabajo desarrollado; por consiguiente:

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

Para movimiento lineal. La potencia que entrega la fuerza  $F$  actuando sobre un cuerpo que se desplaza  $d\tau$  durante el tiempo  $dt$  es:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.53)$$

Para movimiento angular. La potencia que entrega el par  $C$  actuando sobre un cuerpo que desplaza angularmente  $d\theta$ , en el mismo plano del par, durante el tiempo  $dt$  es:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{C \cdot d\theta}{dt} = C \cdot \omega \quad (3.54)$$

Puesto que para una partícula,

$$\text{Trabajo} = \text{Energía cinética} + \text{constante}$$

Entonces:

$$\text{Potencia} = \frac{d}{dt}(e.c) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right)$$

así

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$$

Las dimensiones de la potencia son  $[FLT^{-1}] = [ML^2T^{-3}]$  y las unidades son  $N \frac{m}{s} = \frac{J}{s} = W$  (*Watts*).

**Energía y formas de energía:** La energía se define como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo.

Un cuerpo puede poseer energía en varias formas, las cuales, todas son capaces de ser convertidas en trabajo mecánico. Estas formas típicas de energía son:

- *Energía calorífica.* Como la producida por la quema o ignición de un combustible en una máquina.
- *Energía eléctrica.* Como la convertida por un motor eléctrico.
- *Energía de deformación* Como la producida al soltar un resorte comprimido.

- *Energía cinética.* Como la producida al detener un cuerpo en movimiento.
- *Energía potencial.* Como la producida por la caída de un cuerpo.

El estudio de dinámica se interesa principalmente con la energía mecánica en las formas de *energía mecánica e.c. y energía potencial  $V$*  conjuntamente con la transformación posible en *energía de deformación* estas formas de energía son consideradas en las siguientes secciones.

***Energía cinética lineal:*** Un cuerpo de masa  $m$  moviéndose en una trayectoria horizontal a lo largo del eje  $x$ , con una velocidad  $v$  es llevada al reposo en una distancia  $S$  por una fuerza  $F$  horizontal constante. Por consiguiente:

$$\text{Trabajo hecho para detener al cuerpo} = FS$$

Como  $F$  es constante, entonces por la 2ª Ley de Newton, la desaceleración  $a$  es constante, de aquí que, usando la ecuación (2.37)

$$v_2^2 = v_1^2 - 2a(S_2 - S_1)$$

Para la situación planteada se tiene:

$$v_2 = 0, v_1 = v, (S_2 - S_1) = S \quad \text{por lo que:}$$

$$0 = v^2 - 2aS \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

Y de acuerdo a la ecuación (3.1)  $F = ma$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo hecho en detener al cuerpo} &= m \frac{v^2}{2S} \times S \\ &= \frac{1}{2} mv^2 \end{aligned}$$

La energía que pase un cuerpo en virtud de su movimiento es su energía cinética. Quedando.

$$\text{e.c. lineal} = 1/2mv^2 \quad (3.55)$$

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

**Energía Cinética Angular.** Un cuerpo de inercia  $I$  rotando respecto a un eje a  $\omega$  rad/s es llevado al reposo, por la aplicación de un torque firme y uniforme  $T$ , en  $\theta$  radianes de revolución. Así:

$$\text{Trabajo hecho en detener el cuerpo} = T\theta$$

Como  $T$  es constante, la desaceleración es constante de aquí que, de acuerdo a la ecuación del movimiento circular.

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - 2\alpha\theta$$

$$0 = \omega^2 - 2\alpha\theta$$

$$\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha}$$

y ecuación  $T = I\alpha$  nos da:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo hecho en detener el cuerpo} &= I\alpha \times \frac{\omega^2}{2\alpha} \\ &= \frac{I}{2} \omega^2 \end{aligned}$$

Así, la energía cinética de rotación poseída por un cuerpo esta dada por:

$$e.c. \text{ angular} = \frac{I}{2} \omega^2 \quad (3.56)$$

$$\text{Unidades: } \text{Inercia} (\text{kgm}^2) \times \omega^2 (\text{S}^{-2}) = \left( \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{S}^2} \right) \text{m} = \text{Nm}$$

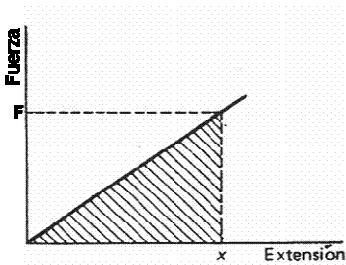


Figura 3.73

**Energía de deformación:** Un material elástico (resorte) de rigidez  $k$  es estirado por una fuerza, que se incrementa uniformemente  $F$ , a lo largo de una distancia  $x$ , figura 3.73 teniéndose por lo tanto:

Trabajo hecho al estirar = área bajo la curva de la gráfica  $x-F$

$$= \frac{1}{2} Fx$$

La rigidez del material  $k$  es la fuerza requerida para producir un aumento o disminución unitaria de la longitud del resorte; así:

$$F = kx$$

y

$$\text{Trabajo hecho} = \frac{1}{2} kx \cdot x = \frac{1}{2} kx^2$$

El trabajo hecho es almacenado en el cuerpo (resorte) como *energía de deformación* la cuál puede recuperarse como trabajo cuando el material elástico se suelta o libera.

$$\text{Energía de deformación } e \cdot d = \frac{1}{2} Fx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.57)$$

**Energía potencial:** En ciertos casos excepcionales. Importantes del trabajo hecho por una fuerza conservativa; fuerza de rango amplio como la fuerza gravitacional o fuerzas elásticas; que es independiente de la trayectoria.

La integral del trabajo es especialmente fácil de evaluar cuando la fuerza es conservativa el trabajo de un campo de fuerzas  $\mathbf{f}$  es independiente de la trayectoria entre cualquiera de dos puntos en una región del espacio, podemos elegir cualquier punto fijo en la región como el *punto base de referencia*  $P_0$  desde el cual el trabajo realizado por esta fuerza conservativa en mover a cualquier otro punto  $P$  a una partícula o cuerpo, es una función solamente de la posición de  $P$ . El valor negativo de esta función se define como la *energía potencial* de esta fuerza conservativa, denotada como  $V(P)$  o  $V(x,y,z)$ , de esta forma:

$$\text{Energía Potencial } V(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.58)$$

donde la integral es independiente de la trayectoria (con tal de que no salga de la región donde  $\mathbf{F}$  es conservativa) *la energía potencial es definida solamente para una constante aditiva arbitraria, donde la posición de referencia básica inicial  $P_0$  que es arbitraria.*



**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Trabajo – Energía Cinética**

Entonces el trabajo realizado en la fuerza conservativa  $F$  cuando su punto de aplicación se mueva de  $P_1$  a  $P_2$  está dado por:

Trabajo hecho por la fuerza  $F$  conservativa

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\Delta V = -(V_2 - V_1) \quad (3.59)$$

donde  $V_2$  significa  $V(P_2)$  y  $V_1$  significa  $V(P_1)$ . Este importante resultado puede ser establecido por la elección de una trayectoria particular de  $P_1$  a  $P_2$  que pase por  $P_0$ , por lo que:

$$U_{1-2} = \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(P_1) - V(P_2)$$

y de acuerdo a la definición de la ecuación (3.38) queda confirmada la ecuación (3.59).

Cuando varias fuerzas conservativas actúan sobre una partícula o cuerpo, sus energías potenciales pueden ser sumadas algebraicamente, puesto que el trabajo es aditivo, para dar una energía potencial total  $V$  para las fuerzas conservativas actuantes. Si  $U_{NC}$  representa el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas durante el movimiento, por tanto el trabajo total  $U_{1-2}$  es dado por:

$$U_{1-2} = -\Delta V + U_{NC} \quad (3.60)$$

Puesto que el trabajo de las fuerzas conservativas es igual al negativo de la variación en energía potencial. Por consiguiente el principio de trabajo y energía cinética.

$$U_{1-2} = \Delta e.c. \quad (3.61)$$

de la ecuación (3.48), toma la forma de:

$$-\Delta V + U_{NC} = \Delta e.c.$$

o

$$\Delta V + \Delta e.c. = U_{NC} \quad (3.62)$$

Estableciendo que *la variación en energía mecánica total e.c. + V (energía potencial) es igual al trabajo hecho por las fuerzas no conservativas durante el movimiento. Esto puede escribirse como:*

$$e.c._2 + V_2 = e.c._1 + V_1 + U_{NC} \quad (3.63)$$

Estableciéndose el equilibrio de *trabajo–Energía mecánica que dice; la energía mecánica final es igual a la energía mecánica inicial, más el trabajo hecho por fuerzas no conservativas sobre el sistema.*

En la práctica podemos incluir el trabajo de una de las fuerzas conservativas: junto con  $U_{NC}$ ; si es así, la energía potencial de esta fuerza será omitida en  $V$ . *El trabajo de cada fuerza será contabilizada ya sea en  $U_{NC}$  o en  $V$  pero no en ambas.*

Cuando  $U_{NC}$ ; es negativo (como en el rozamiento) la energía mecánica final es menor que la inicial. Pero  $U_{NC}$  puede ser positivo; por ejemplo, en el trabajo suministrado al sistema por un agente externo tal como una máquina de propulsión.

***Principio de la conservación de la energía.*** En algunos casos  $U_{NC}$  es insignificante. Por lo que podemos acercarnos al idealizado *principio de la conservación de la energía mecánica.*

$$e.c._2 + V_2 = e.c._1 + V_1 \quad (3.64)$$

En su forma general, el principio de la conservación de la energía establece que:

“La cantidad total de energía en el Universo es constante; la energía no puede ser creada ni destruida, si bien esta puede ser convertida de una forma a otra”

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

En casos donde un cuerpo está sujeto a sacudidas súbitas o impactos, o cuando éste se mueva entre rozamiento, algo de energía será “perdida”, es decir, convertida a otra forma, generalmente calor.

En algunas situaciones, tales como sistemas autocontenidos, la expresión de conservación de energía puede tomar en cuenta las pérdidas en la forma de una ecuación tal como:

$$\text{Energía inicial del sistema} = \text{Energía final del sistema} + \text{energía disipada}$$

Si las fuerzas que producen conversión de energía en otras formas son excluidas, y si consideramos únicamente aquellas fuerzas denominadas fuerzas conservativas tales como; fuerzas gravitatorias y fuerzas elásticas, las que dependen de la posición de las varias partes del sistema, no habrá pérdidas y la ecuación se convierte en la ecuación (3.64) que expresa como:

$$\text{Energía inicial del sistema} = \text{Energía final del sistema}$$

En sistemas mecánicos, las fuerzas de energía serán generalmente de energía cinética o energía potencial y cualquier variación será en la distribución de estas dos formas. Finalmente el principio de la conservación de la energía mecánica puede ser expresado como:

“Si un sistema de cuerpos en movimiento está bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de energías cinética y potencial de los cuerpos es constante”

Ejemplo demostrativo del principio de la conservación de energía mecánica.

Ejemplo demostrativo 3.13. Considere un cuerpo de masa  $m$  en la posición  $A$ , a una altura  $h$  con respecto a la referencia base, nivel  $O$ , figura 3.74. El cuerpo se dispone

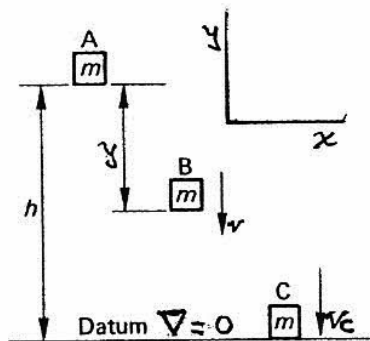


Figura 3.74

para caer libremente y en algún punto  $B$  cuando éste ha caído una distancia  $y$  su velocidad es  $v$ , y cuando llega al nivel referencia  $\nabla = 0$  en  $C$  la velocidad es  $v_C$ .

Comparar la energía total del sistema en cada posición  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

En la posición  $A$  a una altura  $h$  desde  $\nabla = 0$  y de acuerdo a la ecuación (3.58)

$$V_A = -\int W(-\hat{j}) \cdot dy \hat{j} = \int_{y=0}^{y=h} mg dy = mgh$$

y  $e.c._A = 0$  debido a que  $V_A = 0$

Por lo que, energía total en  $A = mgh$

En  $B$

$$V_B = mg(h-y)$$

$$y \quad e.c._B = \frac{1}{2} mV_B^2$$

La velocidad  $v_B$  después de caer una distancia  $y$  con una aceleración uniforme  $g$  de acuerdo a la ecuación (2.37)

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gy$$

$$\text{con } v_A = 0$$

$$v_B^2 = 2gy$$

$$\therefore e.c._B = \frac{1}{2} m(2gy) = mgy$$

Energía total en  $B = mgy + mg(h-y) = mgh$

En  $C$

$$V_C = 0$$

$$e.c._C = \frac{1}{2} mV_C^2$$

De la ecuación (2.37)

$$v_C^2 = 2gh$$

$$\therefore \text{Energía total en } C = \frac{1}{2} m(2gh) = mgh$$

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

Así para cada una de las posiciones la energía total es constante, e igual a la energía para el valor inicial.

Como se esperaba para un sistema bajo la acción de fuerzas conservativas. En el contacto alcanzado con el piso en C, toda energía potencial ha sido convertida en energía cinética.

### 3.19. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

#### *Ejemplos de discusión*

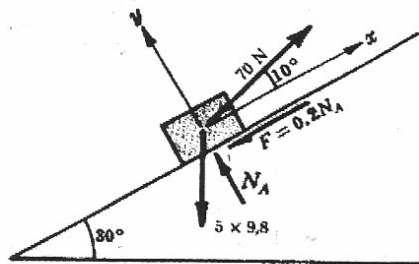


Figura 3.75

Ejemplo 3.21. Hallar el trabajo total efectuado sobre un cuerpo de  $5\text{kg}$  que es lanzado  $6\text{m}$  hacia arriba por un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de  $30^\circ$  con horizontal, tal como se muestra en la figura 3.75. Se supone un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0.20$

*Solución:* Según el diagrama de cuerpo libre *dcl*,  $N_A$  se determina sumando las fuerzas normales al plano.

$$\sum F_y = -5(9.81)\cos 30^\circ + N_A + 70\text{sen}10^\circ = 0$$

$$\therefore N_A = 30.3\text{N}$$

El trabajo total es igual a la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

$$U_{total} = U_{5(4.81)} + U_{N_A} + U_{F=0.2N_A} + U_{70\text{N}}$$

$$= [5(9.81)\text{sen}30^\circ(-\hat{i}) + 5(9.81\cos 30^\circ)(-\hat{j})] \cdot 6\hat{i} + N_A \hat{j} \cdot 6\hat{i} + (-0.2N_A \hat{i}) \cdot 6\hat{i} + [(70\cos 10^\circ \hat{i}) + (70\text{sen}10^\circ \hat{j})] \cdot 6\hat{i}$$

$$= -5(9.81)6 + 0 - 0.2(30.3)6 + (70\cos 10^\circ)6$$

$$= -147 + 0 - 36.4 + 413.6 \Rightarrow U_{total} = 230\text{Nm} \quad \leftarrow^r$$

$$= 230\text{J} \quad \leftarrow^r$$

Ejemplo 3.22. Un muelle se comprime inicialmente desde una longitud libre de 8 *pulgadas* hasta una longitud de 6 *pulg.* haciendo una compresión inicial neta de 2 *pulg.* ¿Qué trabajo adicional se efectúa comprimiéndolo 3 *pulg.* más, (5 *pulg.* en total), hasta una longitud de 3 *pulg.*? se supone una constante  $k = 20 \text{ Lb/pulg.}$

*Solución:* Por definición, el trabajo realizado comprimiendo el muelle desde 2 *pulg.* hasta 5 *pulg.* es:

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1=2}^{S_2=5} K S \cdot d\mathbf{S} = \int_2^5 20 S dS \\
 &= \frac{1}{2} 20 S^2 \Big|_{S=2}^{S=5} \\
 &= 10(5^2) - 10(2)^2 \\
 &= 210 \text{ Lb pulg.} \quad \leftarrow
 \end{aligned}$$

Puede obtenerse el resultado utilizando la gráfica de  $F=KS$  en función del desplazamiento  $S$  como lo muestra la figura 3.76.

El área comprendida entre los desplazamientos de 2 y 5 *pulg.* representa el trabajo impartido al muelle al comprimirlo de 2 *pulg.* a 5 *pulg.*

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^5 20 S dS - \int_0^2 20 S dS = \text{Area sombreada} \\
 &= \frac{1}{2} (40 + 100)(3) \\
 &= 210 \text{ Lb pulg.} \quad \leftarrow
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.23. El cuerpo de 10kg representado en la figura 3.77(a) está obligada a deslizarse en la barra lisa  $BC$  contenida en un plano vertical. Cuando el cuerpo se encuentra en la posición  $A$  su velocidad es 10 *m/s* hacia la derecha y el resorte (con constante elástica  $K = 500 \text{ N/m}$ ) estirado 4.0 m. Calcular la rapidez del cuerpo cuando llega a la posición  $A'$ .

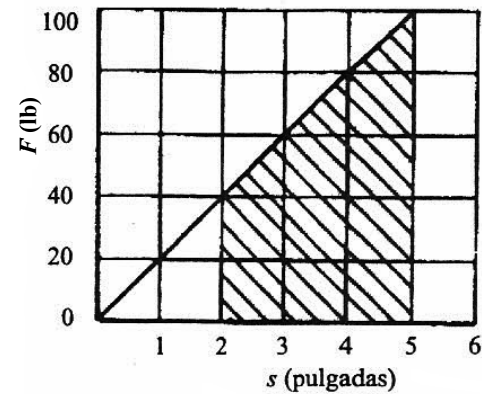


Figura 3.76

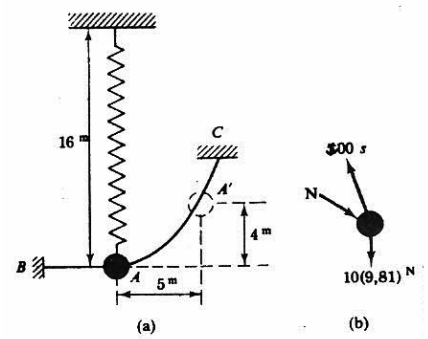


Figura 3.77

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Trabajo – Energía Cinética**

*Solución:* Un  $dcL$ , es mostrado de una posición intermedia del cuerpo entre  $A$  y  $A'$ , figura 3.77(b) la ecuación que relaciona el trabajo y energía cinética es:

$$U = \Delta(e.c.) = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

La reacción normal  $N$  de la barra lisa no realiza trabajo. La longitud del resorte cambia desde  $16m$  hasta  $13m$ . En la posición final del cuerpo la elongación del resorte es  $1m$  y su elongación inicial fue de  $4m$ . Durante el trayecto de  $A$  a  $A'$  el resorte está sometido a tensión, esto implica que la componente de la fuerza del resorte en la dirección de la trayectoria siempre coincide con la dirección del desplazamiento del cuerpo; luego, el trabajo del resorte sobre el cuerpo es positivo. Este trabajo se calcula en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} U_{\text{resorte}} &= - \int_{S_i}^{S_f} K S ds = - \int_4^1 500 S ds = -250 S^2 \Big|_4^1 \\ &= 3,750 J \end{aligned}$$

El trabajo que hace el peso sobre el cuerpo es:

$$U_{\text{peso}} = W(\Delta S_y) = -10(9.81)4 = -392.4 J$$

El trabajo total hecho sobre el cuerpo es:

$$\begin{aligned} U &= U_{\text{resorte}} + U_{\text{peso}} \\ &= 3,750 - 392 = 3,358 J \end{aligned}$$

La ecuación del trabajo y la energía cinética se convierte en:

$$\begin{aligned} U_{\text{total}} &= \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \\ 3,358 &= \frac{1}{2} (10) (v_f^2 - 10^2) \end{aligned}$$

$$v_f = 27.8 m/s$$

$\leftarrow$

Ejemplo 3.24. Un tren con locomotora eléctrica tiene una masa total de 300 toneladas. ¿Cuál es la potencia de la locomotora que justamente mantiene el tren moviéndose a una rapidez uniforme de 96 km/h sobre una vía a nivel contra una resistencia al movimiento de 40N/tonelada?

*Solución:* Puesto que la rapidez es uniforme (no aceleración), la fuerza de arrastre de la locomotora es igual a la resistencia total al movimiento. Así.

$$F_{\text{arrastre}} = 300 \times 40 = 12000 \text{ N}$$

La fuerza aplicada esta en la dirección del movimiento por tanto, utilizando la ecuación (3.52)

$$\begin{aligned} \text{Potencia} &= Fv \\ &= 12000 \left( \frac{96 \times 1000}{3600} \right) \\ &= 320000 \text{ Nm} / \text{s} = 320000 \text{ W} \\ &= 320 \text{ kW} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} r \\ \leftarrow \end{array}$$

Ejemplo 3.25. Una turbina desarrolla un torque de 1200 Nm cuando la flecha de salida rota a una rapidez angular de 3600 rev/min. ¿Qué potencia, la turbina esta entregando?

*Solución:* De acuerdo a la ecuación:

$$\text{Potencia} = T\omega$$

con  $T = 1200 \text{ Nm}, \quad \omega = \frac{2\pi(3600)}{60} (\text{rad} / \text{s})$

$$\begin{aligned} \text{Potencia} &= 1200 \left( \frac{2\pi(3600)}{60} \right) = 452390 \text{ Nm} / \text{s} \\ &= 452390 \text{ W} \\ &= 452.39 \text{ kW} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} r \\ \leftarrow \end{array}$$



**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Trabajo – Energía Cinética**

Ejemplo 3.26. Una prensa con accionamiento de tipo manivela, tiene un volante de masa de 600 kg con un radio de giro de 0.5m. Al inicio de la operación de prensado el volante está rotando a 300 rev/min y al final de esta, el volante rota a 240 rev/min. ¿Qué trabajo ha sido ejecutado durante la operación de prensado?.

Solución: En este caso el sistema es esencialmente el volante y la energía de salida es el trabajo desarrollado en el prensado del material.

De acuerdo a la ecuación del principio de trabajo-energía cinética en la forma:

$$\text{Energía inicial} = \text{Energía final} + \text{Trabajo hecho}$$

ya que

$$\begin{aligned} \text{Energía inicial} &= e.c. \text{ del volante} \\ &= \frac{1}{2} I \omega_1^2 \quad (\text{ecuación 3.55}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Energía final} &= e.c. \text{ del volante} \\ &= \frac{1}{2} I \omega_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Trabajo hecho} &= \text{Energía inicial} - \text{Energía final} \\ &= \frac{1}{2} I \omega_1^2 - \frac{1}{2} I \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_2^2) \end{aligned} \quad (\text{a})$$

De la ecuación (3.30) con  $M = 600 \text{ kg}$ ,  $K = 0.5 \text{ m}$

$$I = MK^2 = 600(0.5)^2 = 150 \text{ kgm}^2$$

$$\omega_1 = 2\pi \left( \frac{300}{60} \right) = 31.4 \text{ rad / s}$$

$$\omega_2 = 2\pi \left( \frac{240}{60} \right) = 25.13 \text{ rad / s}$$

Sustituyendo valores en (a)

$$\begin{aligned} \text{Trabajo hecho} &= \frac{1}{2}(150)(31.4^2 - 25.13^2) \\ &= 26583 \text{ Nm} \\ &= 26583 \text{ J} = 26.583 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$\overset{r}{\leftarrow}$

**Ejemplo 3.27.** Un cuerpo de  $5 \text{ kg}$  de masa está sujeto al extremo de una cuerda suspendida ligera de  $2 \text{ m}$  de largo y es libre a oscilar en una trayectoria circular contenida en un plano vertical. El cuerpo  $A$  es movido lateralmente y la cuerda donde se suspende es mantenida tirante en un ángulo de  $30^\circ$  debajo de la horizontal.

- Determinar la velocidad lineal del cuerpo y la tensión en la cuerda cuando éste está pasando por la posición inferior.
- En el instante que alcanza la posición inferior, el cuerpo  $A$  choca con el cuerpo  $B$  de masa  $10 \text{ kg}$  que se mueve horizontalmente con una velocidad de  $2 \text{ m/s}$  en el mismo plano vertical, pero con sentido opuesto al de la masa  $A$ . Si después del impacto, el cuerpo  $A$  rebota a una altura de  $0.3 \text{ m}$  arriba de su posición inferior determinar.
  - La velocidad de  $B$  inmediatamente después del impacto y
  - La pérdida de energía mecánica en el impacto.

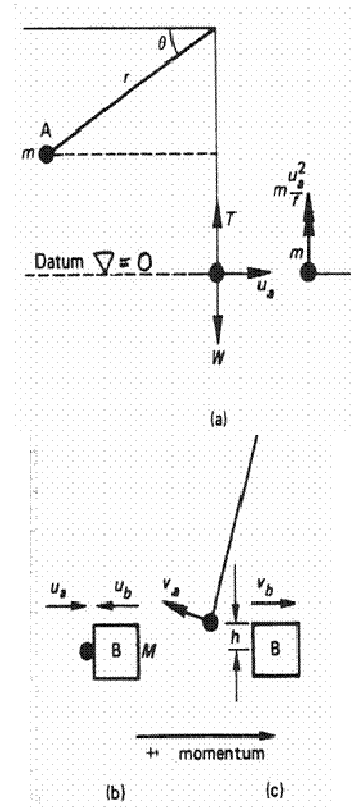
**Solución:** El ejemplo combina los principios de conservación de energía y de *momentum* lineal en un movimiento con trayectoria circular vertical.

Parte a) Refiriéndonos a la figura 3.78 (a). Por el principio de conservación de la energía.

$$\text{Energía inicial}(e.c. + V) = \text{Energía final}(e.c. + V)$$

$$0 + mg(r - r \cos \theta) = \frac{1}{2} m \mu_A^2 + 0$$

Sustituyendo los valores:  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $r = 2 \text{ m}$ ,  $\theta = 30^\circ$  tenemos:



**Figura 3.78**

**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Trabajo – Energía Cinética**

$$0 + 5(9.81)(2 - 2\text{sen}30^\circ) = \frac{1}{2}(5)(\mu_A^2)$$

$$\mu_A^2 = 2(9.81)$$

$$\mu_A = 4.43\text{m/s} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Y de acuerdo a los diagramas de fuerzas aplicadas y efectivas para la posición inferior de la masa A antes del choque se tiene:

$$T - W = m \frac{\mu_A^2}{r}$$

con

$$W = 5(9.81) = 49.05\text{N}, \quad \mu_A = 4.43\text{m/s} \quad \text{y} \quad r = 2\text{m}$$

$$T - 49.05 = (5) \frac{4.43^2}{2}$$

$$T = 49.05 + 99.05 = 98.1\text{N}$$

$\leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$

Parte b) Refiriéndonos a la figura 3.78 (b) y (c). Para aplicar el principio de conservación del *momentum* lineal en el impacto, será necesario determinar la velocidad de A inmediatamente después del choque aplicando el principio de conservación de energía al movimiento después del choque. Por lo que:

$$(e.c. + V)_{inicial} = (e.c. + V)_{final}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$v_A^2 = 2gh$$

con  $g = 9.81\text{m/s}^2, \quad h = 0.3\text{m}$

$$v_A^2 = 2(9.81)0.3$$

$$v_A = 2.43\text{m/s}$$

Aplicando el *principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal al impacto de A y B* y asumiendo que la dirección de la velocidad final de B es como se muestra en la figura 3.78(c):

*Momentum total inicial = momentum total final*

$$m \mu_A - M \mu_B = M \mu_B - m v_A$$

$$M v_B = m \mu_A + m v_A - M \mu_B$$

Sustituyendo los valores  $M = 10\text{kg}$ ,  $m = 5\text{kg}$ ,  $\mu_A = 4.43\text{m/s}$ ,  $\mu_B = 2\text{m/s}$ ,  $v_A = 2.43\text{m/s}$ ,

$$10 v_B = (5 \times 4.43) + (5 \times 2.43) - (10 \times 2)$$

$$v_B = \frac{1.43}{10} = 1.43\text{m/s} \quad \leftarrow^r$$

Las formas de energía inmediatamente antes y después son las energías cinética lineal de las masas A y B de esta manera:

$$\begin{aligned} e.c. \text{ Inicial total} &= \frac{1}{2} m \mu_A^2 + \frac{1}{2} M \mu_B^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4.43^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 \\ &= 69.05\text{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e.c. \text{ Final total} &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} M v_B^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 2.43^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times 1.43^2 \\ &= 24.99\text{J} \end{aligned}$$

$$\text{La "perdida" de energía} = 69.05 - 24.99 = 44.06\text{J} \quad \leftarrow^r$$

Ejemplo 3.28. Para determinar experimentalmente el momento de inercia de un pequeño volante, fijo a una flecha de 50mm de diámetro la cual esta montada sobre soportes con rodamientos. Una cuerda ligera esta asegurada a la flecha y arrollada varias veces alrededor de esta flecha y sujetando una masa en el extremo libre de la cuerda y permitiendo que esta caiga a una distancia

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

medida en un tiempo observado para que la aceleración pueda ser obtenida.

Se observa, que una masa de  $2\text{kg}$  justamente fue suficiente para vencer la resistencia por rozamiento causada por el volante al rotar a una velocidad uniforme ligera. Cuando una masa mayor de  $7\text{kg}$  fue adicionada, la masa cayó desde el reposo, una distancia de  $3\text{m}$  en 10 segundos. Determine el momento de inercia del volante y su flecha respecto al eje de rotación.

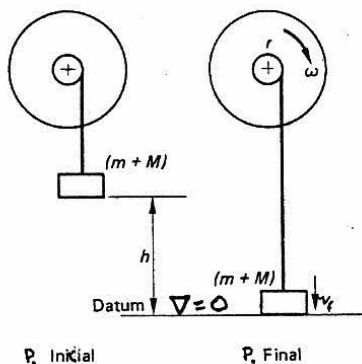


Figura 3.79

*Solución:* Refiriéndonos a la figura 3.79 y aplicando el principio de conservación de la energía para el sistema (volante + masa):

$$\text{Energía inicial del sistema} = \text{Energía final del sistema} + \text{perdida de energía debida al rozamiento}$$

Considerando cada uno de los términos, con  $m$  = masa “rozamiento”,  $M$  = masa adicional,

$$\text{Energía inicial} = V \text{ de la masa total} = (m+M)gh$$

$$\begin{aligned} \text{Energía final} &= e. c. \text{ de (volante + flecha)} + e. c. \text{ de la masa total} \\ &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pérdida de energía} &= \text{Pérdida en } V \text{ de la masa para vencer el rozamiento (asumir velocidad despreciable)} \\ &= mgh \end{aligned}$$

y de acuerdo a la ecuación del principio de la conservación de la energía del sistema:

$$(m+M)gh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 + mgh$$

El valor de  $v_f$  se encuentra de la distancia y tiempo de caída, considerando movimiento uniforme unidimensional.

$$S = \left( \frac{u + V}{2} \right) t$$

Con  $s = 3 \text{ m}$ ,  $t = 10 \text{ s}$ ,  $u = 0$ ,  $v = v_f$

$$3 = \frac{v_f}{2} \times 10 \Rightarrow v_f = 0.6 \text{ m/s}$$

Usando la ecuación  $v_f = \omega r$

$$\omega = \frac{v_f}{r} = \frac{0.6}{0.025} = 24 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo los siguientes valores en la ecuación de la conservación de la energía:  $M = 7 \text{ kg}$ ,  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $v_f = 0.6 \text{ m/s}$ ,  $\omega = 24 \text{ rad/s}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ ,

$$(2 + 7) \times 9.81 \times 3 = \frac{1}{2} \times I \times 24^2 + \frac{1}{2} (2 + 7) \times 0.6^2 + 2 \times 9.81 \times 3$$

$$264.87 = 288I + 1.62 + 58.86$$

$$I = \frac{204.39}{288} = 0.71 \text{ kg m}^2 \quad \leftarrow$$

**Ejemplo 3.29.** El mazo de un martinete de hincar pilotes tiene una masa de  $800 \text{ kg}$  y se suelta, a partir del reposo, desde  $2 \text{ m}$  por encima de la cabeza del pilote de  $2400 \text{ kg}$ . Si se observa que el mazo rebota hasta una altura de  $0.1 \text{ m}$  tras su impacto sobre el pilote figura 3.80, calcular (a) la velocidad  $v_p$  del pilote inmediatamente tras del impacto, (b) el coeficiente de restitución aplicable y (c) la pérdida porcentual de energía debida al impacto.

*Solución:* La conservación de la energía durante una caída libre nos da  $v = \sqrt{(2gh)}$  para las velocidades inicial y final del mazo. O sea, figura 3.80 (b).

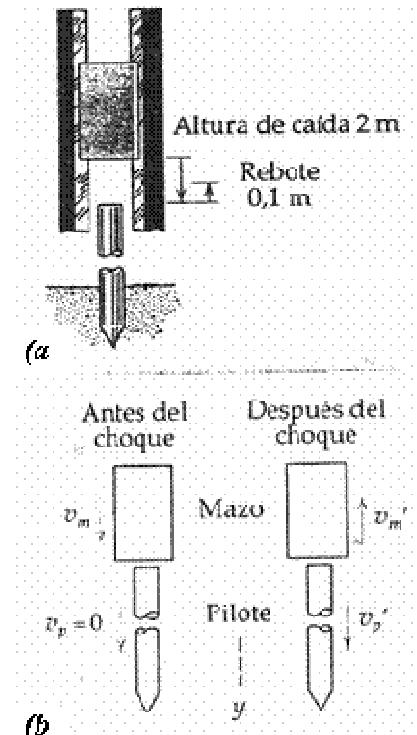


Figura 3.80

## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

$$v_m = \sqrt{[2(9.81)(2)]} = 6.26 \text{ m/s}, \quad v'_m = \sqrt{[2(9.81)(0.1)]} = 1.40 \text{ m/s}$$

- (a) La conservación de la cantidad de movimiento del sistema formado por mazo y pilote, nos da.

$$800(6.26) + 0 = 800(-1.40) + 2400v'_p \Rightarrow v'_p = 2.55 \text{ m/s} \quad \leftarrow$$

- (b) El coeficiente de restitución resulta ser

$$e = \frac{|\text{vel. rel. de separación}|}{|\text{vel. rel. de acercamiento}|}; \quad e = \frac{255 + 1.40}{6.26 + 0} = 0.63 \quad \leftarrow$$

Los impulsos debidos a los pesos del mazo y el pilote son muy pequeños comparados con los impulsos de las fuerzas de choque y por ello se despreció durante el mismo.

- (c) La energía cinética del sistema inmediatamente antes del impacto es la misma que posee el mazo en reposo con relación al pilote y vale

$$e.c. = Vg = mgh = 800(9.81)(2) = 15700 \text{ Nm}$$

Inmediatamente después del impacto la energía cinética e.c.' es:

$$e.c.' = \frac{1}{2}(800)(1.40)^2 + \frac{1}{2}(2400)(2.55)^2 = 8590 \text{ Nm}$$

Por tanto, la pérdida porcentual de energía será:

$$\frac{15700 - 8590}{15700}(100) = 45.3\% \quad \leftarrow$$

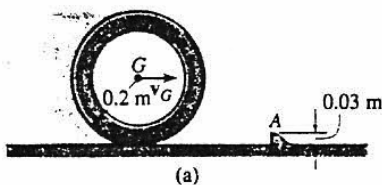


Figura 3.81(a)

Ejemplo 3.30. La rueda de 10 kg, figura 3.81(a) tiene un momento de inercia  $I_G = 0.156 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Suponiendo que la rueda no resbala ni rebota, calcule la velocidad mínima  $v_G$  que debe tener para rodar levantándose hasta el punto A en el tope.

*Solución: Principio de impulso-momentum angular.* Como no se tiene ni resbalamiento ni rebote, lo que hace esencialmente la rueda es pivotar, o girar, alrededor del punto  $A$  al hacer contacto. Esto se muestra en la figura 3.81(b), que indica, respectivamente, la cantidad de movimiento de la rueda inmediatamente antes del impacto, los impulsos dados a la rueda durante el impacto y la cantidad de movimiento de la rueda inmediatamente después del impacto. Solo hay dos impulsos (o fuerzas) que actúan sobre la rueda. Comparándolos, el impulso en  $A$  es mucho mayor que el originado por el peso, y como el lapso de impacto es muy corto, se puede considerar que el peso no es impulsivo, la fuerza impulsiva  $F$  en  $A$  tiene magnitud y dirección  $\theta$  desconocidas. Para eliminar del análisis a esta fuerza haremos notar que el *momentum* angular con respecto a  $A$  se conserva esencialmente.  $(98.1 \Delta t)d \approx 0$

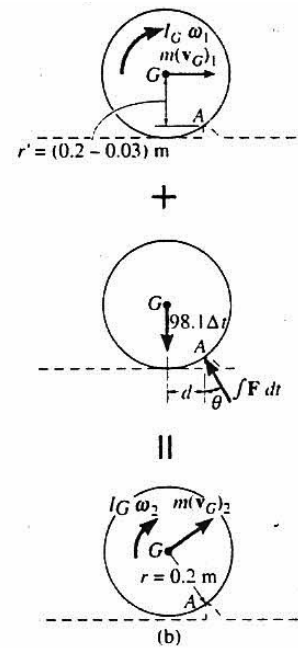


Figura 3.81(b)

*Conservación del momentum angular.* De acuerdo con la figura 3.81(b),

$$(\uparrow+) \quad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$r' m (v_G)_1 + I_G \omega_1 = r m (v_G)_2 + I_G \omega_2$$

$$(0.2 - 0.03)(10)(v_G)_1 + (0.156)(\omega_1) = (0.2)(10)(v_G)_2 + (0.156)(\omega_2)$$

*Cinemática:* Como no se presenta el resbalamiento,  $\omega = v_G / r = v_G / 0.2 = 5v_G$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior y simplificando se obtiene:

$$(v_G)_2 = 0.892(v_G)_1 \quad (a)$$

*Conservación de la energía.* Para rodar sobre el tope, la rueda debe pasar por la posición 3 indicada con puntos en la figura 3.81(c). Por lo tanto si  $(v_G)_2$   $[o(v_G)_1]$  ha de ser mínima, es necesario que la energía cinética de la rueda en la posición 2 sea igual a la energía potencial en la posición 3. Si hacemos que la referencia pase por el centro de

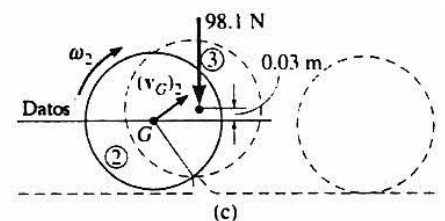


Figura 3.81(c)



## Cinética de la Partícula en Movimiento Plano

### Parte B: Trabajo – Energía Cinética

gravidad, como se ve en la figura, y si aplicamos la ecuación de conservación de la energía, obtenemos:

$$\{e.c._2\} + \{V_2\} = \{e.c._3\} + \{V_3\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}(10)(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}(0.156)(\omega_2)^2 \right\} + \{0\} = \{0\} + \{(98.1)(0.03)\} \quad (b)$$

Sustituyendo  $\omega_2 = 5(v_G)_2$  y la ecuación (a) en (b) y simplificando, se obtiene:

$$3.98(v_G)_1^2 + 1.55(v_G)_1^2 = 2.94$$

Por lo tanto

$$(v_G)_1 = 0.729 \frac{m}{s} \rightarrow \leftarrow r$$

### Ejercicios de Trabajo

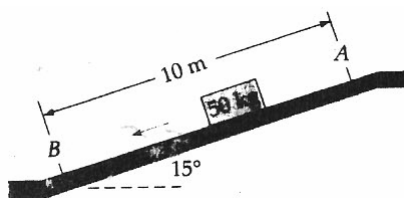


Figura 3.82

3.42. Calcular la velocidad  $v$  de la caja de  $50 \text{ kg}$  cuando llega al final  $B$  de la rampa, figura 3.82, si en  $A$  recibe una velocidad inicial de  $4 \text{ m/s}$  rampa abajo. El coeficiente de rozamiento cinético es  $0.30$ .

3.43. Se lanza una piedra de  $0.10 \text{ kg}$  con una velocidad inicial de  $30 \text{ m/s}$  a un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal. Utilizando el principio de trabajo-energía cinética, calcule la altura máxima que alcanza la piedra sobre el punto de lanzamiento.

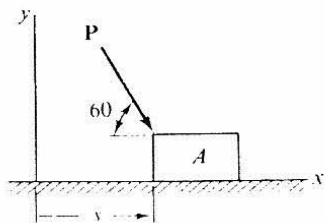


Figura 3.83

3.44. En un cierto instante durante una aceleración a lo largo de una vía horizontal, la barra de enganche de una locomotora eléctrica sufre una tracción de  $100 \text{ KN}$ .

¿Qué potencia se está desarrollando, si la rapidez del tren es de  $90 \text{ Km/h}$ ?

3.45. La dirección de la fuerza  $P$  que actúa sobre el bloque  $A$  de  $20\text{ kg}$ , figura 3.83, es constante pero su magnitud varía de acuerdo con la ecuación  $P = 300 S^2\text{ N}$ ; donde  $S$  especifica la posición de  $A$  en metros, Cuando  $S=0.6\text{ m}$ , la velocidad del cuerpo  $A$  es  $1.2\text{ m/s}$  hacia la dirección. Calcule la velocidad de  $A$  cuando  $S = 1.5\text{ m}$ . El plano es liso.

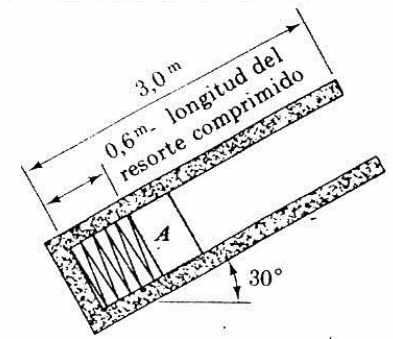


Figura 3.84

3.46. El bloque  $A$  de  $5\text{ kg}$ , figura 3.84 es expulsado del tubo de  $3.0\text{ m}$ , mediante la acción de un resorte cuya longitud libre es  $0.75\text{ m}$ . El módulo del resorte es  $70\text{ KN/m}$ . El rozamiento entre el bloque y el tubo es  $10\text{ N}$ . Calcule la velocidad de  $A$  al abandonar el tubo.

3.47. El collarín de  $30\text{ kg}$  representado en la figura 3.85 parte del reposo desde la posición  $A$ , inicialmente el resorte no se encuentra deformado. Calcule el módulo del resorte si la velocidad del collarín es  $1.5\text{ m/s}$  después de haber deslizado hacia abajo  $125\text{ mm}$ , la barra es lisa y la fuerza de  $250\text{ N}$  conserva su pendiente durante todo el momento.

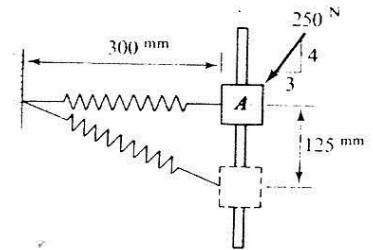


Figura 3.85

3.48. Un motor eléctrico de  $7.5\text{ KW}$  arranca desde el reposo contra un par torcional resistente (torque) de  $25\text{ Nm}$ . Calcular la velocidad angular máxima de las partes rotantes. Si, la aceleración angular es constante a  $25\text{ rad/s}^2$ , ¿Cuándo tiempo le toma al motor eléctrico alcanzar la máxima rapidez angular?

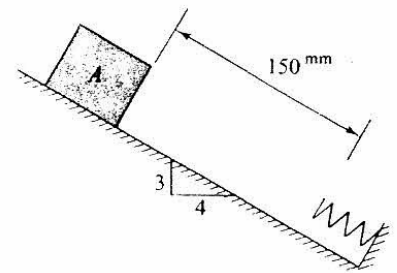
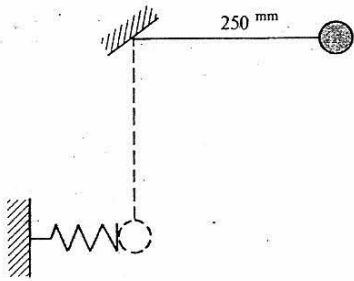


Figura 3.86

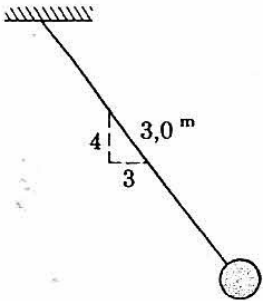
3.49. El cuerpo  $A$  de  $5\text{ kg}$  representado en la figura 3.86 se encuentra a  $150\text{ mm}$  del resorte cuando su velocidad es  $2\text{ m/s}$  en el sentido de descenso. El módulo del resorte es  $1750\text{ N/m}$ , y el coeficiente de rozamiento entre  $A$  y el plano inclinado es  $0.20$ . Calcule la distancia total que recorre el cuerpo antes de detenerse.

3.50. Una correa arrollada en una polea de  $600\text{ mm}$  de diámetro, sufre una tracción de  $800\text{ N}$  por el

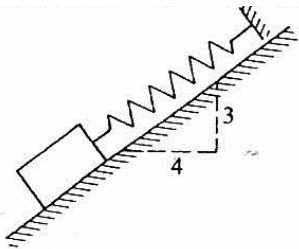
**Cinética de la Partícula en Movimiento Plano**  
**Parte B: Trabajo – Energía Cinética**



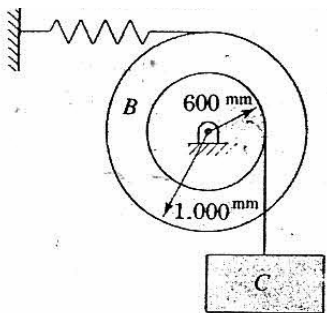
**Figura 3.87**



**Figura 3.88**



**Figura 3.89**



**Figura 3.90**

lado tenso y una tracción de  $180\text{N}$  por el lado laxo. ¿Qué potencia está transmitiendo si gira a  $200\text{ r.p.m}$ ?

- 3.51. Un péndulo de  $2.0\text{kg}$  cuya cuerda mide  $250\text{mm}$  se suelta del reposo estando la cuerda horizontal como se ilustra en la figura 3.87. En el punto más bajo de su trayectoria la masa choca con un resorte del módulo  $20\text{KN/m}$ . Calcule:
- La energía cinética máxima de la masa.
  - La compresión máxima del resorte.
  - La tensión de la cuerda justamente antes que la masa entre en contacto con el resorte.
- 3.52. El cuerpo pequeño de  $3\text{kg}$  representado en la figura 3.88 está fijo al extremo de una cuerda de  $3.0\text{m}$  y oscila contenido en un plano vertical, la velocidad angular instantánea de la cuerda es  $0.50\text{rad/s}$  en sentido horario.
- Utilice el principio de la conservación de la energía mecánica para calcular la velocidad del cuerpo cuando se encuentra en la posición más baja.
  - Calcule la tensión en la cuerda cuando el cuerpo se encuentra en su posición más baja.
- 3.53. El bloque de  $150\text{kg}$  representado en la figura 3.89 desciende sobre el plano liso inclinado. En la posición definida en la figura; la velocidad del bloque es  $3\text{m/s}$  en la dirección de descenso y el resorte está colgado  $0.3\text{m}$  (el módulo es de  $25\text{N/m}$ ). Utilice la ecuación de conservación de la energía mecánica para calcular la velocidad del cuerpo después de desplazarse  $1.5\text{m}$  sobre el plano.
- 3.54. El disco homogéneo  $B$  de  $150\text{kg}$  representado en la figura 3.90 cuenta con un cubo ó gorrón de masa despreciable y cuyo diámetro mide  $1.200\text{m}$ . la velocidad instantánea del cuerpo  $C$  de  $60\text{kg}$  es  $6.0\text{m/s}$  hacia abajo. Calcule el módulo del resorte

necesario para que la velocidad de  $C$  sea  $3.0\text{m/s}$  hacia abajo después de descender  $1.2\text{m}$ . La tensión inicial del resorte es  $800\text{N}$ .

- 3.55. El collarín  $A$ , figura 3.91 se mueve hacia el collarín  $B$  a una rapidez de  $7\text{m/s}$  a lo largo de la varilla lisa. El collarín  $B$  está fijo a un resorte de masa despreciable, el cuál está sin deformar en la posición mostrada. Si el coeficiente de restitución es  $0.9$  ¿Cuál es la máxima deflexión del resorte, dado que las masas de  $A$  y  $B$ ,  $m_A$  y  $m_B$ , son  $5\text{kg}$  y  $20\text{kg}$  respectivamente, y la rigidez del resorte  $K$ , es  $2000\text{N/m}$ ?

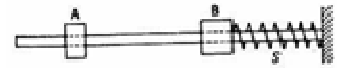


Figura 3.91

- 3.56. El cuerpo  $A$  de  $45\text{kg}$ , figura 3.92 se encuentra en “reposo” a  $1.4\text{m}$  sobre la placa  $B$  de  $20\text{kg}$ ;  $A$  cae sobre la placa y permanece en contacto con ella. En el estado inicial del sistema el cuerpo  $B$  se encuentra en reposo, sobre el resorte, cuya constante de rigidez (módulo) es  $3,000\text{N/m}$  calcule la distancia máxima que el cuerpo  $B$  se desplaza hacia abajo.

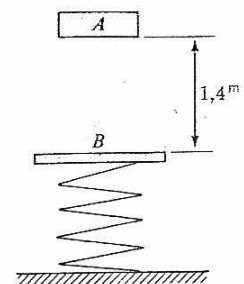


Figura 3.92

- 3.57. (a) Un cuerpo de  $900\text{kg}$  se eleva verticalmente con velocidad constante de  $3.0\text{ m/s}$ . calcule la potencia requerida.  
 (b) Calcule la potencia que se requiere si la velocidad y la aceleración del cuerpo son  $3.0\text{m/s}$  y  $1.5\text{m/s}^2$  respectivamente, dirigidas hacia arriba.

- 3.58. La partícula  $A$  de  $0.1\text{kg}$ , figura 3.93, se mueve sobre un plano horizontal liso y se une al punto fijo  $O$  mediante una cuerda elástica. Cuyo módulo y longitud libre (no alongada) son  $20\text{N/m}$  y  $3\text{m}$  respectivamente. Cuando  $A$  se encuentra en la posición definida en la figura su velocidad es  $30\text{m/s}$  en la dirección indicada. Calcular:

- a). La velocidad de la partícula cuando la cuerda deja de estar tensa.  
 b). La distancia mínima entre  $O$  y la partícula  $A$  durante el movimiento resultante.

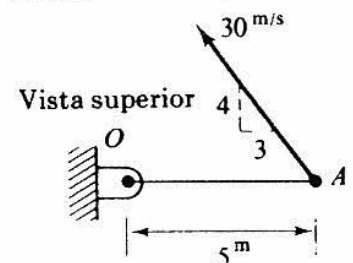


Figura 3.93

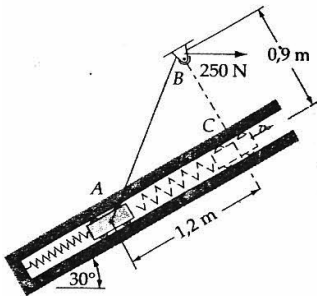
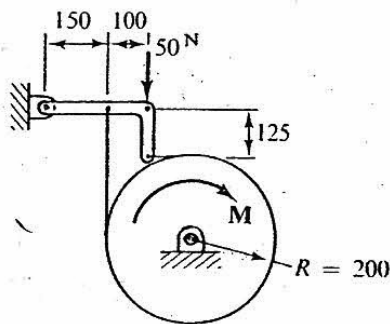


Figura 3.94



Todas las dimensiones se especifican en milímetros

Figura 3.95

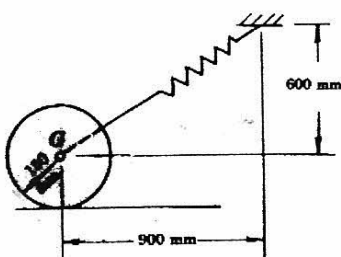


Figura 3.96

3.59. La corredera  $A$  de  $10\text{ kg}$  se mueve sin rozamiento en un plano vertical a lo largo de la guía inclinada. El resorte unido a ella tiene una constante de  $60\text{ N/m}$  y está sometido a un alargamiento de  $0.6\text{ m}$  en la posición  $A$ . Figura 3.94, desde que se suelta la corredera partiendo del reposo. Se aplica una fuerza constante de  $250\text{ N}$  a una cuerda ligera que pasa por una pequeña polea en  $B$ . la polea no ofrece resistencia al movimiento de la cuerda. Calcule la velocidad  $v$  de la corredera cuando pasa por el punto  $C$ .

3.60. La velocidad angular producida por el momento  $M$  aplicada al tambor de la figura 3.95 es  $150\text{ r.p.m.}$  en sentido horario. El coeficiente de rozamiento entre la correa y el tambor es  $0.30$ . Calcule la potencia que disipa el tambor.

*Sugerencias:* Elaborar dos *dcl*; uno *dcl* para la palanca de accionamiento de la correa y el otro *dcl* para el tambor; y aplicar la ecuación (iv) del ejemplo 3.3,  $\frac{T_C}{T_B} = e^{\mu\alpha}$ .

3.61. El volante de un conjunto motor-generator tiene un momento de inercia de  $420\text{ kg m}^2$  y los rotores del motor-generator tienen un momento de inercia de  $130\text{ kg m}^2$ . La flecha común rota sin carga a  $750\text{ rev/min}$ , cuando súbitamente es aplicada una carga que provoca que la rapidez caiga a  $650\text{ rev/min}$ . en  $1.5$  segundos. Calcular el valor de la carga tensional uniforme que produjo la caída de la rapidez circular.

3.62. Un cilindro homogéneo macizo de  $150\text{ mm}$  de radio, rueda sin deslizar sobre el plano horizontal. Su masa es de  $90\text{ kg}$  y se encuentra en reposo en la posición representada en la figura 3.96. La constante recuperadora del muelle o resorte es  $450\text{ N/m}$  y su longitud sin deformar es  $600\text{ mm}$  ¿Qué rapidez angular lleva el cilindro cuando el muelle ha desplazado su centro  $500\text{ mm}$  hacia la derecha?



## Parte II

# 4

## SISTEMAS DE FUERZAS Y EQUILIBRIO ESTÁTICO

El equilibrio es el término usado para designar la situación en que la resultante de un sistema de fuerzas es cero. El significado físico de equilibrio, aplicado a un cuerpo, denota que el cuerpo, o está en reposo, o se mueve en línea recta con velocidad constante. Los sistemas de fuerzas en equilibrio constituyen el objeto de la estática.

En este capítulo revisaremos los conceptos básicos de la estática y los principios y técnicas desarrolladas para analizar las condiciones de equilibrio de cuerpos como estructuras, bastidores, elementos de estructuras, máquinas, mecanismos y elementos de máquinas bajo la acción de sistemas de fuerzas

### 4.1. Operaciones con Fuerzas y Momentos de Fuerzas

*Suma de fuerzas.* Fuerza ha sido definido en el capítulo 3 en el contexto de las leyes del movimiento de Newton. La acción de una fuerza aislada ha sido cuantificada por los cambios que esta produce en el movimiento de una partícula.

Como ya hemos mostrado que la fuerza es una cantidad vectorial, cualquiera de dos fuerzas actuando en un punto puede ser remplazada por una fuerza resultante  $R$  (figura 4.1). Si una tercera fuerza es asignada, ésta puede sumarse a  $R$  justamente del mismo modo como  $F_2$  fue sumado a  $F_1$  (figura 4.2)

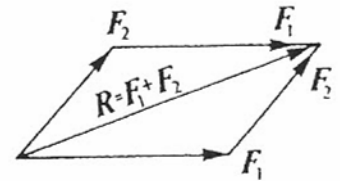


Figura 4.1

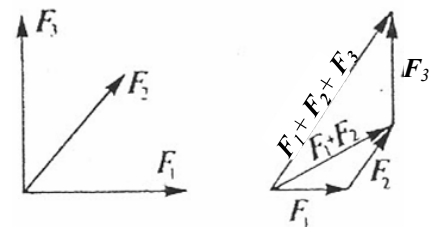


Figura 4.2

Es obvio que la posición del punto de aplicación es importante. Consideramos dos fuerzas, iguales en magnitud y dirección, actuando en puntos diferentes sobre un cuerpo

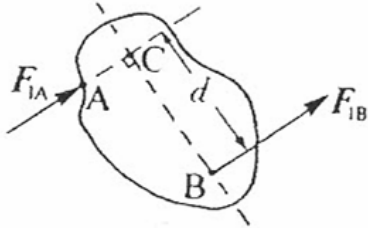


Figura 4.3.

Como es mostrado en la figura 4.3; sus efectos son claramente, no los mismos. Si, ahora, la fuerza en A se aplica en el punto C, el efecto general no es alterado; no obstante, los efectos internos serán diferentes.

Concluyendo que el efecto general está gobernado por la línea de acción de la fuerza y no por cualquier punto específico sobre esta línea de acción. La diferencia entre  $F_{1A}$  y  $F_{1B}$  está caracterizada por la separación “ $d$ ” de las líneas de acción.

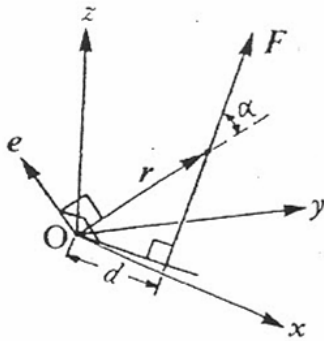


Figura 4.4.

*Momentos de fuerza.* Por definición, como ya hemos visto, la magnitud del momento de  $F$  (figura 4.4) respecto a  $O$  es  $Fd$ .

Es evidente que cualquier fuerza  $F$  actuando tangencialmente a una esfera, de radio “ $d$ ”, da un momento de la misma magnitud, no obstante que el efecto es singularmente definido si asociamos con la magnitud una dirección perpendicular al plano definido por  $F$  y  $r$  en un sentido dado por la regla de tornillo de cuerda derecha (regla de la mano derecha). El momento de una fuerza puede por consiguiente, ser considerado como un vector con una magnitud  $Fd = Fr \text{ sen } \alpha$  y en una dirección  $e$  como se indica en la figura 4.4. De aquí podemos escribir el momento de la fuerza  $F$  respecto al punto  $O$  como:

$$M_O = Fr \text{ sen } \alpha e = Fd e \quad (4.1)$$

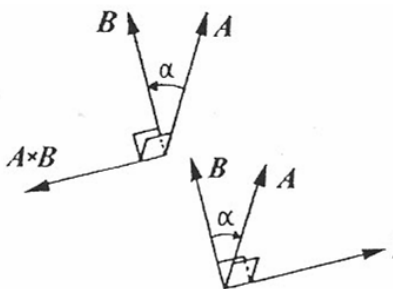


Figura 4.5

La ecuación (4.1) es similar a la ecuación (1.13) que define el producto vectorial o producto  $\times$  (cruz) de dos vectores  $A$  y  $B$  escrita como  $A \times B$ ; que de acuerdo con la regla del tornillo de cuerda derecha, la dirección de  $A \times B$  como se muestra en la figura 4.5, en la que se observa que el producto vectorial como se estableció en la sección 1.4 capítulo 1, no es conmutativo puesto que por definición



$B \times A = -A \times B$  ver figura 4.5.

De la figura 4.4 observamos que por definición del producto vectorial de dos vectores, la ecuación 4.1 puede escribirse como:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r \operatorname{sen} \alpha \mathbf{e} \quad (4.2)$$

*Momentos de componentes de una fuerza.* Consideremos dos fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  cuya resultante es  $\mathbf{R}$  actuando en el punto  $A$  (figura 4.6). El momento con respecto a  $O$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por tanto, el momento de la resultante de  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  es igual a la suma vectorial de los momentos de los componentes.

Si una fuerza  $\mathbf{F}$  se reemplaza por sus componentes cartesianas, luego el momento respecto a  $O$  es, por inspección de la figura 4.7.

$$\mathbf{M}_O = (yF_z - zF_y)\hat{\mathbf{i}} + (zF_x - xF_z)\hat{\mathbf{j}} + (xF_y - yF_x)\hat{\mathbf{k}} \quad (4.4)$$

y esto viene a ser lo mismo como lo definido por el algebra vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

*Momento de un par de fuerzas.* Un par de fuerzas se define como un sistema de dos fuerzas no colineales de igual magnitud pero con dirección opuesta, es decir según la figura 4.8  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ . El momento de un par de fuerzas respecto a  $O$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \\ &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}_2) \\ &= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_2 \\ &= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\operatorname{sen} \alpha) F_2 \mathbf{e} = dF_2 \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.6)$$

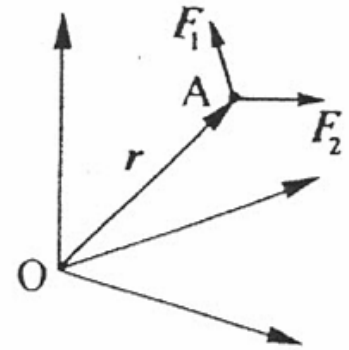


Figura 4.6

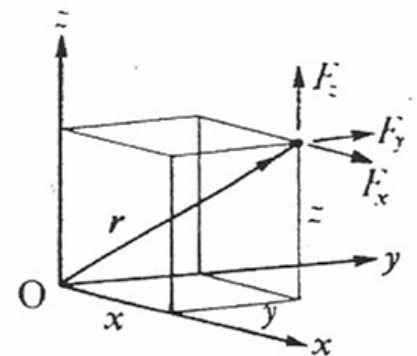


Figura 4.7

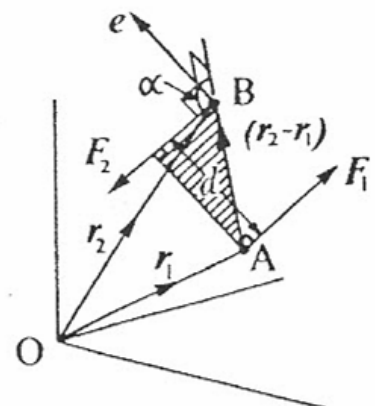


Figura 4.8

donde  $e$  es un vector unitario normal al plano conteniendo a  $d$  y  $F$ .

Concluyendo de este resultado que el momento de un par de fuerzas es *independiente del origen  $O$*  y su magnitud es igual a la magnitud de una de las fuerzas multiplicada por la distancia más corta entre sus líneas de acción.

Deberá también hacerse notar que la fuerza resultante de un par de fuerzas es cero y el momento de un par de fuerzas es a menudo referido simplemente como “par” o su “torque”.

#### 4.2. Resultante de un Sistema de Fuerzas Coplanares

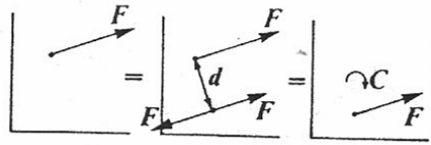


Figura 4.9

Como sólo las fuerzas externas y sus momentos entran dentro de la determinación del estado de movimiento o de equilibrio de un cuerpo rígido, conjuntos diferentes de fuerzas pueden compararse en base a sus efectos sobre un cuerpo rígido. Es algunas veces conveniente reemplazar una fuerza siempre por una fuerza igual en magnitud y dirección a lo largo de alguna línea de acción diferente, junto con un momento de un par de fuerzas (par) inducido, donde el momento del par de fuerzas  $C$  es  $dxF$ , como se muestra en la figura 4.9.

Por consiguiente, lo anterior nos conduce a definir conjuntos o sistemas de fuerzas equivalentes o *equipolentes*, de la siguiente manera: En general, dos sistemas de fuerzas se dicen ser equivalentes, o equipolentes, si éstas tienen la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante respecto a cualquier punto arbitrario.

Los diferentes sistemas de fuerzas coplanares, se pueden clasificar principalmente como:

(a). Sistema de fuerzas, todas concurrentes en un punto  $A$ .

La resultante en  $A$  es simplemente  $R = \sum F$ .

- (b). Sistema de fuerzas todas paralelas, la resultante en un punto  $A$  es en general una fuerza y un momento del par de fuerzas (par), los que se pueden fácilmente reducir a una fuerza resultante actuando en otro punto.
- (c). Sistema de fuerzas ni todas concurrentes ni todas paralelas, puede ser reemplazado por una fuerza simple más un momento de un par de fuerzas (par). El valor del par depende de la línea de acción elegida para la fuerza resultante, pero el valor de la resultante es, por supuesto constante.

Como una fuerza simple puede reemplazarse por una fuerza más un par, lo contrario también es verdad, con tal de que la resultante de las fuerzas no sea cero. Por tanto podemos establecer lo siguiente: Cualquier sistema de fuerzas coplanares puede reemplazarse por una fuerza simple o una fuerza más un par. Si la resultante de las fuerzas es cero, entonces el sistema puede ser reemplazado por un par.

### 4.3. Resultante de un Sistema de Fuerzas Espaciales

Lo mismo que para los sistemas de fuerzas coplanares, los diferentes sistemas de fuerzas espaciales, se pueden clasificar como:

- (a'). Sistema de fuerzas todas concurrentes en un punto  $A$ .  
La resultante en  $A$  es únicamente  $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}$
- (b'). Sistema de fuerzas todas paralelas, la resultante en un punto  $A$  es en general una fuerza resultante y un par resultante perpendiculares entre si, por lo que estas resultantes son fácilmente reducidas a una sola fuerza actuando en otro punto.
- (c'). Sistema de fuerzas ni todas concurrentes, ni todas paralelas correspondiendo a un sistema general de fuerzas en un espacio tridimensional, para el cual la resultante de las fuerzas es:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i \quad (4.7)$$

y el momento resultante, respecto a algún origen arbitrario  $O$  es:

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (4.8)$$

Por lo tanto podemos reemplazar el sistema por una fuerza simple más un par (momento de un par de fuerzas) no es generalmente posible reemplazar este sistema por una fuerza simple; sin embargo, es posible simplificar este sistema por una fuerza simple más un par paralelo a esta fuerza simple.

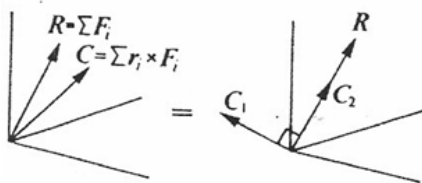
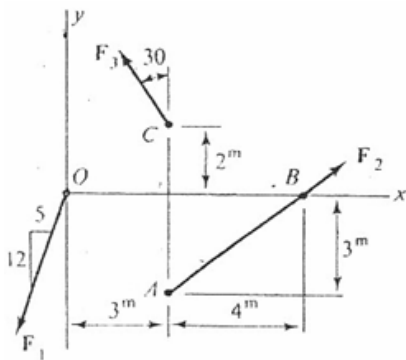


Figura 4.10

En la figura 4.10 el par  $\mathbf{C}$  puede ser reemplazado por dos componentes, una paralela a  $\mathbf{R}$  y la otra perpendicular a  $\mathbf{R}$ .

Al mover la línea de aplicación de  $\mathbf{R}$  en el plano normal a  $\mathbf{C}_\perp = \mathbf{C}_1$  en una distancia  $|\mathbf{C}_\perp|/|\mathbf{R}|$ , el sistema es reemplazado ahora por una fuerza simple  $\mathbf{R}$ , la resultante de las fuerzas, y un par coaxial simple  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_\parallel$  llamado *torculador* (o *atornillador*) equipolente del sistema.

Ejemplo demostrativo del tema 4.2. Resultante de un sistema de fuerzas coplanares.



(a)

Figura ed4.1(a)

Ejemplo demostrativo 4.1. Las fuerzas representadas en la figura ed4.1(a) tienen las magnitudes siguientes:  $F_1=130\text{kN}$ ,  $F_2=200\text{kN}$  y  $F_3=100\text{kN}$ . Calcule y localice la fuerza resultante del sistema de fuerzas considerado.

Solución: Cada una de las fuerzas que componen el sistema se expresa en términos de los vectores unitarios  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y se sustituyen en la ecuación (4.7) que define a  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= (-50\hat{i} - 120\hat{j}) + (160\hat{i} + 120\hat{j}) + \\ &\quad + (-50\hat{i} + 86.6\hat{j}) \\ &= 60\hat{i} + 86.6\hat{j} = 105.4(0.569\hat{i} + 0.821\hat{j})\text{kN} \quad \leftarrow \end{aligned}$$

Para calcular el momento resultante de todos los pares inducidos al trasladar las fuerzas que componen el sistema al origen  $O$  deben definirse los vectores de posición de cada una de las fuerzas. Estos vectores son:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \overline{OB} = 7\hat{i}, \quad r_3 = \overline{OC} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$$

y 
$$r_R = x\hat{i} + y\hat{j}$$

en donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas de cualquier punto perteneciente a la línea de acción de la fuerza resultante,  $R$ . Al igualar el momento de  $R$  a la suma de los momentos de las fuerzas, se obtiene una expresión en términos de  $x$  y  $y$  que es la línea de acción de  $R$ .

$$M_O = r_R \times R = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3$$

Sustituyendo valores

$$\begin{aligned} (x\hat{i} + y\hat{j}) \times (60\hat{i} + 86.6\hat{j}) &= 0 \times (-50\hat{i} - 120\hat{j}) + \\ &+ (7\hat{i}) \times (160\hat{i} + 120\hat{j}) + \\ &+ (3\hat{i} + 2\hat{j}) \times (-50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (86.6x - 60y)\hat{k} &= (840)\hat{k} + [3(86.6 - 2(-50))]\hat{k} \\ &= 1,199.8\hat{k} \end{aligned}$$

o

$$86.6x - 60y = 1,200 \quad (a)$$

La intersección de  $R$  con el eje  $x$  se obtiene sustituyendo  $y$  por  $0$  en la ecuación anterior, luego.

$$x = \frac{1200}{86.6} = 13.85m \quad \leftarrow r$$

El resultado se representa en la figura ed4.1(b)

Si se desea calcular la intersección de  $R$  con el eje  $y$ , en la ecuación (a)  $x$  se reemplaza por cero, obteniéndose:

$$y = \frac{1200}{-60} = -20m \quad \leftarrow r$$

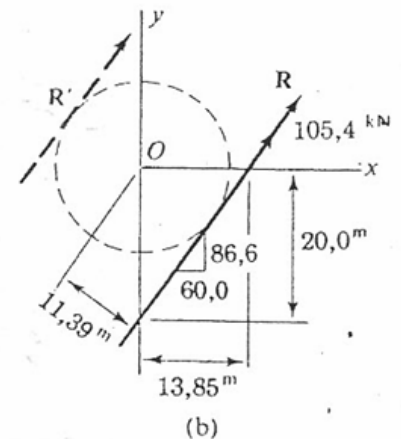


Figura ed4.1(b)

En la figura ed4.1(b) también se presenta este resultado.

El principio de los momentos también permite calcular la distancia perpendicular  $d$  desde el centro de momentos (origen  $O$ ) hasta la línea de acción de  $\mathbf{R}$ .

La magnitud de  $M_O$  se define como el producto de la magnitud de la fuerza resultante y la distancia perpendicular  $d$  desde  $O$  hasta  $\mathbf{R}$ , por tanto

$$M_O = 1200 = dR = d(105.4)$$

$$\therefore d = \frac{1200}{105.4} = 11.39m \quad \leftarrow$$

La resultante está localizada a  $11.39m$  medidos a partir  $O$  y por tanto es tangente a la circunferencia representada en figura ed4.1(b). Existiendo dos puntos en los que una fuerza en la dirección  $\mathbf{R}$  es tangente a la circunferencia. El punto correcto es aquel en el que actúa la fuerza que produce un momento en la dirección correcta (sentido antihorario). Por tanto la fuerza  $\mathbf{R}'$  no es la correcta ya que produce un momento en dirección contraria.

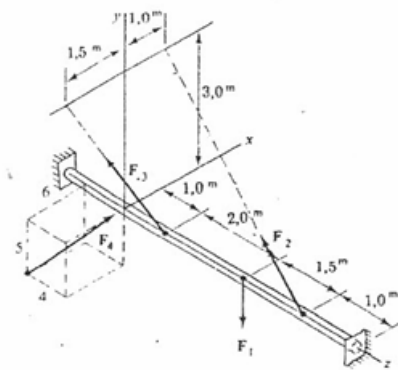


Figura ed4.2

Ejemplo demostrativo del tema 4.3. Resultante de un sistema de fuerzas espaciales.

Ejemplo demostrativo 4.2. Determine un sistema resultante de las fuerzas que actúan sobre la barra representada en la figura ed4.2 en la que las magnitudes de las fuerzas son  $F_1=600N$ ,  $F_2=5500N$ ,  $F_3=1750N$ ,  $F_4=4390N$ .

*Solución:* De acuerdo a la ecuación (1.3) todo vector fuerza es igual a su magnitud multiplicado por un vector unitario en su dirección, es decir  $\mathbf{F} = F \hat{\mathbf{e}}_F$ , tenemos:

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \hat{\mathbf{e}}_{F_1}, \quad \mathbf{F}_2 = F_2 \hat{\mathbf{e}}_{F_2}, \quad \mathbf{F}_3 = F_3 \hat{\mathbf{e}}_{F_3}, \quad \mathbf{F}_4 = F_4 \hat{\mathbf{e}}_{F_4}$$

De aquí que, de acuerdo a la figura ed4.2 y las magnitudes de las fuerzas,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= F_1 \hat{\mathbf{e}}_{F_1} = 6000(-\hat{\mathbf{j}}) \\
 \mathbf{F}_2 &= F_2 \hat{\mathbf{e}}_{F_2} = 5500 \left( \frac{\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4.5\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{1+9+20.25}} \right) \\
 \mathbf{F}_3 &= F_3 \hat{\mathbf{e}}_{F_3} = 1750 \left( \frac{-1.5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{2.25+9+1}} \right) \\
 \mathbf{F}_4 &= F_4 \hat{\mathbf{e}}_{F_4} = 4390 \left( \frac{6\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{36+25+16}} \right)
 \end{aligned}$$

Considerando que las fuerzas  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$  se trasladan al origen del sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  donde esta actuando la fuerza  $\mathbf{F}_4$ . La suma de las fuerzas concurrentes en este punto  $O$  es la fuerza resultante del sistema de fuerzas,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 \\
 &= -6000\hat{\mathbf{j}} + (1000\hat{\mathbf{i}} + 3000\hat{\mathbf{j}} - 4500\hat{\mathbf{k}}) + \\
 &\quad + (-750\hat{\mathbf{i}} + 1500\hat{\mathbf{j}} - 500\hat{\mathbf{k}}) + \\
 &\quad + (3000\hat{\mathbf{i}} + 2501\hat{\mathbf{j}} + 201\hat{\mathbf{k}}) \\
 &= 3252\hat{\mathbf{i}} + 1001\hat{\mathbf{j}} - 3001\hat{\mathbf{k}} \\
 &= 4537(0.717\hat{\mathbf{i}} + 0.221\hat{\mathbf{j}} - 0.661\hat{\mathbf{k}})N \quad \leftarrow^r
 \end{aligned}$$

El momento resultante de todos los pares de fuerzas inducidos al trasladar las fuerzas  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$  al origen del sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  es según la figura ed4.2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4 \\
 &= 3\hat{\mathbf{k}} \times (-6000\hat{\mathbf{j}}) + (4.5\hat{\mathbf{k}}) \times (1000\hat{\mathbf{i}} + 3000\hat{\mathbf{j}} - 4500\hat{\mathbf{k}}) + \\
 &\quad + (1\hat{\mathbf{k}}) \times (-750\hat{\mathbf{i}} + 1500\hat{\mathbf{j}} - 500\hat{\mathbf{k}}) + O \\
 &= 3000\hat{\mathbf{i}} + 3750\hat{\mathbf{j}} \\
 &= 4800(0.625\hat{\mathbf{i}} + 0.781\hat{\mathbf{j}})N \cdot m \quad \leftarrow^r
 \end{aligned}$$

De los resultados de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{C}$  vemos que:

## Principios de Mecánica para Ingeniería

$$\hat{e}_R = (0.717\hat{i} + 0.221\hat{j} - 0.661\hat{k})$$

y

$$\hat{e}_C = (0.625\hat{i} + 0.781\hat{j})$$

Podemos determinar el ángulo más pequeño entre  $R$  y  $C$  que es  $\theta$

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}(\hat{e}_R \cdot \hat{e}_C) \\ &= \cos^{-1}[(0.717\hat{i} + 0.221\hat{j} - 0.661\hat{k}) \cdot (0.625\hat{i} + 0.781\hat{j})] \\ &= \cos^{-1}(0.448 + 0.173) = \cos^{-1}(0.621) = 51.6^\circ\end{aligned}$$

como  $\theta$  no es de  $90^\circ$ . En consecuencia la resultante de las fuerzas y el par resultante no pueden remplazarse por una sola fuerza resultante. Sin embargo, es posible simplificar este sistema por una fuerza resultante y un par paralelo a la resultante de las fuerzas (sistema equipolente torculador)

La “componente paralela” de  $C$  a  $R$  es:

$$\begin{aligned}C_{||} &= (C \cdot \hat{e}_R)\hat{e}_R \\ &= [(3000\hat{i} + 3750\hat{j}) \cdot (0.715\hat{i} + 0.221\hat{j} - 0.661\hat{k})]\hat{e}_R \\ &= [(2151 + 828.75)]\hat{e}_R \\ &= (2979.75)\hat{e}_R \\ &= 2980(0.715\hat{i} + 0.221\hat{j} - 0.661\hat{k})\end{aligned}$$

$$C_{||} = (2137\hat{i} + 659\hat{j} - 1970\hat{k})N \cdot m \quad \leftarrow$$

Los componentes perpendiculares de  $C$  es la parte que es normal a  $R$ , por lo que

$$\begin{aligned}C_{\perp} &= C - C_{||} \\ C_{\perp} &= (3000\hat{i} + 3750\hat{j}) - (2137\hat{i} + 659\hat{j} - 1970\hat{k}) \\ &= 863\hat{i} + 3091\hat{j} + 1970\hat{k}\end{aligned}$$

Si  $A$  es un punto cualquiera de la línea de acción del torculador ubicado por

$$r_{OA} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$



Entonces la condición:

$$\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{R} = \mathbf{C}_\perp$$

proporciona la ecuación del eje del torculador equipolante

$$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times (3250\hat{i} + 1000\hat{j} - 3000\hat{k}) = \mathbf{C}_\perp$$

es decir

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 0.250 & 1000 & -3000 \end{vmatrix} = 863\hat{i} + 3091\hat{j} + 1970\hat{k}$$

a partir de lo cuál obtenemos

$$\text{coeficientes de } \hat{i}; -3000y - 1000z = 863 \quad (1)$$

$$\text{coeficientes de } \hat{j}; 3000x + 3250z = 3091 \quad (2)$$

$$\text{coeficientes de } \hat{k}; 1000x - 3250y = 1970 \quad (3)$$

El sistema de las ecuaciones (1), (2), (3) anteriores se pueden escribir como

$$0x - 3y - 1z = 0.863 \quad (1')$$

$$3x + 0y + 3.25z = 3.091 \quad (2')$$

$$1x - 3.25y + 0z = 1.970 \quad (3')$$

El sistema de ecuaciones (1'), (2') y (3') tiene un determinante  $\Delta=0$  entonces este sistema, ya sea; no tiene solución, o tiene un número infinito de soluciones y considerando que el eje del torculador solo puede intersectar dos planos del sistema de referencia, solo dos de las ecuaciones son independientes y necesarias. Así una pareja de ecuaciones como (1) y (2) constituyen la forma general de una recta en el espacio tridimensional para determinar los puntos del eje que intersecta a los planos  $(x-z)$  y  $(x-y)$

$$(1); \quad -3000y - 1000z = 863$$

$$(2); \quad 3000x + 3250z = 3091$$

Punto (1) en plano  $(x, z)$

de (1) Si  $y = 0 \Rightarrow z = -0.863m$

de (2) Si  $z = 0.863 \Rightarrow x = 1.965m$

Punto (2) en plano  $(x, y)$

de (2) Si  $z = 0 \Rightarrow x = 0.951m$

de (1) Si  $z = 0 \Rightarrow y = -0.288m$

Resumiendo el eje del sistema equipolente torculador pasa por los puntos

$P_1(1.965, 0, -0.863)m$                       y

$P_2(0.951, -0.288, 0)m$                       ←<sup>r</sup>

#### 4.4. Sistema de Fuerzas Paralelas Distribuidas

En la mayoría de los casos, hasta ahora hemos considerado a las fuerzas actuando en un punto, pero en la práctica la fuerza puntual es la resultante de un sistema de fuerzas distribuidas las cuáles pueden considerarse ser muchas fuerzas pequeñas actuando en un espacio cerrado.

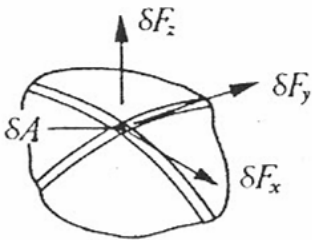


Figura 4.11

Consideremos una superficie plana pequeña de área  $\delta A$  sujeto a la acción de una fuerza diferencial teniendo una componente normal  $\delta F_z$  y componentes tangenciales  $\delta F_x$  y  $\delta F_y$  (figura 4.11).

La intensidad de carga normal actuando sobre la superficie ya definida en la ecuación (3.6)

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \left[ \frac{\delta F_z}{\delta A} \right] = \sigma \text{ o } p \quad (4.9)$$

En la mecánica del cuerpo sólido estas fuerzas son referidas como esfuerzo normal,  $\sigma$ , y en la mecánica de los fluidos se le llama presión  $p$ .

Los términos  $\lim_{\delta A \rightarrow 0} \left[ \frac{\delta F_x}{\delta A} \right]$  y  $\lim_{\delta A \rightarrow 0} \left[ \frac{\delta F_y}{\delta A} \right]$  son llamados esfuerzos de corte ( $\tau$ ).

Probablemente el sistema de fuerzas paralelas distribuidas más común encontradas en ingeniería es el ejercido sobre un cuerpo como un resultado de la atracción gravitacional de la Tierra.

#### 4.4.1. Centro de masa, centro de gravedad y centroide de un cuerpo rígido

*Centro de masa.* En conexión con la resultante de un sistema de fuerzas distribuidas paralelas, continuas y homogéneas en la sección 3.7.1 se obtuvieron las ecuaciones 3.21 y 3.21a para las coordenadas del centro de masa de un cuerpo rígido, para propósitos dinámicos.

*Centro de gravedad.* La localización del centro de gravedad es simplemente una aplicación del principio de momentos; esto es el momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de sus partes.

Como un ejemplo consideraremos la placa representada en la figura 4.12 para definir un procedimiento general. La placa esta compuesta por un número infinito de elementos pequeños cuyo peso individual corresponde a

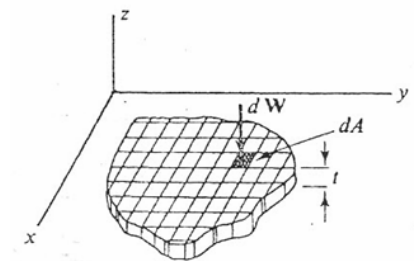


Figura 4.12

$$dW = \hat{k} \delta g t dA$$

en donde  $dW$  es el peso de uno de los elementos mencionados,  $\delta$  es la densidad del material (masa por unidad de volumen),  $g$  es la aceleración debida a la gravedad,  $t$  es el espesor de la placa y  $dA$  es el área del elemento diferencial (área de la superficie contenida en el plano  $xy$ ).

El peso total de la placa es:

$$W = -\hat{k} W = -\hat{k} \int \delta g t dA,$$

en donde la integral se evalúa sobre el área de la placa.

Las coordenadas de un punto perteneciente a la línea de acción del peso resultante se calcula utilizando el principio de los momentos, con respecto al origen  $O$ , del peso de un

elemento es

$$\begin{aligned} d\mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times d\mathbf{W} \\ &= (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{k}} \delta g t dA) \\ &= -y \delta g t dA \hat{\mathbf{i}} + x \delta g t dA \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Y en consecuencia el momento resultante con respecto al origen es:

$$\mathbf{M}_O = -\hat{\mathbf{i}} \int y \delta g t dA + \hat{\mathbf{j}} \int x \delta g t dA \quad (\text{a})$$

El punto de intersección del peso resultante con el plano  $xy$  se obtiene aplicando el principio de los momentos. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_G \times \mathbf{W} \\ &= (x_G \hat{\mathbf{i}} + y_G \hat{\mathbf{j}}) \times (-W \hat{\mathbf{k}}) \\ &= -y_G W \hat{\mathbf{i}} + x_G W \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Las ecuaciones (a) y (b) son iguales solamente si las componentes correspondientes lo son. En consecuencia.

$$\left. \begin{aligned} y_G W &= \int y \delta g t dA \quad \text{o} \quad y_G = \bar{y} = \frac{\int y \delta g t dA}{\int \delta g t dA} \\ x_G W &= \int x \delta g t dA \quad \text{o} \quad x_G = \bar{x} = \frac{\int x \delta g t dA}{\int \delta g t dA} \end{aligned} \right\} \quad (4.10a)$$

El centro de gravedad del cuerpo está ubicado sobre una línea paralela al eje  $z$  que pasa por el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Si  $t$  y  $\delta$  son constantes,  $\bar{z}$  se obtiene por consideraciones de simetría. Si  $t$  y  $\delta$  son variables, la placa puede girarse en tal forma que el eje  $x$  o el eje  $y$  que de vertical. En este caso el principio de los momentos define.

$$\bar{z} = \frac{\int z \delta g dV}{\int \delta g dV} \quad (4.10b)$$

donde  $dV = dA dt$

Los términos “centro de masa” y “centro de gravedad”, se refieren por supuesto a diferentes conceptos físicos (el primero se relaciona con la distribución de masa de un cuerpo y el segundo con la resultante de las atracciones gravitacionales distribuidas)

Si la placa representada en la figura 4.12 tiene un espesor  $t$  variable y tiene una densidad  $\delta$  constante, y como  $t dA = dt dA = dv$ , las ecuaciones 4.10a y 4.11b se pueden expresar como:

$$x_G = \bar{x} = \frac{\int x \delta g dV}{\delta g dV} \quad (4.11a)$$

$$y_G = \bar{y} = \frac{\int y \delta g dV}{\delta g dV} \quad (4.11b)$$

$$z_G = \bar{z} = \frac{\int z \delta g dV}{\delta g dV} \quad (4.11c)$$

Como  $g$  se considera constante y en la mayoría de los cuerpos  $\delta$  es constante por lo que en las ecuaciones (3.21a) para las coordenadas  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  del centro de masa y las ecuaciones (4.11a, b y c) de  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  del centro de gravedad coinciden con el *centroide*, que es una propiedad puramente geométrica del cuerpo.

*Centroide.* El centroide se determina en una forma semejante al utilizado por el centro de masa y centro de gravedad de los cuerpos homogéneos, así de las ecuaciones antes mencionadas (3.21a) y el producto  $\delta g$  en los segundos miembros de la ecuación (4.11a, b y c) se cancelan y de estas expresiones se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{\int dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{\int dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{\int dV} \quad (4.12)$$

que son las coordenadas del *centroide de volumen general* de un cuerpo, o la integral  $\int x dV$  se le llama *primer momento del volumen  $V$  con respecto al plano  $yz$* . De igual

forma se definen los primeros momentos con respecto a los otros planos.

Los cuerpos cuyo espesor  $t$  es constante como la placa figura 4.12 y además una distribución de masa continua y homogénea (densidad  $\delta$  constante) su  $dV = tdA$  por lo que de acuerdo a las expresiones para  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  de la ecuación (4.12) obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int xdA}{A}; \quad \bar{y} = \frac{\int ydA}{A} \quad (4.13)$$

que representan las coordenadas del *centroide de área plana* de un cuerpo. A la integral  $\int xdA$  se le llama *primer momento del área  $A$  con respecto al plano,  $yz$* . Igualmente, se definen los primeros momentos con respecto a cualquier eje.

Los cuerpos delgados con sección transversal  $A$  constante se representan en forma más sencilla como segmentos de línea. Cuando se tiene una distribución de masa uniforme  $dV = AdL$  donde  $L$  la longitud de la línea, para  $L$  en un plano ( $xy$ ) de las expresiones (4.12) se tiene

$$\bar{x} = \frac{\int xdL}{L}; \quad \bar{y} = \frac{\int ydL}{L} \quad (4.14)$$

Coordenadas del *centroide de longitud* de un cuerpo esbelto cuyo eje longitudinal esta contenido en un plano. La integral  $\int xdL$  se llama *primer momento de línea  $L$  con respecto al eje  $y$* . De igual forma,  $\int ydL$  es el *primer momento con respecto al eje  $x$* . Se amplía el método para considerar un eje longitudinal de un cuerpo esbelto tridimensional. Las ecuaciones 4.14 también son validas para esta línea, y se puede añadir una ecuación semejante para la coordenada  $z$ .

$$\bar{x} = \frac{\int xdL}{L}; \quad \bar{y} = \frac{\int ydL}{L}; \quad \bar{z} = \frac{\int zdL}{L} \quad (4.15)$$

En este caso, la integral  $\int x dL$  es el primer momento de la línea  $L$  con respecto al plano  $yz$ . En la ecuación (4.15) se dan definiciones similares para las otras integrales. Obsérvese que el centroide de línea rara vez yace sobre la línea  $L$ , a menos que la línea sea enteramente recta.

Las líneas, las áreas y los volúmenes con un plano de simetría tienen sus centroides en ese plano y tienen un primer momento cero con respecto al mismo. Las líneas, las áreas y los volúmenes con dos planos de simetría tienen sus centroides en la línea de intersección de dichos planos. Las líneas, las áreas y los volúmenes con tres planos de simetría que se intersectan en un punto tienen el centroide en ese punto. Estas propiedades se determinan por inspección, se encuentran fácilmente en los centroides de los cubos, círculos, esferas y otros cuerpos simétricos.

*Centroides de cuerpos compuestos.* Con frecuencia el centroide o centro de gravedad de un cuerpo compuesto es mucho más fácil y exacto de localizar experimentalmente.

Los centroides de los objetos compuestos se localizan en una forma semejante a la que se siguió cuando se trataba de masas puntuales. Se divide el objeto en partes sencillas, con objeto de localizar por inspección el centroide de cada parte o figura geométrica que pueden ser de volumen, de área con espesor constante o de longitud con sección transversal constante; teniéndose que el volumen total, área total o longitud total de figura geométrica del cuerpo compuesto inicial es igual a la suma de los volúmenes, áreas o longitudes de las partes en que se subdividen cada región respectivamente (las partes o figuras geométricas que sean huecos, se deben abstraer), y los momentos de primer orden de volumen, área o longitud de un cuerpo compuesto respecto a cualquier punto, eje o plano será igual a la suma algebraica de los momentos de primer orden de las regiones o partes respectivas referidas al mismo punto, eje o plano; de tal forma que:

Para las coordenadas del centroide de volumen de un

### Principios de Mecánica para Ingeniería

Cuerpo compuesto  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  de un volumen  $V$  compuesto de volúmenes de las figuras sencillas  $V_i$ .

$$\underbrace{\text{Primer momento del volumen total}} = \underbrace{\text{Suma de los primeros momentos de las partes}}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}V &= \sum \bar{x}_i V_i \\ \bar{Y}V &= \sum \bar{y}_i V_i \\ \bar{Z}V &= \sum \bar{z}_i V_i \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Para las coordenadas del centroide de área de un cuerpo compuesto.  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  de un área  $A$  compuesta de áreas de figuras sencillas  $A_i$ .

$$\underbrace{\text{Primer momento de la área total}} = \underbrace{\text{Suma de los primeros momentos de las partes}}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}A &= \sum \bar{x}_i A_i \\ \bar{Y}A &= \sum \bar{y}_i A_i \\ \bar{Z}A &= \sum \bar{z}_i A_i \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Y para las coordenadas de longitud de un cuerpo esbelto compuesto  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  de una longitud  $L$  compuesta de longitudes de figuras sencillas  $L_i$ .

$$\underbrace{\text{Primer momento de la longitud total}} = \underbrace{\text{Suma de los primeros momentos de las partes}}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}L &= \sum \bar{x}_i L_i \\ \bar{Y}L &= \sum \bar{y}_i L_i \\ \bar{Z}L &= \sum \bar{z}_i L_i \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Este procedimiento para la determinación de las coordenadas centroidales de cuerpos compuestos evita la



Integración, siempre y cuando se conozcan los volúmenes áreas o longitudes con la respectiva localización del centroide de cada parte en lo que se subdivide a la región o figura geométrica compuesta. Al utilizar este procedimiento es conveniente identificar claramente en un croquis las partes en que subdivide la región original.

La tabla 4.1 se consigna el área y las coordenadas del centroide de algunas formas geométricas comunes

Ejemplos demostrativos del tema 4.4.1. centro de masa, centro de gravedad y centroide de un cuerpo rígido.

Ejemplo demostrativo 4.3. Localice el centroide del área representada en la figura ed.4.3 que es limitada por la curva  $y = x^2$  y la línea recta  $y = x + 2$ . En las ecuaciones  $x$  y  $y$  se expresan en metros.

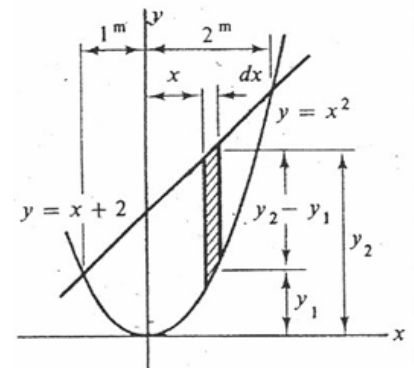


Figura ed.4.3

*Solución:* En este caso se escoge un área diferencial vertical, porque el elemento es válido en toda la región. Si se escoge un área diferencial horizontal, deben definirse dos elementos diferentes. El área del elemento diferencial es:

$$dA = (y_2 - y_1)dx = (x + 2 - x^2)dx$$

y el área total es:

$$A = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 4.50m^2$$

Como el área diferencial es rectangular su centroide está localizado por el vector de posición  $\mathbf{r}$ , por lo que

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + \left( y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} \right)\hat{\mathbf{j}} = x\hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right)\hat{\mathbf{j}}$$

El momento de primer orden del área diferencial con respecto al origen  $O$ , es

$$d\mathbf{M}_O = \mathbf{r}dA = \left( x\hat{\mathbf{i}} + \frac{y_1 + y_2}{2}\hat{\mathbf{j}} \right)(y_2 - y_1)dx,$$

## Principios de Mecánica para Ingeniería

expresando  $y_1$  y  $y_2$  en términos de  $x$ , se obtiene

$$dM_o = \left[ (x^2 + 2x - x^3)\hat{i} + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 - x^4)\hat{j} \right] dx$$

el momento de primer orden del área con respecto al origen  $O$ , es

$$\begin{aligned} M_o &= \int dM_o = \int_{-1}^2 \left[ (x^2 + 2x - x^3)\hat{i} + \left( \frac{x^2 + 4x + 4 - x^4}{2} \right)\hat{j} \right] dx \\ &= \left[ \left( \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\hat{i} \right]_{-1}^2 + \left[ \left( \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x - \frac{x^5}{5} \right)\frac{\hat{j}}{2} \right]_{-1}^2 \\ &= (2.25\hat{i} + 7.20\hat{j})m^3 \end{aligned}$$

En consecuencia la posición del centroide de la región (figura geométrica) es

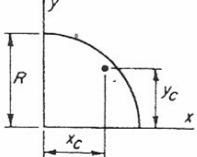
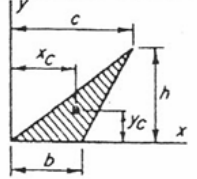
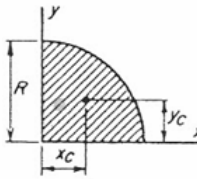
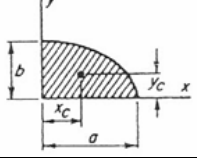
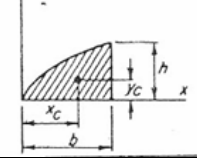
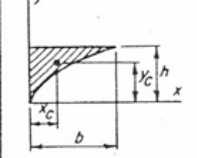
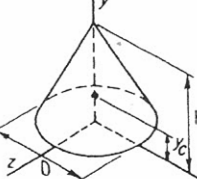
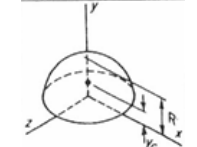
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c = \bar{x}\hat{i} + \bar{y}\hat{j} &= \frac{M_o}{A} = \frac{2.25\hat{i} + 7.20\hat{j}}{4.50} \\ &= (0.5\hat{i} + 1.6\hat{j})m \end{aligned} \quad \begin{array}{l} r \\ \leftarrow \end{array}$$

De lo que se desprende

$$\bar{x} = 0.5m \quad \text{y} \quad \bar{y} = 1.6m \quad \begin{array}{l} r \\ \leftarrow \end{array}$$

Cuando se requiere calcular sólo una coordenada del centroide de una figura geométrica, se calcula el momento de primer orden con respecto a un eje de referencia perteneciente al plano, en esta forma se abrevia la obtención del resultado.

**Tabla 4.1. CENTROIDES DE ALGUNAS FORMAS GEOMÉTRICAS COMUNES**

	<i>Forma geométrica</i>	<i>Longitud, área, volumen</i>	$\bar{x}$ 0 $x_c$	$\bar{y}$ 0 $y_c$	$\bar{z}$ 0 $z_c$
Cuadrante de un arco circular		$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{2R}{\pi}$	$\frac{2R}{\pi}$	
Triángulo		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b+c}{3}$	$\frac{h}{3}$	
Cuadrante de un círculo		$\frac{\pi R^2}{4}$	$\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{4R}{3\pi}$	
Cuadrante de una elipse		$\frac{\pi ab}{4}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	
Cuadrante de una parábola		$\frac{2bh}{3}$	$\frac{3b}{5}$	$\frac{3h}{8}$	
Cartela parabólica		$\frac{bh}{3}$	$\frac{3b}{10}$	$\frac{3h}{4}$	
Cono circular recto		$\frac{\pi R^2 h}{3}$	0	$\frac{h}{4}$	0
Hemisferio		$\frac{2\pi R^3}{3}$	0	$\frac{3R}{8}$	0



#### 4.5. Equilibrio de un Cuerpo Rígido

En esta sección determinaremos y aplicaremos las condiciones necesarias para producir equilibrio en sistemas de fuerzas coplanares y espaciales, los principios y técnicas desarrollados en esta sección son los fundamentos básicos de la estática.

Se tienen dos definiciones ligeramente diferentes del concepto de equilibrio, estas son:

- i)* Se dice que un cuerpo está en equilibrio cuando éste está en reposo (o con velocidad relativa constante, lo que implica que todos los puntos tienen aceleración cero)
- ii)* Un sistema de fuerzas se dice estar en equilibrio cuando la fuerza resultante es cero y el momento resultante respecto a cualquier punto arbitrario es cero.

La condición (*i*) implica (*ii*), pero la condición (*ii*) no implica (*i*). Por ejemplo cuando fuerzas externas actúan sobre un volante rotando a rapidez constante satisface la condición (*ii*) pero no la (*i*), también un resorte siendo comprimido por fuerzas iguales y opuestas, satisface la condición (*ii*) pero no siempre la condición (*i*).

*Ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanares.* Si tenemos un conjunto de fuerzas actuando sobre un cuerpo paralelas al plano  $xy$ , en consecuencia para el equilibrio del sistema de fuerzas es simplemente

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

$$\text{y} \quad \sum \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

o, en forma escalar,

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_{Oz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Para un sistema de fuerzas paralelas al plano  $xy$   $M_{Ox}=M_{Oy}=0$ , de tal forma que  $M_{Oz}$  frecuentemente es

reemplazado por  $M_O$  para evitar algún equívoco.

Si el conjunto consiste de tres fuerzas y ningún par (momento de un par de fuerzas) entonces, de la figura 4.13

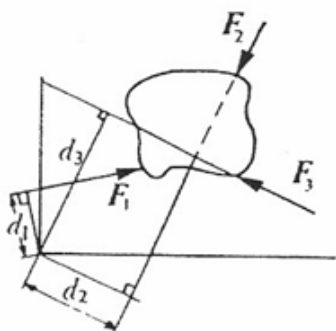


Figura 4.13

$$F_{1X} + F_{2X} + F_{3X} = 0 \quad (4.22a)$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad (4.22b)$$

$$-F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3 = 0 \quad (4.22c)$$

Como se tiene 3 ecuaciones linealmente independientes deberá tenerse exactamente como máximos tres valores desconocidos en el problema a resolver. Por ejemplo, si  $F_1$  y  $F_2$  son conocidos, luego los valores desconocidos (incógnitas) son  $F_{3x}$ ,  $F_{3y}$  y  $d_3$ . Las ecuaciones 4.22 (a) y (b) determinan  $F_{3x}$  y  $F_{3y}$ , por lo que  $F_3$  es conocido ahora en magnitud y dirección. La ecuación 4.22(c) se utiliza para encontrar  $d_3$ .

La solución a este problema puede también encontrarse gráficamente trazando un diagrama de fuerzas a una escala conveniente, como se muestra en la figura 4.14 para encontrar  $F_3$ . Ya que la resultante debe ser cero,  $F_3$  es el vector requerido para cerrar el diagrama de fuerzas, la línea de acción puede fácilmente encontrarse. Debido a que el momento respecto a cualquier punto arbitrario debe ser cero. Esta será cero respecto al punto de intersección de las líneas de acción de  $F_1$  y  $F_2$ ; de aquí que  $F_3$  pasará a través de este mismo punto, es decir, las tres fuerzas deben ser concurrentes.

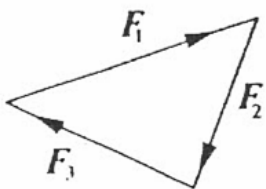


Figura 4.14





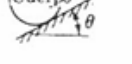

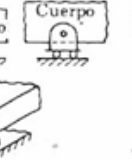
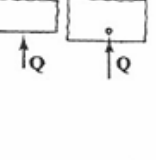

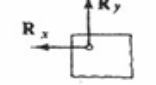
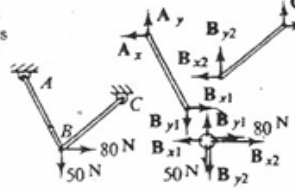





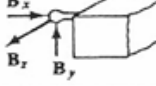
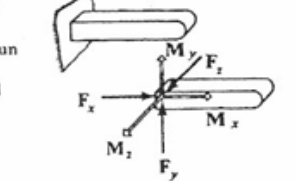
Ecuaciones de equilibrio de sistemas de fuerzas espaciales. En problemas tridimensionales de equilibrio se tienen seis ecuaciones escalares, a saber

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum M_{Ox} &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_{Oy} &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M_{Oz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Para efectuar el análisis de situaciones de equilibrio de cuerpos rígidos debida a la acción de sistemas de fuerzas es necesario hacer los  $dcl$  respectivos donde aparecen las

fuerzas externas ejercidas sobre el cuerpo. La tabla 4.3 describe algunos de los tipos más comunes fuerzas que ejercen algunos cuerpos y conexiones principalmente de los soportes y apoyos.

Tabla 4.3.

Tierra			Siempre es una fuerza vertical igual al peso y pasa por el centro de gravedad del cuerpo.
Cuerda flexible, cable (se desprecia el peso)			Siempre es una sola fuerza (de tensión) en la dirección de la cuerda
Superficie lisa			Siempre es una sola fuerza perpendicular a la superficie lisa
Rodillo o esfera			Siempre es una fuerza perpendicular a la superficie sobre la que el rodillo rueda.
Pasador liso			Es una fuerza definida en el eje del pasador, su inclinación es desconocida; usualmente se representa como dos componentes independientes
Pasador liso con fuerzas externas aplicadas en él			Una fuerza definida en el eje del pasador con pendiente desconocida, o dos componentes independientes como se representan aquí. Observe las acciones de igual magnitud y sentido opuesto entre los miembros que se interconectan con el pasador cargado externamente y éste
Cojinete liso			Una fuerza normal al eje con pendiente desconocida; usualmente se representa como dos componentes independientes
Pasador o patín en una guía o ranura lisa			Una fuerza normal a la guía o ranura
Articulación esférica			Una fuerza definida en la articulación con inclinación desconocida; se representa como tres componentes independientes
Apoyo para una viga o poste empotrado en un extremo, caso tridimensional			Una fuerza y un momento representados por sus tres componentes; en los problemas bidimensionales (todas las fuerzas pertenecen al plano xy) omite $F_z$ , $M_x$ y $M_y$ .

Para el análisis de equilibrio de un cuerpo rígido sujeto a la acción de un sistema de fuerzas tridimensionales, se deberán tener como máximo seis valores desconocidos en el problema a resolver, ya que se cuenta con seis ecuaciones linealmente independientes siendo la metodología de la solución del problema todavía la misma que para un cuerpo sujeto a un sistema de fuerzas coplanares excepto que la geometría es más complicada y no se pueden trazar diagramas de fuerzas en un plano. Ahora se puede apreciar los beneficios de la utilización del álgebra vectorial en la solución de problemas tridimensionales. Como un ejemplo consideraremos el problema siguiente.

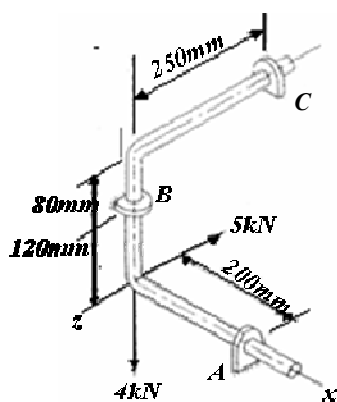


Figura ed4.5(a)

**Ejemplo demostrativo 4.5.** Una barra circular con dos cambios de dirección a  $90^\circ$  como se muestra en la figura ed4.5(a); se apoya en tres cojinetes tal como se indica en esta figura. Calcular la reacción en el cojinete C.

**Solución:** El diagrama de cuerpo libre (*dcl*) definido en la figura ed4.5(b) contiene seis componentes desconocidos de las fuerzas de reacción en los cojinetes; las ecuaciones vectoriales del equilibrio son equivalentes a seis ecuaciones escalares (4.23). Si el centro de momentos se selecciona en A o en B, la ecuación vectorial de momentos correspondiente contendrá cuatro incógnitas únicamente, dos de las cuales son las componentes de la reacción del cojinete C, esta facilita el proceso de solución.

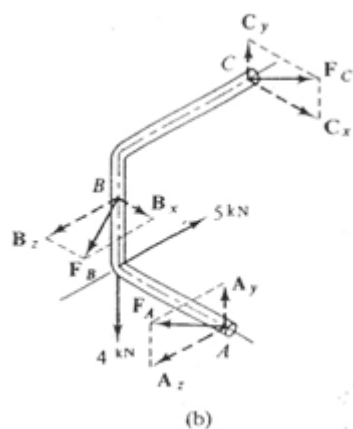


Figura ed4.5(b)

Las componentes de las reacciones se calculan de las ecuaciones vectoriales de equilibrio siguientes:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} &= (A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_z \hat{k}) + (C_x \hat{i} - C_y \hat{j}) - 4 \hat{j} - 5 \hat{k} \\ &= (B_x + C_x) \hat{i} + (A_y + C_y - 4) \hat{j} + (A_z + B_z - 5) \hat{k}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M}_A = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= (-200 \hat{i} + 120 \hat{j}) \times (B_x \hat{i} + B_z \hat{k}) + \\ &+ (-200 \hat{i} + 200 \hat{j} - 250 \hat{k}) \times (C_x \hat{i} + C_y \hat{j}) + \\ &+ (-200 \hat{i}) \times (-4 \hat{j} - 5 \hat{k}) = 0 \\ &= (120 B_x + 250 C_y) \hat{i} + (200 B_z - 250 C_x - 1000) \hat{j} + \\ &+ (-120 B_x - 200 C_x - 200 C_y + 800) \hat{k} = 0\end{aligned}$$



De estas dos ecuaciones vectoriales se obtienen las seis ecuaciones escalares linealmente independientes siguientes:

$$B_x + C_x = 0 \quad (\text{a})$$

$$A_y + C_y = 4 \quad (\text{b})$$

$$A_z + B_z = 5 \quad (\text{c})$$

$$120B_z + 250C_y = 0 \quad (\text{d})$$

$$200B_z - 250C_x = 1000 \quad (\text{e})$$

$$-120B_x - 200C_x - 200C_y = -800 \quad (\text{f})$$

Las ecuaciones (a), (d), (e) y (f) se resuelven simultáneamente para cuatro valores desconocidos, dos de ellas son las componentes de  $F_C$ , cuyos valores determinados son:

$$C_x = -32.0kN \quad \text{y} \quad C_y = 16.8kN$$

de donde

$$F_C = -36.14(-0.885\mathbf{i} + 0.465\mathbf{j})kN \quad \leftarrow^r$$

#### 4.6. Armaduras, Marcos y Máquinas Simples

Las estructuras de ingeniería se crean con miembros rígidos individuales con el propósito de soportar cargas con seguridad y eficiencia.

Aunque hay muchas clases de estructuras, nos limitaremos en esta sección al estudio de estructuras compuestas de barras y vigas unidos por pasadores lisos que actúan como articulaciones, además consideraremos que las barras o vigas, elementos de estas estructuras, están dispuestas en un plano (planos paralelos)

A este tipo de estructuras planas, pertenecen las armaduras, marcos y máquinas simples que analizaremos

su condición de equilibrio para las fuerzas que actúan en las barras o vigas sobre los pasadores o articulaciones de los elementos de este tipo de estructuras.

*Armaduras:* Una armadura es una estructura que puede analizarse como si todos sus miembros fueran miembros o cuerpos de dos fuerzas con cargas aplicadas en la estructura solamente en sus uniones.

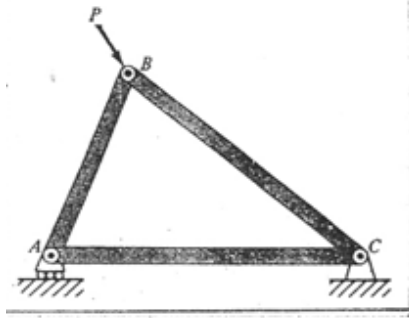


Figura 4.15

Una armadura plana simple se define como aquella que es formada empezando con un triángulo básico; conectadas sus tres barras rectas por pernos en sus extremos; triángulo ABC figura 4.15 y figura 4.16, que tiene tres miembros y tres uniones. Para cada unión adicional en una armadura simple hay dos miembros adicionales. De aquí, si  $m$  es el número total de miembros y  $j$  es el número total de uniones, tenemos  $m - 3 = 2(j - 3)$ . Así en una *armadura plana simple*

$$m = 2j - 3 \quad (4.24)$$

Siendo  $m = 2j - 3$  la condición necesaria para que una armadura plana sea estáticamente determinada estando soportada de una manera apropiada.

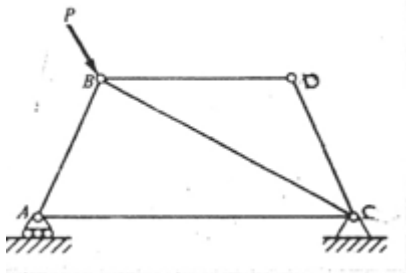


Figura 4.16

El análisis de las fuerzas en una armadura estáticamente determinada es generalmente llevada a cabo por (1) *El método de nodos o uniones*, (2) *método de las secciones* o (3) una combinación apropiada de ambos métodos (1) y (2) cuando la armadura es grande en miembros y uniones.

Antes de aplicar cualquier de estos métodos, es necesario determinar las fuerzas externas de reacción en los soportes de la armadura, esta se obtiene trazando el diagrama de cuerpo libre de la armadura completa, considerando a esta como un cuerpo rígido y aplicando las condiciones de equilibrio se determinan las fuerzas en los soportes. Además tomar en consideración las siguientes suposiciones.

- (a). Cada armadura esta compuesta de elementos rígidos que pertenecen a un mismo plano. Esto significa que el sistema de fuerzas en cuestión es coplanar.

- (b). Los pesos de los elementos se desprecian porque son de pequeño valor comparados con las cargas.
- (c). Las fuerzas se transmiten de un elemento a otro a través de pasadores lisos que ajustan perfectamente en los elementos los que se considera ser cuerpos de dos fuerzas, que pueden estar sometidos a tensión ( $T$ ) o a compresión ( $C$ )

*Método de las uniones o nodos.* Para analizar las condiciones de equilibrio de las fuerzas tanto externas como internas, en los miembros de una armadura plana simple por el método de las uniones, se traza el diagrama de cuerpo libre de cada pasador de los nodos, empezando con una unión que no tenga más de dos fuerzas desconocidas y al menos una fuerza conocida.

Se impone esta limitación porque el sistema de fuerzas actuando en cada nodo es concurrente, de modo que solo puede disponerse, como es natural, de dos ecuaciones linealmente independientes para su resolución. Así se va pasando de un pasador a otro hasta que se hayan determinado todas las incógnitas.

*Método de las secciones:* En el método de las uniones, se hallan las fuerzas en los distintos miembros de la armadura utilizando los diagramas de cuerpo libre de los pasadores, tal como se ha expuesto. En el método de las secciones, se toma el diagrama de cuerpo libre de una parte de la armadura.

Para aislar esta parte, debe hacerse un corte a un cierto número de miembros, incluyendo miembros de fuerzas desconocidas. Las fuerzas en los miembros cortados actúan como fuerzas externas (todas saliendo de la unión inmediata) asegurando el equilibrio de la parte aislada; preferentemente la que tenga menos fuerzas aplicadas; asegurando el equilibrio de la parte aislada. Puesto que el sistema de fuerzas aplicadas a esta parte aislada no es concurrente y no paralelo, se dispone de tres ecuaciones de equilibrio, por lo que, en una sección o parte de la armadura no puede haber más de tres fuerzas

desconocidas. Hay que asegurarse de haber aislado completamente la parte apropiada en el *dcl* y al mismo tiempo, de no tener más de tres fuerzas desconocidas.

Una armadura plana servirá para examinar algunas de las aplicaciones de equilibrio. Otra vez el concepto de diagrama de cuerpo libre es de importancia, veamos un ejemplo demostrativo de aplicación de los métodos de las uniones y de las secciones.

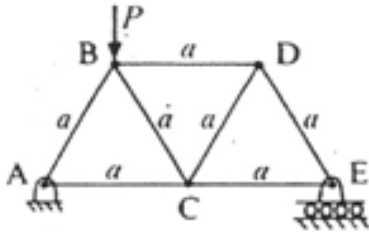


Figura 4.17

Ejemplo demostrativo 4.6. La armadura mostrada en la figura 4.17 está constituida de barras las que se consideran estar conectadas en sus extremos por pernos lisos.

Un diagrama de cuerpo libre de una barra típica (figura 4.18) muestra de inmediato que la carga es puramente axial en todas las barras con tal de que las cargas son aplicadas solamente en las uniones.



Figura 4.18

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \therefore & P - Q = 0 \\ \sum F_y &= 0 & \therefore & R + S = 0 \\ \sum M_O &= 0 & \therefore & Sa = 0\end{aligned}$$

Por consiguiente  $S=0$ ,  $R=0$  y  $P=Q$

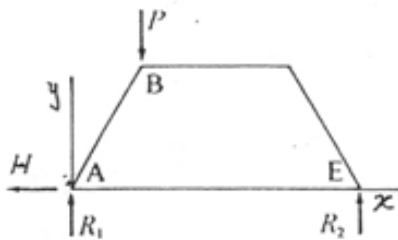


Figura 4.19

El diagrama de cuerpo libre para la armadura completa es mostrado en la figura 4.19. Para el equilibrio de la armadura las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -H = 0 & (i) \\ \sum F_y &= R_1 + R_2 - P = 0 & (ii) \\ \sum M_A &= (2a)R_2 - \left(\frac{1}{2}a\right)P = 0 & (iii)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\text{de (iii), } R_2 = \frac{1}{4}P$$

$$\text{de (ii), } R_1 = \frac{3}{4}P$$

$$\text{de (i), } H = 0$$

Se observa que la forma de soportar la armadura asegura que se tengan exactamente tres fuerzas de reacción desconocidas. Las reacciones en este caso se dice son estáticamente determinadas. También escasa o débil forma de soportar la armadura permitirá la posibilidad de colapso de la misma y por supuesto demasiados soportes provoca que las reacciones dependerán de las propiedades elásticas de la armadura.

Si las fuerzas que actúan en los miembros de la armadura en forma individual son solicitados entonces estas fuerzas deberán mostrarse en un *dcl* apropiado, en el caso de la aplicación del método de las uniones, por un *dcl* de la unión o nodo respectivo, y en el caso del método de las secciones del *dcl* de la parte seccionada mas conveniente que muestra como máximo 3 miembros que sus fuerzas sean desconocidas; en la aplicación del método de las uniones, consideraremos la unión A (figura 4.20) en la que se tienen dos fuerzas desconocidas actuando sobre este nodo, por lo tanto

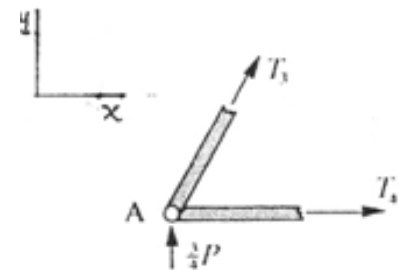


Figura 4.20

$$\sum F_x = \frac{1}{2}T_3 + T_4 = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = \frac{3}{4}P + \frac{\sqrt{3}}{2}T_3 = 0 \quad (b)$$

Por consiguiente de la ecuación (b)

$$T_3 = -\frac{3(2)P}{4\sqrt{3}} = -\frac{3P}{2\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\text{y de (a)} \quad T_4 = -\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{3P}{2\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{3P}{4\sqrt{3}} \quad (2)$$

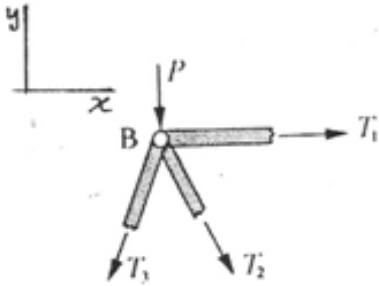


Figura 4.21

Consideremos el *dcl* de la unión *B* (figura 4.21). En este nodo hay dos fuerzas desconocidas ( $T_1$  y  $T_2$ ) y dos fuerzas conocidas ( $P$  y  $T_3$ ) y dos ecuaciones de equilibrio linealmente independientes  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$  por lo que:

$$\sum F_x = T_1 + \frac{1}{2}T_2 - \frac{1}{2}T_3 = 0 \quad (c)$$

$$\sum F_y = -P - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_3 = 0 \quad (d)$$

Por lo que sustituyendo el valor de  $T_3$  de (1) en (d) se tiene:

$$-P - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3P}{2\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$-P - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 + \frac{3P}{4} = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}T_2 - \frac{P}{4} = 0$$

Por lo que 
$$T_2 = -\frac{2P}{4\sqrt{3}} = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \quad (3)$$

y sustituyendo el valor de  $T_3$  de (1) y de  $T_2$  de (3) en (c) se tiene:

$$T_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{P}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3P}{2\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$T_1 - \frac{P}{4\sqrt{3}} + \frac{3P}{4\sqrt{3}} = 0$$

$$T_1 + \frac{P}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\therefore T_1 = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

De esta forma se continúa analizando las demás uniones de la armadura hasta encontrar el valor de todas las fuerzas desconocidas.

No siempre es necesario determinar los valores de todas las fuerzas internas en los miembros de la armadura. En el caso de que se solicitara sólo los valores de las fuerzas internas de algunos miembros  $BC$  y  $BD$ , entonces es más conveniente utilizar el método de las secciones para el análisis de equilibrio. Para lo cual, se toma al *dcl* de la parte de la armadura donde se tengan estos miembros en particular (figura 4.22) que muestran las fuerzas de estos miembros  $BC$  y  $BD$ . Por lo que aplicando las ecuaciones de equilibrio para esta parte, tenemos:

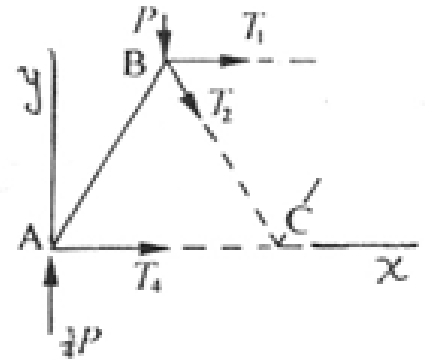


Figura 4.22

$$\sum F_x = T_1 + \frac{1}{2}T_2 + T_4 = 0 \quad (i)$$

$$\sum F_y = \frac{3}{4}P - P - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 = 0 \quad (ii)$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{AB} \times \left( T_1 \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}T_2 \hat{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 \hat{\mathbf{j}} - P \hat{\mathbf{j}} \right) = 0 \\ 0 &= \left( \frac{1}{2}a \hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}a \hat{\mathbf{j}} \right) \times \left( T_1 \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}T_2 \hat{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 \hat{\mathbf{j}} - P \hat{\mathbf{j}} \right) \\ 0 &= -\frac{\sqrt{3}}{4}aT_2 \hat{\mathbf{k}} - \frac{Pa}{2} \hat{\mathbf{k}} - \frac{\sqrt{3}}{2}aT_1 \hat{\mathbf{k}} - \frac{\sqrt{3}}{4}aT_2 \hat{\mathbf{k}} \\ 0 &= \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}aT_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}aT_2 - \frac{Pa}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (iii) \end{aligned}$$

de (ii) se tiene

$$T_2 = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \quad (3')$$

sustituyendo (3') en (iii) nos da

$$T_1 = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \quad (4')$$

y sustituyendo (4') en (i) se obtiene:

$$T_4 = -\left( -\frac{P}{2\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{P}{2\sqrt{3}} \right) \right)$$

$$= \frac{2P + P}{4\sqrt{3}} = \frac{3P}{4\sqrt{3}} \quad (2')$$

Comprobándose que por el método de las secciones se obtuvieron los mismos resultados para el miembro  $AC$ ,  $BC$  y  $BD$  que con el método de uniones y nodos.

Para el análisis de equilibrio de armaduras realizado por ambos métodos; uniones o secciones; se debe observar lo siguiente:

- a). Las fuerzas de los miembros que empujan hacia el nodo, es decir se dirigen hacia el nodo son fuerzas de compresión ( $C$ ), y las fuerzas que jalan del nodo, es decir salen del nodo o unión son fuerzas de tensión ( $T$ ).
- b). Se tienen dos maneras de elegir el sentido de las fuerzas en los  $dcl$ , ya sea para el análisis empleando el método de uniones o de las secciones; una es elegir el sentido de la fuerza por conocer, de acuerdo con las fuerzas conocidas, deduciendo que elementos están a tensión o a compresión; la otra manera es elegir todas las fuerzas por conocer en los  $dcl$ , tanto para el método de las uniones como para el método de las secciones, todas en tensión; si al terminar el análisis de cada  $dcl$  los resultados de las fuerzas son con signo (-) negativos, indica que el sentido de las fuerzas es contrario. Para el análisis por el método de las uniones, si el resultado de la fuerza en un miembro es negativa no cambiarlo, arrastrarlo todo el proceso con este signo negativo.

*Marcos y máquinas simples:* Un marco o bastidor conectado por pernos difiere de una armadura en que ya no todos los miembros están conectados en sus extremos y las cargas pueden ser aplicadas en cualquier punto de la estructura. Al menos uno de los miembros deberá estar sujeto por tres o más fuerzas. De esta manera las fuerzas en las uniones que mantienen el marco ensamblado tendrá componentes en  $x$  y  $y$ .



*Una máquina simple difiere de un marco o bastidor en que ésta es diseñada para transmitir y transformar fuerzas de entrada en fuerzas de salida más que soportar cargas. Los marcos son estructuras rígidas mientras que las máquinas son estructuras no rígidas. En el estudio de máquinas simples estamos interesados con la relación entre fuerzas de entrada y salida necesarias para el equilibrio.*

Como veremos no es factible analizar un marco seccionando una parte de la estructura en algunos miembros de la misma, como hicimos en las armaduras. En vez de ello, consideraremos separadamente el diagrama de cuerpo libre para cada miembro de este tipo de estructura donde, todos o algunos están sujetos a la acción de multifuerzas (tres o más fuerzas) a este procedimiento se denomina *método de los miembros*.

El mismo método se usará para la resolución de marcos y máquinas.

Aún cuando el marco esta conectado por pernos éste podría ser estáticamente indeterminado. Para estudiar esta situación para cualquier marco dado, primero reconoceremos los miembros multifuerza y trazaremos por separado el diagrama de cuerpo libre de cada miembro del marco y comparando el número de valores de fuerza desconocidos que aparezcan en estos diagramas; con el número de ecuaciones linealmente independientes disponibles, con estos diagramas de cuerpo libre.

Cuando el número de incógnitas y ecuaciones resultan ser iguales al sistema (marco con fuerzas aplicadas), este será estáticamente determinado y completamente restringido. Si existen más incógnitas que ecuaciones, el sistema es estáticamente indeterminado. Si se tienen menos incógnitas que ecuaciones independientes, el sistema no esta completamente restringido; tal estructura es nombrada no rígida. Las máquinas simples y mecanismos son marcos parcialmente restringidos.

Para ilustrar el método de análisis para el equilibrio y

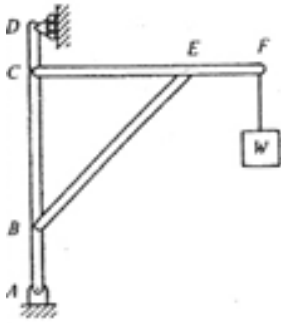


Figura 4.23(a)

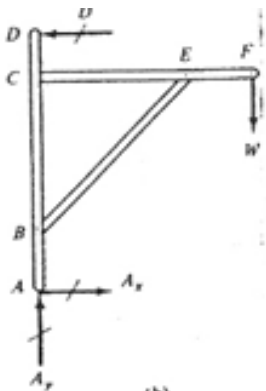


Figura 4.23(b)

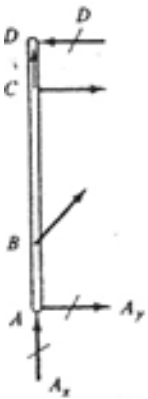


Figura 4.23(c)

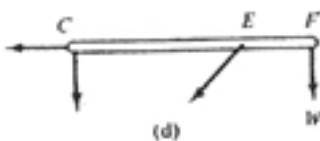


Figura 4.23(d)

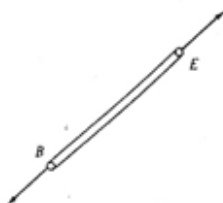


Figura 4.23(e)

calculadas las fuerzas a que están sujetos los elementos de los marcos y máquinas simples, denominado método de los miembros, consideremos el marco de la figura 4.23(a) el que sostiene una carga  $W$ . El marco consiste de tres miembros conectados por pernos lisos. Este marco se soporta por un pasador liso en  $A$  y por un rodillo en  $D$ .

Un diagrama de cuerpo libre del marco completo se muestra en la figura 4.23(b). Las cargas externas y las fuerzas de reacción en los soportes resultan visibles en el marco. Estas son el peso  $W$  en  $F$ ;  $A_x$  y  $A_y$  componentes horizontal y vertical de la reacción del pasador liso en  $A$ ; y la reacción del rodillo en  $D$ . Las reacciones internas que sostienen el marco unido en sus miembros, no son mostrados en este *dcl*. Para determinar las fuerzas que sostienen el marco unido, se separan los miembros del marco y se trazan los *dcl* para cada miembro. Las fuerzas en los pasadores son ahora externas y deberán mostrarse en los respectivos *dcl*.

Los diagramas de cuerpo libre (*dcl*) para los tres miembros del marco se muestran en la figura 4.23 (c), (d) y (e). De conformidad con la tercera ley de Newton, las fuerzas en  $C$  sobre el miembro  $AD$  están en direcciones opuestas de las fuerzas en el miembro  $CF$ . En forma similar, la fuerza en  $B$  sobre el miembro  $AD$  es opuesta a la fuerza sobre el miembro  $BE$  y las fuerzas en  $E$  sobre el miembro  $CF$  es opuesta a la fuerza en el miembro  $BE$ .

El miembro  $BE$  es un eslabón corto; un caso especial de un miembro de dos fuerzas; actuando las fuerzas a lo largo de este miembro. Si los tres diagramas de cuerpo libre para los miembros del marco se unen, las fuerzas en  $B$ ,  $C$  y  $E$  se anulan y tenemos un diagrama de cuerpo libre para el marco completo.

En los ejemplos de discusión de esta unidad se explica el procedimiento etapa por etapa del método de los miembros, requerido para resolver problemas de marcos.

#### 4.7. Cables Flexibles

Un cable flexible tiene resistencia despreciable a la flexión de tal forma que la resultante de las fuerzas internas sobre su sección transversal es una fuerza de tensión tangente al eje longitudinal del cable. En muchas estructuras, tales como puentes colgantes y líneas de transmisión de energía, los cables –considerados como elementos flexibles– se suspenden entre apoyos y quedan sometidos a la acción de cargas verticales que pueden ser cargas distribuidas a lo largo de la longitud del cable o cargas concentradas actuando en ciertos puntos de su longitud.

La carga distribuida vertical que actúa sobre los cables es de dos tipos (1) la carga se distribuye uniformemente sobre la luz horizontal y (2) la carga se distribuye uniformemente sobre el cable; es decir, sobre su arco. El peso de un puente colgante es un buen ejemplo de una carga distribuida uniformemente sobre la luz horizontal. Los cables cargados en esta forma adoptan la configuración de parábolas.

El peso de un cable homogéneo de sección transversal constante es un ejemplo de una carga distribuida uniformemente sobre su arco, bajo la acción de una carga de su propio peso, el cable adopta la configuración de una catenaria.

El término *flecha*, en el contexto significa, *la diferencia en elevación o nivel entre el punto mas bajo del cable y un apoyo*. Cuando los apoyos no se encuentran a igual nivel, la flecha medida a partir de un apoyo es diferente de la medida a partir del otro apoyo. *La luz horizontal es la distancia horizontal entre los apoyos*.

*Cable parabólico.* Si la carga vertical distribuida que actúa en el cable es de  $W$  unidades de fuerza por unidad de longitud *horizontal* ( $N/m$ ); el cable adopta como sabemos una forma parabólica, tal como se muestra en la figura 4.24. En la figura, los soportes están al mismo nivel. Se desprecian las variaciones de temperatura que pueden

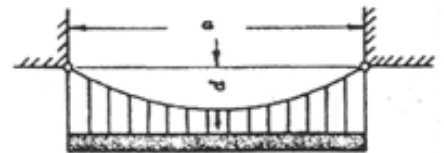


Figura 4.24

Producir variaciones en la tensión.

A este sistema con fuerzas coplanares se le aplican las siguientes ecuaciones:

$$d = \frac{Wa^2}{8H} \quad (1)$$

Esta ecuación se obtiene de  $y = \frac{W}{2H}x^2$

Ecuación de la parábola

$$T = \frac{1}{2}Wa\sqrt{1 + \frac{a^2}{16d^2}} \quad (2)$$

$$L = a \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{d}{a} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{d}{a} \right)^4 + \frac{256}{7} \left( \frac{d}{a} \right)^6 + \dots \right] \quad (3)$$

donde  $d$  = flecha [m]

$W$  = carga [N/m]

$a$  = luz (claro) [m]

$H$  = Tensión horizontal (punto  $(0, C)$ ) [N]

$T$  = Tensión en los soportes [N]

$L$  = Longitud del cable [m]



Figura 4.25

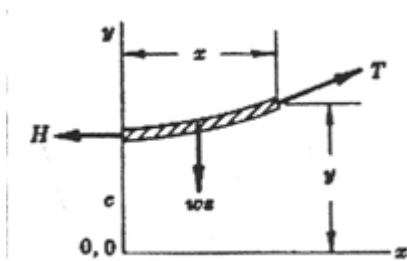


Figura 4.26

*Cable catenario.* Este cable sostiene una carga en N/m a lo largo del cable, en vez de horizontalmente como en el caso parabólico. En este caso, el cable adopta la forma de una curva catenaria tal como se ilustra en la figura 4.25 de un cable que está suspendido desde dos apoyos al mismo nivel.

Para resolver este tipo de problemas, despreciando los cambios de temperatura, y de acuerdo con el *dcl* figura 4.26.

$T$  = Tensión a una distancia  $x$  del eje  $y$  [N]

$s$  = Longitud del cable desde el punto  $(0, C)$  al punto que la tensión es  $T$  [m]

$W$  = Carga en N/m a lo largo del cable [N/m]

$a$  = luz (claro) [m]

$$\begin{aligned}
 d &= \text{flecha [m]} \\
 L &= \text{Longitud total del cable [m]} \\
 H &= \text{Tensión en el punto } (0, C) \text{ [N]} \\
 T_{\max} &= \text{Tensión en el soporte [N]}
 \end{aligned}$$

Con referencia al diagrama de cuerpo libre de una porción de cable a la derecha del punto  $(0, C)$ , figura 4.26 obsérvese que el eje  $x$  está situado a una distancia  $C$  por debajo del centro del cable punto  $(0, 0)$ . Esto simplifica los cálculos.

Las expresiones aplicables a la catenaria son las siguientes. Obsérvese que  $T$  se convierte en  $T_{\max}$  cuando  $x = a/2$  y  $y = c + d$ .

$$C = \frac{H}{W} \quad (i)$$

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad \text{y} \quad c + d = c \cosh\left(\frac{a}{2c}\right) \quad (ii)$$

$$T = Wy \quad \text{y} \quad T_{\max} = W(c + d) \quad (iii)$$

$$s = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \quad \text{y} \quad \frac{L}{2} = c \sinh\left(\frac{a}{2c}\right) \quad (iv)$$

$$y^2 = c^2 + s^2 \quad \text{y} \quad (c + d)^2 = c^2 + \frac{L^2}{4} \quad (v)$$

Los problemas de cables catenarios que queden presentarse, cubre las siguientes condiciones:

- (a) Se conocen la luz y la flecha, o sea,  $a$  y  $d$
- (b) Se conocen la luz y la longitud, o sea,  $a$  y  $L$
- (c) Se conocen la flecha y la longitud, o sea,  $d$  y  $L$

En el caso (a) se resuelve la ecuación (ii) por tanteos para obtener  $c$ . Luego la ecuación (iii) de  $T_{\max}$  y las ecuaciones (iv) y (v) permiten determinar  $L$ .

En el caso (b) se resuelve la ecuación (iv) por tanteos para obtener  $c$ . A continuación la ecuación (v) nos da  $d$  y la (iii) sirve para determinar  $T_{\max}$ .

En el caso (c) se resuelve la ecuación (v) para hallar  $c$ . Luego puede obtenerse  $T_{max}$  a partir de la ecuación (iii). Para obtener  $a$ , resolver la ecuación (ii) o la (iv).

#### 4.8. Rozamiento

El rozamiento se puede definir como la resistencia por contacto ejercida por un cuerpo sobre un segundo cuerpo cuando este último se mueve o tiende a moverse con respecto al primero. Según esta definición, se observa que el rozamiento es una fuerza que actúa en sentido contrario al movimiento o a la tendencia al movimiento. El rozamiento existe principalmente debido a la aspereza de las superficies en contacto.

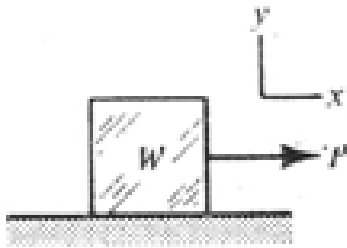


Figura 4.27(a)

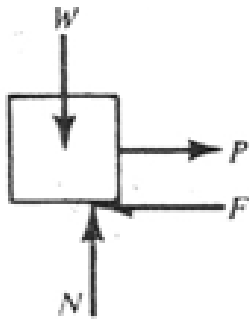


Figura 4.27(b)

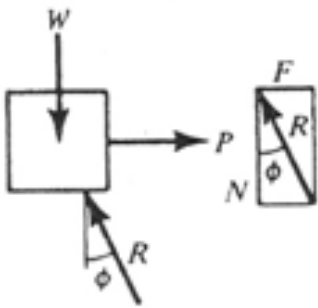


Figura 4.27(c)

En las máquinas el rozamiento es un problema y una ventaja. Donde causa pérdida de potencia y/o desgaste es indeseable. Por otro lado el rozamiento es esencial para diferentes aparatos de sujeción y sostenimiento, lo mismo que para frenos y sistemas de transmisión por rozamiento y, claro está, para proporcionar la tracción cuando se camina o se maneja un automóvil.

Los principales conceptos de la teoría del rozamiento seco se han expuesto en el tema 3.3.2 *principios de rozamiento seco*. Para reforzar la *comprensión* y tratar de aclarar y ampliar este tema que se cubre en esta unidad 4 es conveniente considerar el siguiente experimento simple.

Un bloque de peso  $W$  descansando en una superficie plana horizontal, como se muestra en la figura 4.27(a), esta sujeto a una fuerza horizontal aumentando gradualmente de magnitud  $P$ . El *dcl* de las figuras 4.27(b) y (c) muestran las fuerzas que actúan. Desde luego la fuerza componente normal  $N$  y la componente de la fuerza de rozamiento  $F$ , son en realidad fuerzas distribuidas sobre el área de contacto.

Estando sólo interesados en los efectos externos y movimiento de traslación, tal que el total de cada una de

las fuerzas distribuidas se muestran como una fuerza concentrada. No obstante que no se conoce el punto de aplicación de la fuerza Normal  $N$ , esta no afecta, debido a que no se consideran efectos de rotación.

La figura 4.27(d) expone como la fuerza de rozamiento varía contra la fuerza aplicada  $P$ . Durante la amplitud  $OM$  de rozamiento estático el cuerpo esta en equilibrio; por tanto  $N=W$  y  $F=P$ . La experiencia indica que una vez que el bloque empieza a deslizarse, el rozamiento cae a un valor ligeramente menor que el del rozamiento estático máximo  $F_{m\acute{a}x}$  y luego permanece aproximadamente constante durante el rango cinético  $M'K$ . En el rango cinético el bloque acelera con  $P-F=(W/g)a$ , donde  $a$  es la magnitud de la aceleración, mientras se tenga  $N=W$ , ya que en este caso no existe aceleración vertical.

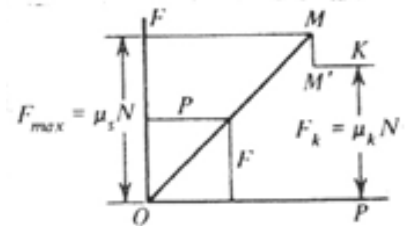


Figura 4.27(d)

La figura 4.27(e) muestra en forma esquemática una vista altamente aumentada de una pequeña parte de dos superficies en contacto, mostrando lo que para el ojo sin ninguna ayuda aparece como una superficie lisa, en realidad tiene un patrón rugoso intrincado. Durante el rozamiento estático algunas de las protuberancias se enredan fuertemente y pueden aun unir pequeñas áreas de las dos superficies en contacto uniéndolas como las fuerzas cohesivas. Una vez que estas uniones son rotas dan lugar al deslizamiento, el rozamiento por deslizamiento es menor que el rozamiento estático máximo.

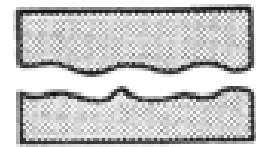


Figura 4.27(e)

*Leyes del rozamiento.* Los principios analizados en las secciones anteriores (3.3.2 y 4.8) se pueden resumir en las siguientes leyes del rozamiento seco que establecen que:

- a). El coeficiente de rozamiento es independiente de la fuerza normal  $N$ , aunque el rozamiento máximo o límite  $F_{m\acute{a}x}$  y el rozamiento cinético  $F_k$  son proporcionales a dicha fuerza  $N$ .
- b). El coeficiente de rozamiento  $\mu$ , es independiente del área de contacto.

- c). El coeficiente de rozamiento cinético  $\mu_k$  es menor que el de rozamiento estático  $\mu_s$ .
- d). A velocidades bajas, el rozamiento es independiente de la velocidad. A velocidades mayores, se observa una disminución del rozamiento.
- e). La fuerza de rozamiento estático nunca es mayor que la necesaria para mantener el cuerpo en equilibrio. En la resolución de problemas con rozamiento estático debe suponerse que la fuerza de rozamiento es una incógnita independiente, a no ser que el problema especifique claramente que el movimiento es inminente. En tal caso la fuerza es la de rozamiento límite o máxima  $F_{m\acute{a}x} = \mu N$  como se establece en la ecuación (3.5.1).

#### 4.9. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

##### *Ejemplos de Discusión*

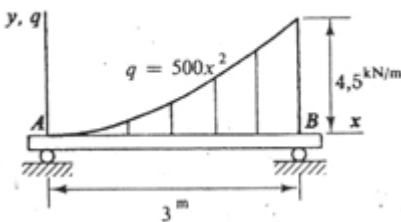


Figura 4.28(a)

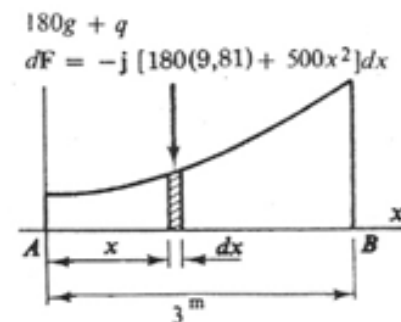


Figura 4.28(b)

Ejemplo 4.1. La viga representada en la figura 4.28(a) tiene una masa de  $180\text{kg/m}$  y esta sometida a la acción de una presión externa que varía en la forma indicada en la misma figura. La presión  $q = 500x^2$  se expresa en Newtons por metro lineal y la distancia  $x$  expresada en metros se mide a partir del apoyo izquierdo. Calcule la resultante del peso y de la presión que actúa sobre la viga.

Solución: En la figura 4.28(b) se representa la intensidad de la carga combinada que actúa sobre la viga. La fuerza diferencial  $dF$  que actúa a la distancia  $x$  del extremo izquierdo es igual al producto de la intensidad de la carga resultante en  $(\text{N/m})$  y la longitud en  $(\text{m})$ :

$$dF = [(180g - q)(-\hat{j})]dx = [(180 \times 9.81 + 500x^2)(-\hat{j})]dx$$

La fuerza resultante es:



$$\begin{aligned}
 F &= -\hat{j} \int_0^3 (180 \times 9.81 + 500x^2) dx \\
 &= -\hat{j} \left[ 180(9.81)x + \frac{500x^3}{3} \right]_0^3 = 9.797 \text{ kN} \leftarrow^r
 \end{aligned}$$

El momento de la fuerza diferencial  $dF$  con respecto al punto  $A$  es

$$dM_A = x\hat{l} \times dF = x\hat{l} \times (-\hat{j}) [180(9.81) + 500x^2] dx$$

El momento de la fuerza resultante respecto de  $A$  se expresa como

$$\begin{aligned}
 M_A &= -\hat{k} \int_0^3 [180(9.81)x + 500x^3] dx \\
 &= -\hat{k} \left[ \frac{180(9.81)x^2}{2} + \frac{500x^4}{4} \right]_0^3 = (18.070 \hat{k}) \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Es momento también puede expresarse como

$$M_A = x_F \hat{l} \times F = x_F \hat{l} \times (-9.797) \hat{j} = -x_F (9.797) \hat{k}$$

Al igualar estas dos expresiones para  $M_A$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 -18.070 \times 10^3 &= -x_F (9.797 \times 10^3) \\
 \therefore x_p &= \frac{18.070}{9.797} = 1.844 \text{ m} \leftarrow^r
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. La figura 4.29 expone una parte de máquina en equilibrio. La parte es la varilla acodada  $ABC$ , con ángulo  $ABC=120^\circ$ . La varilla está en contacto con otras partes de la máquina (no mostradas) en los puntos  $B$  y  $C$  y originándose en estos puntos, las fuerzas  $F_B$  y  $F_C$ , así como el par  $C_C$ , aplicados a la varilla.  $F_B = (-30\hat{k})\text{N}$ ,  $F_C = (-15\hat{l} - 15\hat{j} - 10\hat{k})\text{N}$  y  $C_C = (-3\hat{j} + 5\hat{k})\text{Nm}$ .

Determine la fuerza y el par en  $A$  aplicados por la varilla

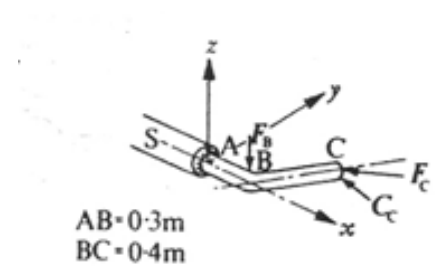


Figura 4.29

al soporte  $S$ . También determine la fuerza directa, la fuerza de corte, el momento torsional y el momento flexionante en el plano de la sección transversal de la varilla en  $A$ .

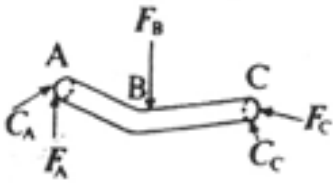


Figura 4.30

Solución. El diagrama de cuerpo libre (figura 4.30) exhibe  $F_B$ ,  $F_C$  y  $C_C$  junto con la fuerza  $F_A$  y el par  $C_A$  aplicados al brazo (varilla) por el soporte  $S$  para mantener el equilibrio.

La fuerza  $F_A$  se encuentra directamente de la ecuación  $\sum \mathbf{F} = 0$ , Así

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C &= 0 \\ \mathbf{F}_A &= -(-30\mathbf{k}) - (-15\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}} - 10\hat{\mathbf{k}}) \\ &= (15\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}} + 40\hat{\mathbf{k}})N \end{aligned} \quad \leftarrow r$$

El par  $C_A$  podría ser hallado tomando momentos con respecto a cualquier punto, pero cualquier error que puede haberse hecho en la determinación de  $F_A$  no será llevado adelante, si el punto elegido es  $A$ .

Los vectores de posición  $r_{B/A}$  y  $r_{C/A}$  se necesitan en la ecuación del momento.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B/A} &= \overrightarrow{AB} = (AB)\hat{\mathbf{i}} = (0.3\hat{\mathbf{i}})m \\ \mathbf{r}_{C/A} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{r}_{C/B} \\ &= 0.3\hat{\mathbf{i}} + (0.4\cos 60^\circ\hat{\mathbf{i}} + 0.4\sin 60^\circ\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (0.5\hat{\mathbf{i}} + 0.346\hat{\mathbf{j}})m \end{aligned}$$

$$\sum \mathbf{M}_A = 0$$

$$= C_A + \left( \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B \right) + \left( \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C \right) + C_C = 0$$

$$\therefore C_A = - \left[ \left( \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B \right) + \left( \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C \right) + C_C \right] \quad (i)$$

Ahora

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = -(-9)\hat{j} = (9\hat{j})Nm$$

$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.5 & 0.346 & 0 \\ -15 & -15 & -10 \end{vmatrix} = -(-3.46)\hat{i} - (-5)\hat{j} + (-7.5 + 5.19)\hat{k}$$

$$= (-3.46\hat{i} + 5\hat{j} - 2.31\hat{k})Nm$$

$$\text{y } \mathbf{C}_C = (-3\hat{i} + 5\hat{k})Nm$$

Sustituyendo valores en la ecuación (i), encontramos

$$\mathbf{C}_A = (6.46\hat{i} - 14\hat{j} - 2.69\hat{k})Nm \quad \leftarrow$$

$\mathbf{F}_A$  y  $\mathbf{C}_A$  son la Fuerza y el Par actuando sobre la parte de máquina  $ABC$ . La Fuerza y el Par actuando sobre el soporte  $S$  son  $-\mathbf{F}_A$  y  $-\mathbf{C}_A$ .

Para la sección plana transversal en  $A$  la *Fuerza Directa*,  $F_d$ , es la componente de  $\mathbf{F}_A$ , la cual es paralela al eje de la varilla (Figura 4.31). El vector unitario  $\hat{e}$  para este eje, en el caso presente es  $\hat{i}$  y la componente es esta dirección es

$$F_d = \mathbf{F}_A \cdot \hat{e} = (15\hat{i} + 15\hat{j} + 40\hat{k}) \cdot \hat{i} = 15N \quad \leftarrow$$

La *fuerza de corte*,  $F_S$ , es la componente de  $\mathbf{F}_A$ . La cual es perpendicular al eje de la varilla. En general esta se determina más rápidamente por el teorema de Pitágoras, ya

que  $F_S = \sqrt{F_A^2 - F_d^2}$ . Así

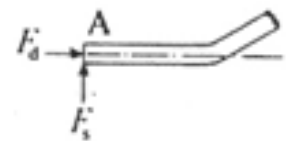


Figura 4.31

$$F_S = \left[ (15^2 + 15^2 + 40^2) - 15^2 \right]^{1/2} = 42.72 \text{ N} \quad \leftarrow^r$$

En forma alternativa podemos encontrar  $F_S$ , de

$$\begin{aligned} F_S &= |\mathbf{F} \times \mathbf{e}| = \left| (15\hat{i} + 15\hat{j} + 10\hat{k}) \times \hat{i} \right| \\ &= \left| (-15\hat{k} + 40\hat{j}) \right| = \left[ 15^2 + 40^2 \right]^{1/2} \\ &= 42.72 \text{ N} \quad \leftarrow^r \end{aligned}$$

El momento torcional,  $C_t$ , es la componente de  $C_A$ , la que es paralela al eje de la varilla.

$$C_t = C_A \cdot \mathbf{e} = (6.46\hat{i} - 14\hat{j} - 2.69\hat{k}) \cdot \hat{i} = 6.46 \text{ Nm} \quad \leftarrow^r$$

Finalmente el momento flexionante,  $C_f$ , es la componente de  $C_A$  perpendicular al eje de la varilla.

$$\begin{aligned} C_f &= \left[ C_A^2 - C_T^2 \right]^{1/2} = \left[ 6.46^2 + 14^2 + 2.69^2 - 6.46^2 \right]^{1/2} \\ &= 14.26 \text{ Nm} \quad \leftarrow^r \end{aligned}$$

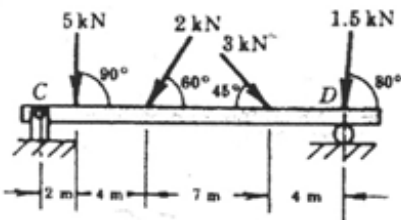


Figura 4.32(a)

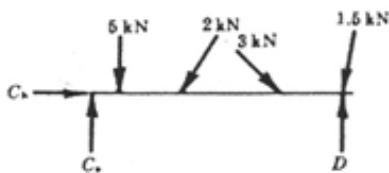


Figura 4.32(b)

Ejemplo 4.3. Hallar las reacciones en la viga, figura 4.32(a). Las cargas están en Kilonewtons (kN). Se desprecian el espesor y la masa de la viga.

*Solución.* En el dcl de la viga, figura 4.32(b), se suponen positivas las componentes horizontal y vertical  $C_h$  y  $C_v$  de la reacción de la articulación en C. La reacción del apoyo de rodillo en D es perpendicular a la viga.

La suma de las fuerzas horizontales nos da una ecuación cuya única incógnita es  $C_h$ .

$$\sum F_h = 0 = C_h - 2\cos 60^\circ + 3\cos 45^\circ - 1.5\cos 80^\circ$$

$$\therefore C_h = -0.861 \text{ kN} \quad \leftarrow^r$$

El signo (-) indica que  $C_h$  actúa hacia la izquierda.

Para hallar la reacción en D, se toman momentos respecto al punto C, teniéndose una ecuación con una incógnita

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 2\hat{i} \times (-5\hat{j}) + 6\hat{i} \times \left[ 2\left(-\frac{1}{2}\hat{i}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) \right] + \\ &+ 13 \times \left[ 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}\right) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right) \right] + \\ &+ 17\hat{i} \times [1.5(-\cos 80^\circ \hat{i}) + 1.5(-\sin 80^\circ \hat{j}) + D\hat{j}] = 0 \\ &= \left[ \left( -10 - 6\sqrt{3} - \frac{39}{\sqrt{2}} - 25.5(0.985) + 17D \right) \hat{k} \right] \text{ kNm} = 0 \\ \therefore D &= \frac{73.087}{17} = 4.299 \text{ kN} \quad \leftarrow\end{aligned}$$

Para encontrar el valor  $C_v$  se toman momentos respecto D por lo que

$$\begin{aligned}\sum M_D &= 17\hat{i} \times C_v \hat{j} + (-15\hat{i}) \times (-5\hat{j}) + (-11\hat{i}) \times \left[ 2\left(-\frac{1}{2}\hat{i}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) \right] + \\ &+ (-4\hat{i}) \times \left[ 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}\right) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right) \right] = 0 \\ &= \left[ \left( -17C_v + 75 + \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{12}{\sqrt{2}} \right) \hat{k} \right] \text{ kNm} = 0 \\ \therefore C_v &= \frac{102.538}{17} = 6.032 \quad \leftarrow\end{aligned}$$

Pueden comprobarse los valores encontrados de  $C_v$  y  $D$  realizando  $\sum F_v = 0$

$$\begin{aligned}\sum F_v &= 6.032 - 5 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1.5\sin 80^\circ + 4.299 = 0 \\ &= 10.331 - 10.330 = 0.001 \approx 0\end{aligned}$$

Ya que el resultado está dentro de los límites de precisión del problema, los valores están suficientemente comprobados.

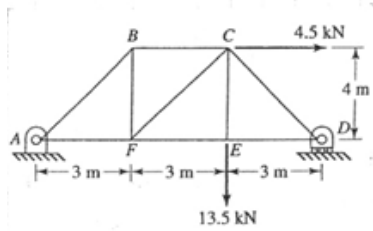


Figura 4.33(a)

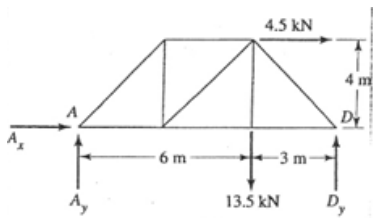


Figura 4.33(b)

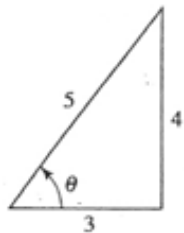


Figura 4.33(c)

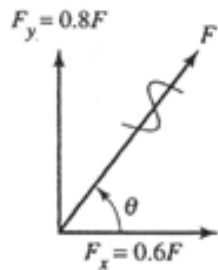


Figura 4.33(d)

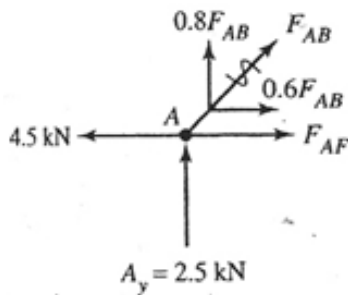


Figura 4.33(a)

Ejemplo 4.4. Usando el método de las uniones encontrar la fuerza en cada miembro de la armadura plana mostrada en la figura 4.33(a).

*Solución.* El diagrama de cuerpo libre de la armadura considerada como un cuerpo rígido es mostrado en la figura 4.33(b). Las componentes en  $x$  y  $y$  de la reacción en  $A$  y la reacción del rodillo  $D$  son expuestas en esta figura. Por tanto para el equilibrio de la armadura completa.

$$\sum M_A = 9D_y - 4(4.5) - 6(13.5) = 0$$

$$\therefore D_y = 11.0 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

$$\sum M_D = 3(13.5) - 9A_y - 4(4.5) = 0$$

$$\therefore A_y = 2.5 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

$$\sum F_x = A_x + 4.5 = 0 \Rightarrow A_x = -4.5 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

La figura 4.33(c) nos indica la pendiente de todos los miembros diagonales de la armadura que es 4:3 y del triángulo rectángulo se tiene  $\text{sen } \theta = \frac{4}{5} = 0.8$  y  $\text{cos } \theta = \frac{3}{5} = 0.6$  y en la figura 4.33(d) se muestran las componentes  $x$  y  $y$  de las fuerzas con la pendiente 4:3.

En la figura 4.34(a)-(f) se han trazado los *dcl* de cada una de las uniones o nodos. Al analizar el equilibrio de cada nuevo *dcl* de un nodo, debe tener no más de dos valores desconocidos. La línea diagonal sobrepuesta entre los componentes o valores desconocidos significa como la fuerza resultante de una de las reacciones externas actuando en la armadura. Las fuerzas internas actuando en cada nodo se han asumido ser de tensión. Empezaremos analizando el nodo  $A$ .

**Nodo A**  $\sum F_y = 2.5 + 0.8F_{AB} = 0$

$$\therefore F_{AB} = 3.125 \text{ kN} \quad (\text{compresión}) \quad \leftarrow$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -4.5 + F_{AF} + 0.6F_{AB} = 0 \\ &= -4.5 + F_{AF} + 0.6(-3.125) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore F_{AF} = 6.375 \quad (\text{tensión})$$

**Nodo**

$$\sum F_x = F_{BC} - 0.6F_{AB} = F_{BC} - 0.6(3.125) = 0$$

$$\therefore F_{BC} = -1.875 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$\sum F_y = -F_{BF} - 0.8F_{AB} = -F_{BF} - 0.8(-3.125) = 0$$

$$\therefore F_{BF} = 2.5 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

**Nodo F** [Figura 4.34(c)]:

$$\sum F_y = F_{BF} + 0.8F_{FC} = 2.5 + 0.8F_{FC} = 0$$

$$\therefore F_{FC} = -3.125 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$\sum F_x = 0.6F_{FC} + F_{FE} - F_{AF} = 0.6(-3.125) + F_{FE} - 6.375 = 0$$

$$\therefore F_{FE} = 8.25 \text{ kN}$$

**Nodo E** [Figura 4.34(d)]:

$$\sum F_x = F_{ED} - F_{FE} = F_{ED} - 8.25 = 0$$

$$\therefore F_{ED} = 8.25 \quad (\text{Tensión})$$

$$\sum F_y = F_{EC} - 13.5 = 0$$

$$\therefore F_{EC} = 13.5 \text{ kN} \quad (\text{Tensión})$$

**Nodo C** [Figura 4.34 (e)]:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 4.5 + 0.6F_{CD} - F_{CB} - 0.6F_{CF} = 0 \\ &= 4.5 + 0.6F_{CD} - (-1.875) - 0.6(-3.125) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore F_{CD} = -13.75 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

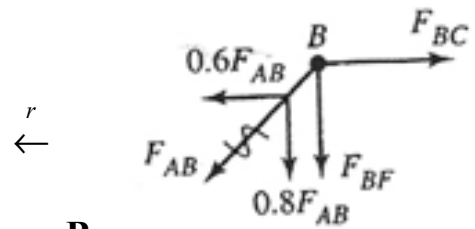


Figura 4.34 (b)

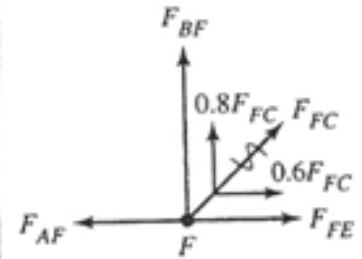


Figura 4.34(c)

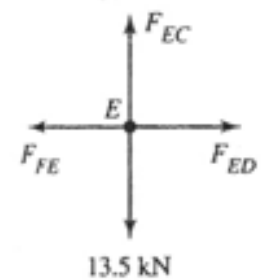


Figura 4.34(d)

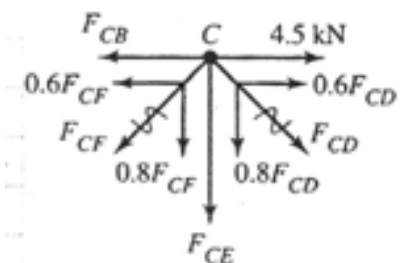


Figura 4.34(e)

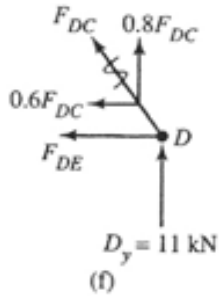


Figura 4.34(f)

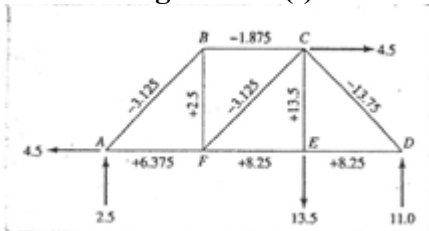


Figura 4.35

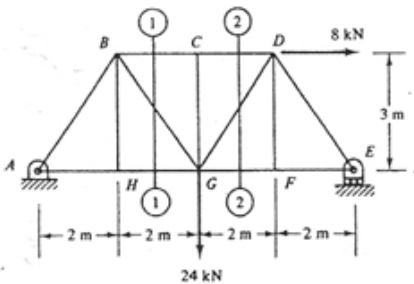


Figura 4.36(a)

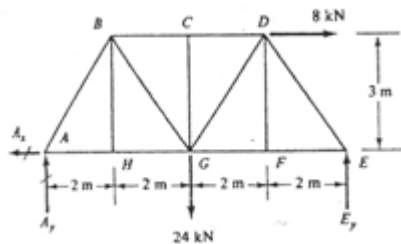


Figura 4.36(b)

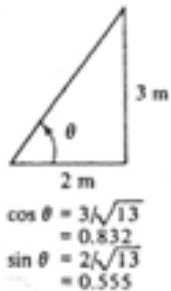


Figura 4.36(c)

Primera comprobación

$$\begin{aligned} \sum F_y &= -0.8F_{CF} - F_{CE} - 0.8F_{CD} \\ &= -0.8(-3.125) - 13.5 - 0.8(-13.75) = 0 \end{aligned}$$

Nodo D [Figura 4.34) (f)]:

Segunda comprobación

$$\sum F_x = -0.6F_{DC} - F_{DE} = 0.6(-13.75) - 8.25 = 0$$

Tercera comprobación

$$\sum F_y = -0.8F_{DC} + 11 = 0.8(-13.75) + 11 = 0$$

En la figura 4.35 se muestran todos los resultados obtenidos para la armadura analizada en este ejemplo 4.4. Los valores positivos en los resultados en los miembros, indican que estos están a tensión y los valores negativos de las fuerzas, los miembros están sujetos a compresión. Todas las fuerzas se expresan en kilo Newtons.

Ejemplo 4.5. Use el método de las secciones para encontrar las fuerzas en los miembros BC, BG, HG y DG de la armadura mostrada en la figura 4.36(a).

Solución: La pendiente de los miembros diagonales de la armadura se determina en la figura 4.36(c). El *dcl* de la armadura completa se muestra en la figura 4.36 (b). Para el análisis de equilibrio de la *armadura completa*:

$$\sum M_A = -8E_y + 4(-24) - 3(8) = 0$$

$$\therefore E_y = -15.0 \text{ kN} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sum M_E = -8A_y - 3(8) + 4(24) = 0$$

$$\therefore A_y = 9.0 \text{ kN} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sum F_x = -A_x + 8 = 0 \Rightarrow A_x = 8.0 \text{ kN} \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Comprobación

$$\sum F_x = -A_y + E_y - 24 = 0 + 15 - 24 = 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$



El diagrama de cuerpo libre (*dcl*) para la parte de la armadura a la izquierda de la sección 1-1 es mostrada en la figura 4.36 (d). Las componentes en  $x$  y  $y$  de la fuerza  $F_{BG}$  son mostrados en el diagrama.

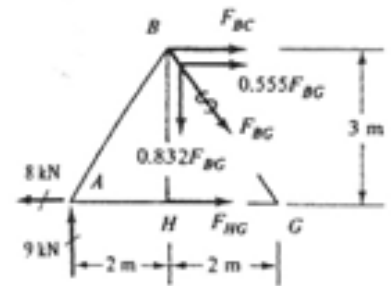


Figura 4.36(d)

Para el análisis de equilibrio de la parte de la armadura a la izquierda de la sección 1-1:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 3F_{HG} - 3(A_x) - 2(A_y) = 0 \\ &= 3F_{HG} - 3(8) - 2(9) = 0 \Rightarrow F_H = 14\text{kNT} \quad \leftarrow \\ \sum M_G &= -3F_{BC} - 4(9) = 0 \Rightarrow F_{BC} = -12.0\text{kN}(C) \quad \leftarrow \\ \sum F_y &= 9.0 - 0.832F_{BG} = 0 \Rightarrow F_{BG} = 10.82\text{kN}(T) \quad \leftarrow \end{aligned}$$

Comprobación

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{HG} + 0.555F_{BG} + F_{BC} - 8 = 0 \\ &= 14.0 + 0.555(10.82) + (-12) - 8 = 0 \\ &0 \equiv 0 \quad \leftarrow \end{aligned}$$

El diagrama de cuerpo libre para la parte de la armadura a la derecha de la sección 2-2 mostrado en la figura 4.36 (e). Las componentes en  $x$  y  $y$  de la fuerza  $F_{DG}$  es mostrada en este diagrama.

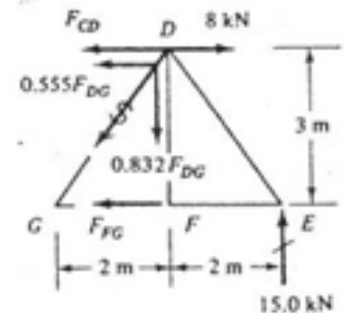


Figura 4.36 (e)

Del equilibrio de la parte de la armadura a la derecha de la sección 2-2, *dcl* figura 4.36 (e):

$$\sum F_y = 15 - 0.832F_{DG} = 0 \Rightarrow F_{DG} = 18.03\text{kN}(T) \quad \leftarrow$$

Ejemplo 4.6 El cuerpo  $G$  de la figura 4.37(a) tiene una masa de  $1500\text{kg}$ , las masas de los otros cuerpos pueden despreciarse. Calcule la fuerza que el pasador  $A$  ejerce sobre el miembro  $AB$ . Puede despreciarse el efecto de rozamiento en las superficies de contacto. El rodillo  $E$  está fijo al miembro  $AB$ .

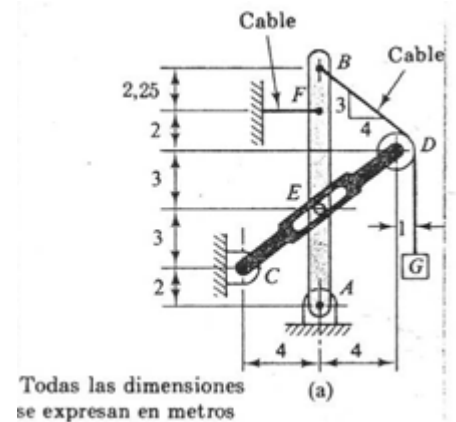


Figura 4.37 (a)

*Solución:* De la figura 4.37(a), se aprecia que para el análisis de equilibrio del marco que esta representa, se

tienen cinco incógnitas para las fuerzas externas que lo mantienen en equilibrio; dos en el apoyo  $A$ , dos en el apoyo  $C$  y el cable tirante en  $F$  y para este sistema de fuerzas coplanares se cuenta solo con 3 ecuaciones independientes para el equilibrio; por lo que se procede a trazar el “ $dcl$ ” de cada miembro principal de este marco como son las de los miembros  $AB$ ,  $CD$  y la polea  $D$ .

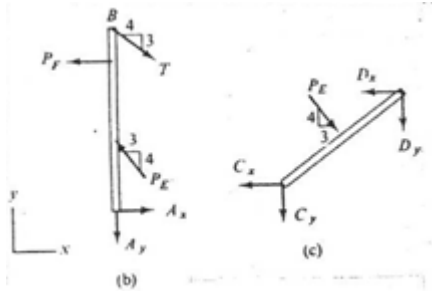


Figura 4.37 (b) y (c)

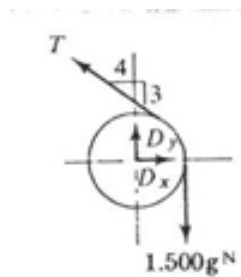


Figura 4.37 (d)

En la figura 4.37 (b) se define el  $dcl$  del miembro  $AB$ . El sistema de fuerzas coplanares no concurrentes cuenta con tres ecuaciones de equilibrio y contiene cinco fuerzas desconocidas. En consecuencia se requiere de otro diagrama de cuerpo libre.

En la figura 4.37(c) se define el  $dcl$  del miembro,  $CD$ , el sistema de fuerzas no coplanares cuenta con cinco incógnitas, Los dos  $dcl$  [4.3 (b), 4.37(c)], contienen nueve incógnitas y se dispone únicamente de seis ecuaciones de equilibrio; en consecuencia se requiere analizar el  $dcl$  de la polea  $D$  figura 4.37 (d). El sistema de fuerzas de este  $dcl$ , cuenta con tres ecuaciones independientes de equilibrio y tres incógnitas. Conocidas estas fuerzas pueden procederse a calcular  $C_x$ ,  $C_y$ , y  $P_E$  a partir del  $dcl$  del miembro  $CD$ . Determinadas estas fuerzas, en el  $dcl$  del miembro  $AB$  quedan tres incógnitas  $A_x$ ,  $A_y$  y  $P_E$ , únicamente. Por tanto el análisis se completa y puede procederse con la solución.

Del  $dcl$  de la polea  $D$  figura 4.37 (d),

$$\begin{aligned}\sum M_D = 0 &= \left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\right) \times \left(-\frac{4}{5}T\hat{i} + \frac{3}{5}T\hat{j}\right) + \hat{i} \times (-1500g\hat{j}) \\ &= \frac{9}{25}T\hat{k} + \frac{16}{25}T\hat{k} - 1500g\hat{k} \\ &= (T - 1500g)\hat{k} \Rightarrow T = 1500g\text{N}\end{aligned}$$

Como vector  $T = 1500g\left(-\frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}\right)\text{N}$  sobre la polea y

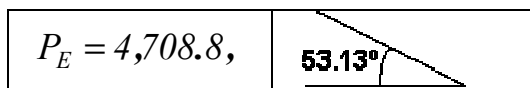
$$\begin{aligned}\sum F = 0 &= (D_x\hat{i} + D_y\hat{j}) - 1500g\hat{j} + (-1200g\hat{i} + 900g\hat{j}) \\ &= (D_x - 1200g)\hat{i} + (D_y - 1500g + 900g)\hat{j} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore D_x = 1200 \text{ gN}, \quad D_y = 600 \text{ gN},$$

Por lo que  $D_x = 11770 \text{ N}$  y  $D_y = 5890 \text{ N}$

Del *dcl* del miembro CD, figura 4.37(c)

$$\begin{aligned} \sum M_C &= (8\hat{i} + 6\hat{j}) \times (-D_x\hat{i} + D_y\hat{j}) - 5P_E\hat{k} = 0 \\ &= (6D_x - 8D_y)\hat{k} - 5P_E\hat{k} = 0 \\ \therefore 5P_E &= 6(1200 \text{ g}) - 8(600 \text{ g}) = P_E = 480 \text{ gN} \\ \text{y} \quad P_E &= 480 \text{ g}(0.6\hat{i} - 0.8\hat{j})\text{N} \end{aligned}$$



Al *dcl* del miembro AB figura 4.37 (b) se aplican las ecuaciones del equilibrio en la forma siguiente:

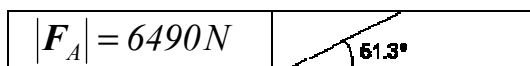
$$\begin{aligned} \sum M_F &= -10\hat{j} \times A_x\hat{i} + (-5\hat{j}) \times (-0.6P_E\hat{i} + (2.25\hat{j}) \times (0.8T\hat{i})) = 0 \\ &= [10A_x - 5(0.6)(480 \text{ g}) + 2.25(0.8)(1500 \text{ g})]\hat{k} = 0 \\ \therefore A_x &= 4060 \text{ N}; \quad A_x\hat{i} = 4060\hat{i} \text{ N} \quad \leftarrow^r \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} \sum F &= A_x\hat{i} - A_y\hat{j} - P_F\hat{i} + 0.8T\hat{i} - 0.6T\hat{j} - 0.6P_E\hat{i} + 0.8P_E\hat{j} = 0 \\ &= (A_x - P_F + 0.8T - 0.6P_E)\hat{i} + (-A_y - 0.6T + 0.8P_E)\hat{j} = 0 \\ \therefore (A_x - P_F + 0.8T - 0.6P_E) &= 0 \quad (1) \\ \text{y} \quad (-A_y - 0.6T + 0.8P_E) &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De la ecuación (2)

$$\begin{aligned} A_y &= -0.6(1500 \text{ g}) + 0.8(480 \text{ g}) = -516 \text{ gN} \\ &= 5061.96 \text{ N} \quad \leftarrow^r \\ F_A &= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} = 4060\hat{i} + 5062\hat{j} \quad \leftarrow^r \end{aligned}$$



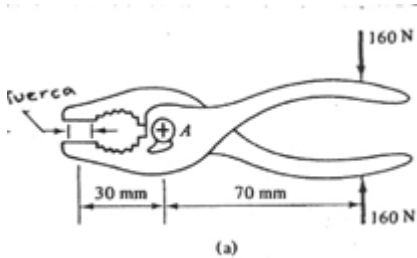


Figura 4.38 (a)

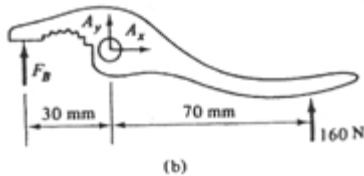


Figura 4.38 (b)

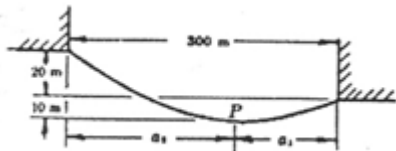


Figura 4.39 (a)

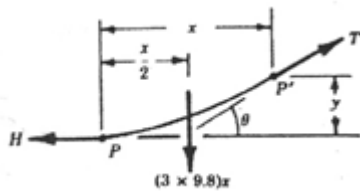


Figura 4.39 (b)

Ejemplo 4.7. Una fuerza es aplicada a los brazos de palanca de las pinzas que se muestra en la figura 4.38(a). Encontrar la fuerza aplicada a la tuerca y las reacciones horizontal y vertical en el gozne *A* de estas pinzas.

*Solución:* El diagrama de cuerpo libre de uno de los miembros de estas pinzas se muestra en la figura 4.38 (b). Para el equilibrio de este brazo se requiere que

$$\sum M_A = 70(160) - 30F_B = 0 \Rightarrow F_B = 373N \quad \leftarrow^r$$

$$\sum F_y = A_x = 0 \quad \leftarrow^r$$

$$\sum F_y = F_B + A_y + 160 = 373 + A_y + 160 = 0 \Rightarrow A_y = -533N \quad \leftarrow^r$$

Ejemplo 4.8. Un cable de  $3\text{kg/m}$  esta suspendido entre dos soportes a distinta altura, tal como muestra la figura 4.39 (a). Calcular la tensión máxima.

*Solución:* En el diagrama de cuerpo libre (*dcl*) de la figura 4.39(b) se representa la parte del cable a la derecha del punto más bajo, cuya ubicación es desconocida. Sea *H* la tensión desconocida del cable en el punto *P* más bajo y *T* la tensión en el punto *P'* a una distancia *x* a la derecha de *P*. El peso del cable para esta distancia *x* es  $(3g)x$  y actúa a una distancia  $\frac{x}{2}$  de *P*. Sumando las fuerzas horizontales y verticales,

$$\sum F_x = 0 = T \cos \theta - H \Rightarrow T \cos \theta = H \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = T \sin \theta - (3g)x \Rightarrow T \sin \theta = (3 \times 9.81)x \quad (2)$$

Dividiendo (2) por (1),  $\text{tg} \theta = (3g)x/H$  Para el *dcl*,

$$\text{tg} \theta = \frac{y}{\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2y}{x}; \text{por tanto, } \frac{(3g)x}{H} = \frac{2y}{x} \quad \text{o sea}$$

$$Hy = \frac{(3g)x^2}{2}. \text{ Puesto que } x = a_1 \text{ cuando } y = 10\text{m,}$$

$$10H = \frac{(3 \times 9.81)a_1^2}{2} = 14.2a_1^2. \text{ Análogamente para la parte a}$$

la izquierda de P,  $30H = 14.7a_2^2$ . Ahora,

$$a_1 + a_2 = 300; \quad \sqrt{\frac{10H}{14.7}} + \sqrt{\frac{30H}{14.7}} = 300 \Rightarrow H = 17.72 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{\frac{10H}{14.7}} = 110 \text{ m}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{30H}{14.7}} = 190 \text{ m}$$

Elevando al cuadrado (1) y (2) y sumándolas se obtiene  $T^2 = 864x^2 + H^2$ . Puesto que la máxima tensión se da en el soporte donde  $x = -190 \text{ m}$ , por lo que

$$T_{\text{máx}}^2 = 864(-190)^2 + (17120)^2 \Rightarrow T_{\text{máx}} = 18.58 \text{ kN} \leftarrow$$

**Ejemplo 4.9.** En el cable ligero soporta cargas puntuales verticales en los puntos  $B, C, D$  y colgado de los apoyos  $A$  y  $E$ , figura 4.40(a). Determinar la tensión en cada segmento del cable.

**Solución:** Al examinar el cable, se observa que se tienen cuatro incógnitas en las reacciones externas ( $A_x, A_y, E_x$  y  $E_y$ ); cuatro tensiones en el cable desconocidas, una en cada segmento del cable. Estas ocho incógnitas junto con las dos incógnitas de las flechas  $y_3$  y  $y_0$  pueden determinarse de diez ecuaciones linealmente independientes disponibles para el equilibrio. Un método es aplicando estas ecuaciones como fuerzas de equilibrio. ( $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ ) para cada uno de los cinco puntos desde  $A$  hasta  $E$ . Ahora, sin embargo, aplicaremos un método más directo.

De acuerdo al *dcl* para el cable entero, figura 4.40(b) por tanto,

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= -A_x + E_x \Rightarrow A_x = E_x \\ \sum M_E = 0 &= -18(A) + 15(4) + 10(15) + 2(3) \\ \therefore A_y &= 12 \text{ kN} \\ \sum F_y = 0 &= 12 - 4 - 15 - 3 + E_y \Rightarrow E_y = 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

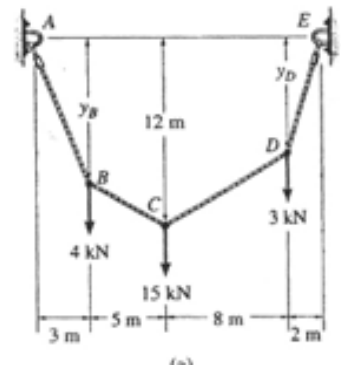


Figura 4.40(a)

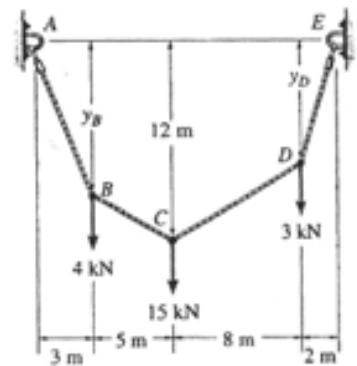


Figura 4.40(b)

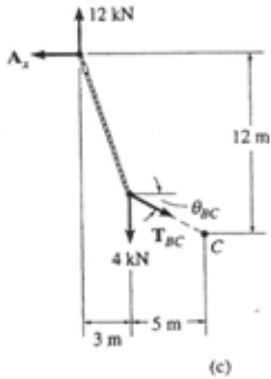


Figura 4.40(c)

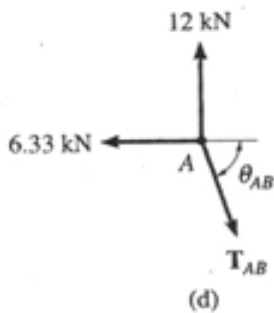


Figura 4.40(d)

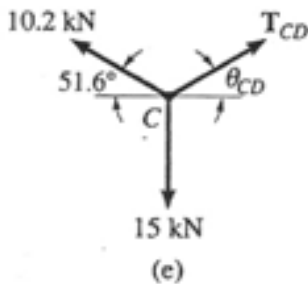


Figura 4.40(e)

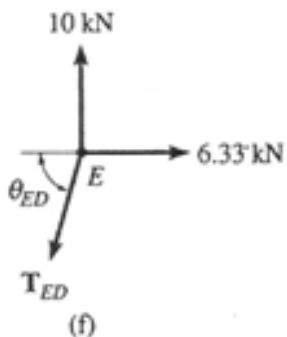


Figura 4.40(f)

Ya que la flecha  $y_C = 12\text{ m}$ , consideraremos la sección izquierda al cortar el cable en el tramo  $BC$ , figura 4.40(c).

$$\sum M_C = 0 = 12(A_x) - 8(12) + 5(4)$$

$$\therefore A_x = 6.33\text{ kN} = E_x$$

$$\sum F_x = 0 = T_{BC} \cos \theta_{BC} - 6.33 \quad (i)$$

$$\sum F_y = 0 = 12 - 4 - T_{BC} \sin \theta_{BC} \quad (ii)$$

Por tanto de (i) y (ii),

$$\theta_{BC} = 51.6^\circ \quad y \quad T_{BC} = 10.2\text{ kN} \quad \leftarrow r$$

Procedamos ahora con el análisis de equilibrio de los puntos A, C y E de acuerdo a los *dcl* respectivos, teniendo

**Punto A** (figura 3.40(d))

$$\sum F_x = 0 = T_{AB} \cos \theta_{AB} - 6.33 \quad (iii)$$

$$\sum F_y = 0 = -T_{AB} \sin \theta_{AB} + 12 \quad (iv)$$

De (iii) y (iv)

$$\theta_{AB} = 62.2^\circ \quad y \quad T_{AB} = 13.6\text{ kN} \quad \leftarrow r$$

**Punto C** (figura 3.40(e))

$$\sum F_x = 0 = T_{CD} \cos \theta_{CD} - 10.2 \cos 51.6^\circ \quad (v)$$

$$\sum F_y = 0 = T_{CD} \sin \theta_{CD} + 10.2 \sin 51.6^\circ - 15 \quad (vi)$$

De (v) y (vi)

$$\theta_{CD} = 47.9^\circ \quad y \quad T_{CD} = 9.44\text{ kN} \quad \leftarrow r$$

**Punto E** (figura 3.40(f))

$$\sum F_x = 0 = 6.33 - T_{ED} \cos \theta_{ED} \quad (vii)$$

$$\sum F_y = 0 = 10 - T_{ED} \sin \theta_{ED} \quad (viii)$$

De (vii) y (viii)

$$\theta_{ED} = 57.7^\circ \quad y \quad T_{ED} = 11.8kN \quad \leftarrow$$

Al comparar los resultados se establece que la tensión máxima en el cable esta en el segmento  $AB$ , ya que este segmento tiene la pendiente mayor ( $\theta$ ) y se reconoce que para cualquier segmento a la izquierda la componente horizontal.  $T\cos\theta=A_x$  (una constante). También, ya que se han determinado los ángulos que hacen los segmentos del cable con la horizontal, se pueda determinar las flechas  $y_B$  y  $y_D$  (figura 4.40(a)) usando la trigonometría.

Ejemplo 4.10. La masa de una escalera homogénea de  $7.8m$  es  $25kg$ . Un extremo de la escalera se apoya sobre una pared vertical lisa y el otro extremo se encuentra sobre el piso a  $3m$  de la pared (ver figura 4.41 (a)). El coeficiente de rozamiento entre la escalera y el piso es  $0.30$ . Calcule el valor de la fuerza de rozamiento que actúa el punto  $A$  de la escalera. Se supone que el centro de masa de la escalera está ubicado en su punto medio.

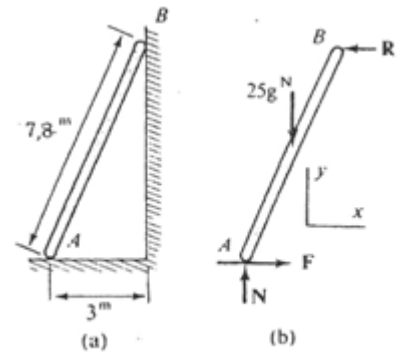


Figura 4.41

Solución: El enunciado de este problema no especifica si el movimiento es inminente o si este existe. Supongamos que el movimiento no es inminente y que la escalera se encuentra en equilibrio, la validez de este supuesto debe verificarse antes de aceptar la solución obtenida. En la figura 4.41(b) se expone el **dcl** de la escalera, la ecuación de equilibrio correspondiente a las fuerzas es:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= F \hat{i} + N \hat{j} - 25(9.81) \hat{j} - R \hat{i} = 0 \\ &= (F - R) \hat{i} + (N - 245) \hat{j} = 0 \\ \therefore \quad N &= 245N \quad y \quad F = R \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio correspondiente a los momentos con respecto a  $B$  es

$$\begin{aligned} \sum M_B &= \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= 3 \hat{i} \times N \hat{j} + (-1.5 \hat{i}) \times (-245 \hat{j}) + (-7.2 \hat{j}) \times F \hat{i} \\ &= (-3N + 386 + 7.2F) \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

o

$$7.2F = 3(245) - 368 = 367 \Rightarrow F = 510N$$

El valor máximo que la fuerza de rozamiento puede adquirir con la fuerza normal  $245N$

$$F' = \mu N = 0.30(245) = 73.5N,$$

que es mayor que los  $51.0N$  requeridos por la condición de equilibrio. En consecuencia, el equilibrio existe y la fuerza de rozamiento es:

$$F = 51.0 \text{ dirigida hacia la derecha en A} \quad \leftarrow$$

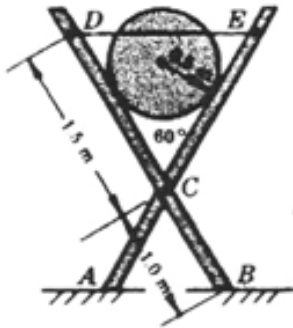


Figura 4.42

**Ejercicios de Trabajo**

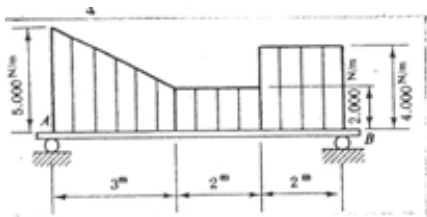


Figura 4.43

4.1. Un cilindro de  $1m$  de diámetro y  $10kg$  de masa esta alojado entre dos piezas cruzadas en ángulo de  $60^\circ$ , como se muestra en la figura 4.42. Hallar la tensión en la cuerda horizontal  $DE$ , suponiendo que el suelo es liso.

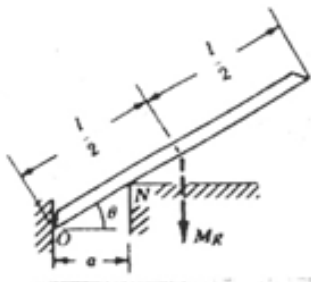


Figura 4.44

4.2. La carga sobre el piso de una bodega se distribuye en tal forma que sobre una de las vigas actúa la fuerza distribuida definida en la figura 4.43. Calcule la fuerza resultante de la carga que actúa sobre la viga. Desprecie la contribución del peso de la viga.

4.3. Una viga esbelta uniforme de masa  $M$  tiene el centro de gravedad en el punto indicado, ver figura 4.44. La arista en que se apoya es aguzada, por lo cual, la reacción  $N$  es perpendicular a la viga. La pared vertical de la izquierda es lisa ¿Cuál es el ángulo  $\theta$  para mantener en equilibrio esta viga?

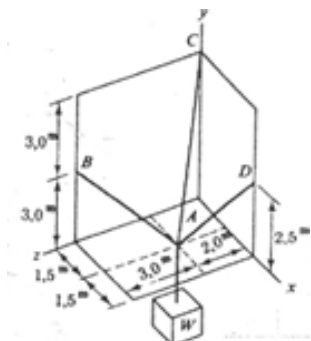


Figura 4.45

4.4. El bloque  $W$  de la figura 4.45 tiene una masa de  $500kg$  y esta soportado por tres cables en la forma ilustrada en la figura. Calcule la tensión del cable  $AB$ .



- 4.5. La polea superior, figura 4.46, cuelga de un soporte fijo. La cuerda esta atada al extremo inferior del chasis de la polea superior y luego pasa por la garganta de la polea inferior. Seguidamente pasa por la garganta de la polea superior y ésta sujeta por una fuerza  $P$ . Demostrar que en el equilibrio la fuerza  $P$  es de  $245N$ . Cuando se cuelga una masa de  $50kg$  del chasis de la polea inferior.

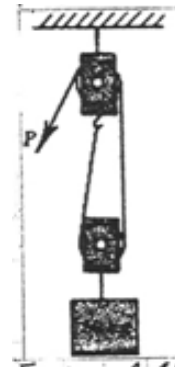


Figura 4.46

- 4.6. La figura 4.47 representa el *dcl* de la parte izquierda de una armadura plana seccionada. Determinar las fuerzas en los miembros  $AB$ ,  $BD$ ,  $FH$ ,  $HG$  y  $GI$  todos los triángulos que hacen los miembros de esta armadura son equiláteros de  $4m$  por lado.

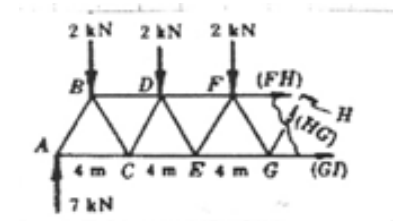


Figura 4.47

- 4.7. La máxima fuerza permitida (tracción o compresión) en los miembros  $DC$ ,  $DF$  o  $EF$  de la armadura de la figura 4.48 se sabe es de  $40 kips$  ( $40000lb$ ) Calcular la carga máxima permitida  $P$  aplicada en  $A$ .

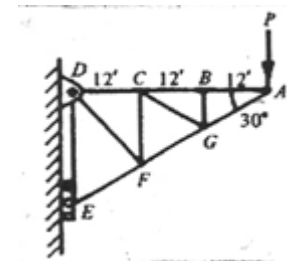


Figura 4.48

- 4.8. Un cable de acero, suspendido entre soportes a la misma altura y separadas  $20m$ , sostiene una carga horizontal de  $2000N/m$ . La tensión máxima permitida es de  $140kN$ . Calcular la longitud necesaria  $L$  del cable y su flecha  $d$ .

- 4.9. El cable ligero (peso despreciable), figura 4.49 separa dos macetas con flores de ornato como se indica, una maceta de  $4kg$  en el punto  $E$  y la otra de  $6kg$  en el punto  $F$ . determinar la tensión máxima en el cable y la flecha  $y_B$  del punto  $B$ .

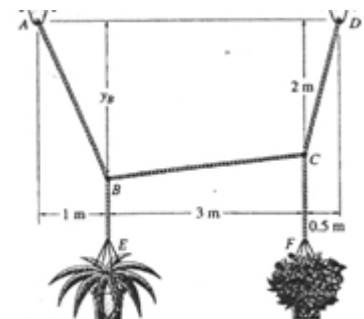


Figura 4.49

- 4.10. Un cable cuya masa es de  $0.6kg/m$  tiene  $240m$  de longitud estando suspendido de tal forma que su flecha sea  $24m$ . Determinar la tensión máxima y la luz máxima entre apoyos.

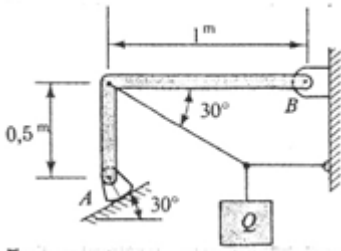


Figura 4.50

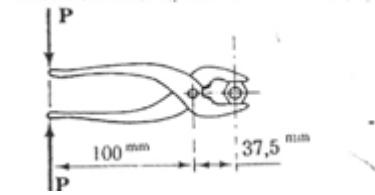


Figura 4.51

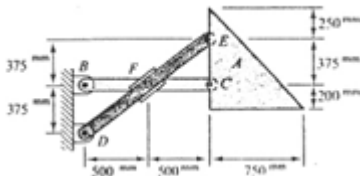


Figura 4.52

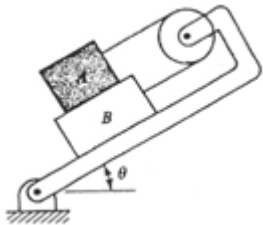


Figura 4.53

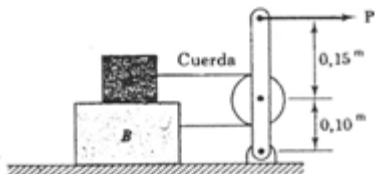


Figura 4.54

4.11. El cuerpo  $Q$  de la figura 4.50 tiene una masa de  $1000\text{kg}$ . Calcule las reacciones que se ejercen sobre el miembro  $AB$  en los puntos  $A$  y  $B$ .

4.12. La presión requerida sobre la tuerca proporcionada por las pinzas, figura 4.51, es de  $50\text{N}$ . Calcule la fuerza que debe aplicarse a las palancas de estas pinzas.

4.13. Los miembros  $BC$  y  $DE$  sustentan la placa triangular homogénea  $A$  de  $600\text{kg}$  representada en la figura 4.52. El miembro  $DE$  puede deslizarse libremente en el bloque  $F$  que se articula al miembro  $BC$ . Calcule las fuerzas que actúan en los puntos  $C$  y  $E$  de la placa.

4.14. La masa del cuerpo  $A$  de la figura 4.53 es el doble del cuerpo  $B$ . Los coeficientes de rozamiento son  $0.30$  entre  $A$  y  $B$  y  $0.20$  entre  $B$  y el soporte giratorio. Calcule el valor del ángulo  $\theta$  para el cual el movimiento se hace inminente.

4.15. El bloque  $A$  de  $5\text{kg}$ , figura 4.54, descansa sobre el bloque  $B$  de  $10\text{kg}$ . Los coeficientes de rozamiento son  $0.40$  entre  $A$  y  $B$  y  $0.25$  entre  $B$  y el piso. Calcule la magnitud de la fuerza  $P$  que se requiere para producir en el sistema el estado de movimiento inminente.

## Parte III Dinámica del Cuerpo en Movimiento Plano

# 5

## CINEMÁTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

### 5.1. Introducción

Hasta ahora hemos considerado situaciones en que el movimiento del centro de masa de un cuerpo era el principal objetivo. Sin embargo, suele ser necesario determinar el movimiento rotacional de un cuerpo, aun cuando el único objetivo sea determinar el movimiento de su centro de masa. Además, el movimiento rotacional en sí puede ser de interés o incluso ser fundamental en el caso que se considere, como ocurre en los movimientos de engranes, rotores de motores y generadores eléctricos.

En este capítulo analizamos la cinemática de los cuerpos en movimiento plano. En particular mostraremos la forma de movimientos de puntos individuales de un cuerpo que se relacionan con su movimiento angular.

Un cuerpo rígido lo hemos definido como un sistema infinito (muy numeroso) de partículas en los que, las distancias entre cualquiera de dos partículas de este cuerpo rígido tiene una magnitud fija o constante. El número de coordenadas requeridas para determinar la posición y orientación de un cuerpo en movimiento plano son tres: El sistema se dice tener “tres grados de libertad”.

Una manera de representar la posición del cuerpo es mostrada en la figura 5.1. La posición de algún punto representativo, tal como  $A$  y el ángulo que el segmento de recta  $AB$  hace con el eje  $x$ , son las tres coordenadas posibles.

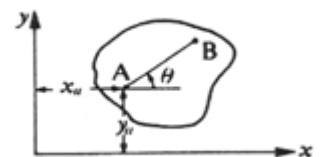


Figura 5.1

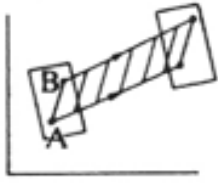


Figura 5.2.



Figura 5.3.

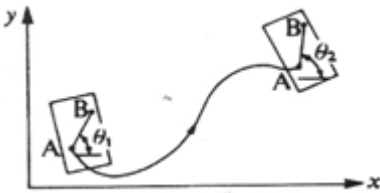


Figura 5.4

## 5.2. Tipos de Movimiento

El tipo más simple de movimiento de un cuerpo rígido es el de traslación rectilínea en el cual,  $\theta$  permanece constante y A se mueve en línea recta (Figura 5.2) de esto se comprende que todas las partículas se mueven en líneas paralelas a la trayectoria de A; por consiguiente la velocidad y aceleración de los puntos son idénticos.

Esto también puede ser válido si A describe una trayectoria curva, siempre y cuando  $\theta$  sea constante, ya que todas las trayectorias son idénticas en forma no obstante que están desplazadas mutuamente una a otra. Este movimiento es llamado traslación curvilínea. (Figura 5.3)

Si el ángulo  $\theta$  cambia durante la traslación, entonces, este movimiento se describe como movimiento plano general (Figura 5.4). En la figura 5.4 el cuerpo se rotó de un ángulo  $(\theta_2 - \theta_1)$ . Si esta variación toma lugar entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , entonces la rapidez angular promedio es:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \omega_{promedio} \text{ cuando } (t_2 - t_1) \rightarrow 0, (\theta_2 - \theta_1) \rightarrow 0, \text{ y la}$$
 rapidez angular se define como:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (5.1)$$

El vector velocidad angular se define teniendo una magnitud igual a la rapidez angular y una dirección perpendicular al plano de rotación, (plano paralelo al eje de rotación), el sentido positivo está dado por la aplicación de la regla del tornillo de la mano derecha.

$$\omega = \omega \mathbf{k} \quad (5.2)$$

Se debe notar que rotaciones y velocidades angulares infinitesimales son cantidades vectoriales, no así, desplazamientos angulares finitos (no son vectores, pues su suma vectorial no es conmutativa)

Un punto de vista muy importante es aquel; referente a que la velocidad angular no es afectada por la traslación, por consiguiente no tenemos un punto específico en el plano, respecto al cual la rotación se suponga que toma lugar.

### 5.3. Movimiento Relativo Entre Dos Puntos en un Cuerpo Rígido

La definición del producto vectorial de dos vectores ha sido ya contemplada en la Unidad 1 y relacionada con el momento de un vector; la misma definición es útil, para expresar la velocidad relativa entre dos puntos en un cuerpo rígido debido a la rotación.

Refiriéndonos a la figura 5.5 se ve que la velocidad  $\mathbf{v}_{B/A}$  tiene una magnitud de  $v_{B/A} = \omega r$ , y esta en la dirección  $\hat{e}_\theta$ . De la definición de producto vectorial (producto cruz) de dos vectores tenemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} &= \omega \mathbf{k} \times r \mathbf{e}_r = \omega r (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r) \\ &= \omega r \mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}_{B/A}\end{aligned}\quad (5.3)$$

Si A y B no están en el mismo plano  $xy$ , tal que el vector:

$$\mathbf{r}_{B/A} = r \mathbf{e}_R + z \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\text{entonces } \mathbf{v}_{B/A} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \\ &= \omega \mathbf{k} \times (r \mathbf{e}_R + z \mathbf{k}) \\ &= \omega r \mathbf{e}_\theta \text{ como en la ecuación 5.3}\end{aligned}$$

debido a que  $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$

Una descripción completa del movimiento de un cuerpo en un plano es posible, si el movimiento de un punto  $A$  del mismo y el movimiento angular del segmento de recta  $\overline{AB}$  son especificados. Así tenemos que:

$$\mathbf{r}_{B/O} = \mathbf{r}_{A/O} + \mathbf{r}_{B/A}$$

y de la ecuación 2.17 tenemos:

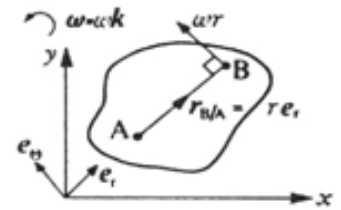


Figura 5.5

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/O} = \dot{\mathbf{r}}_{A/O} + \left( \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \mathbf{e}_r + \omega r_{B/A} \mathbf{e}_\theta \right) \quad (5.4)$$

en forma similar para la ecuación 2.18

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{B/O} &= \dot{\mathbf{r}}_{A/O} + \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{A/O} + \left( -\omega^2 r_{B/A} \mathbf{e}_r + r_{B/A} \omega \mathbf{e}_\theta \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Un caso especial del movimiento plano general es el de la rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo que pasa por un punto  $O$ . En este tipo de movimiento un punto  $A$ , esta permanentemente en reposo, tal que

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/O} = \dot{\mathbf{r}}_{B/A} = \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \omega \mathbf{e}_\theta \quad (5.6)$$

y

$$\ddot{\mathbf{r}}_{B/O} = \ddot{\mathbf{r}}_{B/A} = -\omega^2 r_{B/A} \mathbf{e}_r + \dot{\omega} r_{B/A} \mathbf{e}_\theta \quad (5.7)$$

La aplicación de las ecuaciones de ésta sección a la solución gráfica de mecanismos planos se describe en los siguientes temas a tratar.

Un mecanismo se define como la unión de dos o más cuerpos unidos entre sí, con movimiento relativo entre ellos.

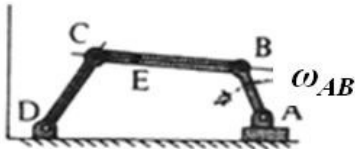


Figura 5.6

#### 5.4. Diagramas de Velocidad

Un mecanismo muy simple todavía en uso es la cadena de cuatro barras mostradas en la figura 5.6. Vemos que si el movimiento de  $AB$  es dado, entonces el movimiento de los elementos o cuerpos restantes del mecanismo puede determinarse.

Esta situación puede resolverse analíticamente, pero la solución es sorprendentemente tediosa y es mejor dejar a una computadora que resuelva el movimiento de éstos elementos si se requiere analizar un número muy grande de posiciones del mecanismo. Sin embargo, una solución simple puede encontrarse usando diagramas vectoriales; éste método gráfico tiene una ventaja, la cual es que nos da una apreciable punto de vista del comportamiento del mecanismo.

Para el trazo de diagramas vectoriales de velocidad y aceleración es muy útil definir una convención para representar los vectores que se involucran. La convención es mejor ilustrada por medio del movimiento plano de dos partículas (Ver figura 5.7)

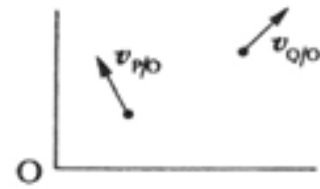







Figura 5.7

La velocidad de P respecto a O se escribe  $v_{P/O}$ . Es obvio que  $v_{O/P} = -v_{P/O}$ , por consiguiente si  $v_{P/O}$  esta representado por una flecha  entonces  $v_{O/P}$  esta representada por , esta información puede reducirse hasta un segmento de recta .

En forma similar el segmento de recta  $oq$  puede trazarse. Así para la figura 5.7 podemos trazar un diagrama vectorial como se muestra en la figura 5.8. La velocidad de



Figura 5.8

$Q$  respecto a  $P$  es entonces  y la velocidad de  $P$  respecto a  $Q$  es  esta convención se usará todo el tiempo.

Regresando a la figura 5.6 y asumiendo que  $\omega_{AB}$  esta en la dirección contraria a las manecillas del reloj y de esta magnitud dada, podemos localizar los puntos  $a, b, d$ , en el diagrama de la figura 5.9. Notemos que  $a$  y  $d$  están en el mismo punto ya que no hay velocidad relativa entre  $A$  y  $D$ .

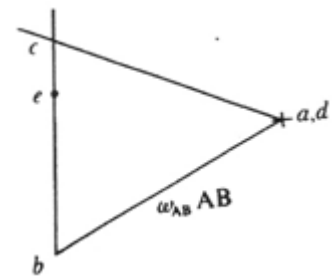


Figura 5.9

Para construir el punto  $c$  podemos ver el movimiento de  $C$  desde dos puntos de referencia, es decir del  $D$  y  $B$ . Ya que  $DC$  es de una longitud fija ó constante, solo el movimiento de  $C$  respecto a  $D$  es perpendicular a  $DC$ ; de aquí que trazamos  $dc$  perpendicular a  $DC$ . En una forma similar la velocidad  $C$  respecto a  $B$  es perpendicular a  $CB$ ; de aquí que trazamos  $bc$  perpendicular a  $BC$ . La intersección de estas dos rectas localiza a  $c$ .

La velocidad angular de  $CB$  se obtiene de  $v_{C/B} / CB$  (en el sentido de las manecillas del reloj). La dirección de rotación se determina observando el sentido de la velocidad de  $C$  respecto a  $B$  y recordando que la velocidad

relativa se debe únicamente a la rotación de  $CB$ .

Notemos de nuevo que la velocidad angular se mide respecto a un plano y no a cualquier punto particular en el plano.

### 5.5. Centro Instantáneo de Rotación

Otro método gráfico es el de los centros instantáneos de rotación.

Los ejes de rotación de  $DC$  y  $AB$  se ven fácilmente, pero  $BC$  que ésta en movimiento plano general no tiene un centro fijo de rotación sin embargo, a cualquier instante habrá un punto de velocidad cero que puede encontrarse observando que la recta que une el centro de rotación de un punto dado es perpendicular a la velocidad de ese punto.

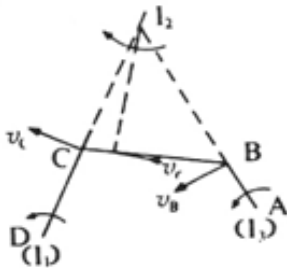


Figura 5.10

En la figura 5.10, el centro instantáneo para el miembro  $BC$  se encuentra en la intersección de  $AB$  y  $DC$ , ya que la velocidad de  $B$  es perpendicular a  $AB$  y la velocidad de  $C$  es perpendicular a  $CD$ .

Si la velocidad de  $B$  es conocida entonces:

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{I_2B} = \frac{v_C}{I_2C} = \frac{v_E}{I_2E} \quad (5.8)$$

Cada punto del eslabón  $CB$ , esta, para este instante considerado rotando respecto a  $I_2$ .

### 5.6. Imagen de Velocidad

Si el diagrama de velocidad se ha construido para dos puntos de un cuerpo rígido en movimiento plano, entonces el punto en el diagrama de velocidad para un tercer punto en el cuerpo o eslabón puede construirse trazando un triángulo en el diagrama vectorial semejante al triángulo del diagrama espacial real de los 3 puntos. De aquí que en nuestro ejemplo previo en el punto  $E$  situado por decir, a una tercera parte de la longitud de  $BC$  desde el punto  $C$  deberá estar representado en el diagrama de velocidad



por un punto  $e$  tal que:  $\frac{ce}{cb} = \frac{1}{3}$ , como se muestra en la figura 5.9

De modo más general, veamos en la figura 5.11, puesto que  $ab$  es perpendicular  $AB$ ,  $ac$  es perpendicular a  $AC$  y  $bc$  es perpendicular a  $BC$ , el triángulo  $abc$  es semejante al triángulo  $ABC$ .

*Problemas con juntas deslizantes:*

En el mecanismo representado en la figura 5.12, el bloque deslizante  $B$  es libre a moverse en la ranura del miembro  $AO$ . Para elaborar un diagrama de velocidad como el mostrado en la figura 5.13, se elige un punto  $B'$  en el eslabón  $AO$  coincidiendo en el lugar de  $B$ . La velocidad de  $B$  relativa a  $C$  es perpendicular a  $CB$ , la velocidad de  $B$  relativa a  $O$  es perpendicular a  $OB'$  y la velocidad de  $B$  relativa a  $B'$  es paralela a la tangente de la ranura en  $B$ .

Los dos mecanismos usados como ejemplos, es decir la cadena cinemática de cuatro barras y el mecanismo manivela corredera, emplean justamente dos clases de conexiones, las cuales son conocidas como pares de rotación y pares de deslizamiento. Es visible como muchos mecanismos son contruidos usando estos dispositivos simples.

**5.7. Diagramas de Aceleración**

Habiendo construido el diagrama de velocidad, ahora es posible trazar el diagrama de aceleración correspondiente. La aceleración relativa entre dos puntos es mostrada en coordenadas polares en la figura 5.14

Si  $AB$  es de una longitud fija o constante, entonces, solamente dos componentes se mantienen (ver figura 5.15), un termino depende de la velocidad angular, la cual se conoce del diagrama de velocidad y la otra componente depende de la aceleración angular, la cual es desconocida en magnitud pero su dirección es perpendicular a  $AB$ .

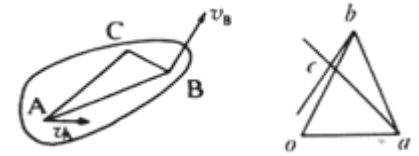


Figura 5.11

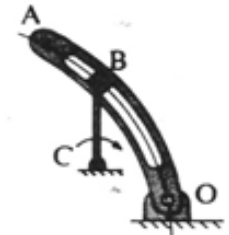


Figura 5.12

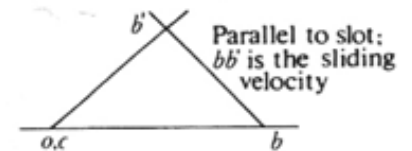


Figura 5.13

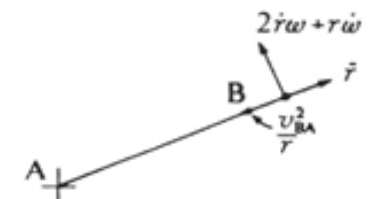


Figura 5.14



Figura 5.15

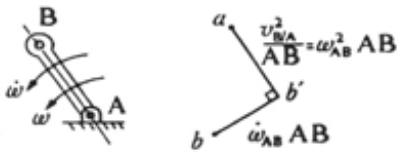


Figura 5.16

Refiriéndonos al mecanismo de 4 barras mostrada en la figura 5.6 y conociendo también la aceleración angular del eslabón  $AB$ , la aceleración del vector de  $B$  respecto a  $A$  puede trazarse (figura 5.16). Obsérvese cuidadosamente la dirección de las aceleraciones:  $B$  está acelerando centrípetamente hacia  $A$ .

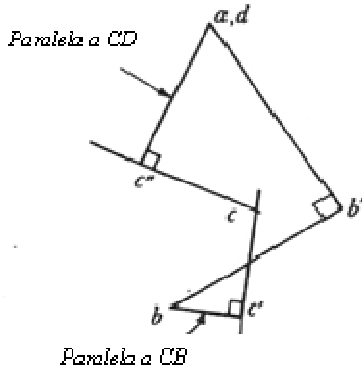


Figura 5.17

El diagrama completo de aceleración para el mecanismo mostrado en la figura 5.17 puede ahora construirse como se muestra en la (figura 5.1) La aceleración de  $C$  es dada por la línea  $ac$  y la aceleración angular de  $CB$  está dada por  $cc'/CB$  (en la dirección de las manecillas del reloj), ya que  $cc' = \omega_{CB} CB$ .

### 5.8. Imagen de la Aceleración

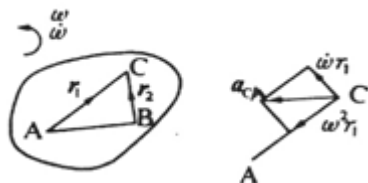


Figura 5.18

De la misma manera que la velocidad de un punto en un cuerpo rígido puede construirse, una vez que, las velocidades de cualesquiera otros dos puntos de este cuerpo son conocidos figura 5.18, la aceleración para un tercer punto de un cuerpo puede encontrarse de las aceleraciones conocidas de otros dos puntos de este cuerpo.

$$a_{C/A} = -\omega^2 r_1 e_{r_1} + \omega r_1 e_{\theta_1}$$

$$a_{C/B} = -\omega^2 r_2 e_{r_2} + \omega r_2 e_{\theta_2}$$

De la figura 5.18, el ángulo entre  $a_{C/A}$  y  $r_{A/C}$

$$\arctan\left(\frac{\omega r_1}{\omega^2 r_1}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega^2}\right)$$

Ángulo que es independiente de  $r_1$ . El ángulo entre  $a_{C/A}$  y  $a_{C/B}$  es por consiguiente el mismo como el ángulo entre  $r_1$  y  $r_2$ ; por tanto el triángulo  $abc$  en el diagrama de la aceleración es similar al triángulo  $ABC$ .

### 5.9. Tren de Engranajes de Dientes Rectos

Cuando dos engranes rectos como los mostrados en la figura 5.19, están enlazados (engranados), la relación de velocidad entre las ruedas dentadas será una relación entera; si los ejes de rotación son fijos. Si dos ruedas dentadas están enlazadas o engranadas, entonces, deberán tener el mismo paso circular, esto es la distancia entre dientes sucesivos medida a lo largo de la circunferencia de paso deberá ser la misma para ambas ruedas dentadas.

Circulo de paso



Figura 5.19

Si  $N$  es el número de dientes de una rueda dentada o engrane entonces el paso circular  $P_c$  es  $\pi D/N$ ; donde  $D$  es el diámetro de la circunferencia de paso. El término paso diametral todavía está en uso y se define como  $P=N/D$ . otro término usado es el módulo  $m=D/N$ .

El número de dientes que pasan en un punto de la circunferencia de paso en unidades de tiempo es  $2\pi\omega N$ , tal que para dos ruedas dentadas enlazadas o engranadas  $A$  y  $B$  tenemos que:

$$|\omega_A N_A| = |\omega_B N_B|$$

o

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = -\frac{D_B}{D_A} = -\frac{N_B}{N_A} \quad (5.9)$$

El signo (-) indica que la dirección de rotación de las ruedas acopladas, es contraria.

La figura 5.20 muestra un tren de engranes compuesto, en el cual, la rueda dentada B esta rígidamente conectada con la rueda C; tal que  $\omega_B = \omega_C$ . La relación de velocidad para los engranes es:

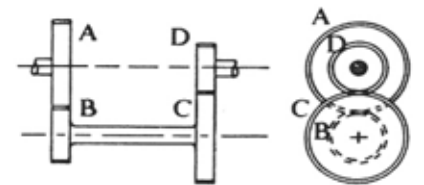


Figura 5.20

$$\frac{\omega_D}{\omega_A} = \frac{\omega_D}{\omega_C} \cdot \frac{\omega_B}{\omega_A}$$

$$= \left(-\frac{N_C}{N_D}\right) \left(-\frac{N_A}{N_B}\right) = \frac{N_C N_A}{N_D N_B} \quad (5.10)$$

### 5.10. Movimiento Epicicloidal

Si el eje de una rueda giratoria, está al mismo tiempo moviéndose en una trayectoria circular, entonces el movimiento de la rueda se dice ser Epicicloidal<sup>9</sup>

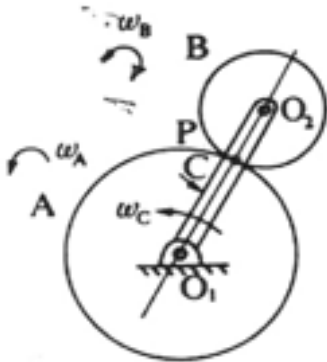


Figura 5.21

La figura 5.21 muestra el tipo más simple de movimiento epicicloidal si no ocurre deslizamiento en  $P$ , el punto de contacto, en consecuencia la velocidad de  $P$  es dada como:

$$\mathbf{v}_{P/O_1} = \mathbf{v}_{O_2/O_1} + \mathbf{v}_{P/O_2}$$

De aquí que:  $\omega_A r_A = \omega_C (r_A + r_B) - \omega_B r_B$

$$\text{o} \quad \frac{\omega_A - \omega_B}{\omega_B - \omega_C} = -\frac{r_B}{r_A} \quad (5.11)$$

Esto es, el movimiento relativo para el brazo portador, es independiente de la rapidez del brazo. Por ejemplo, si  $\omega_C = 0$ , tenemos el caso de un tren de engranes simple, donde:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = -\frac{r_B}{r_A} \quad (5.12)$$

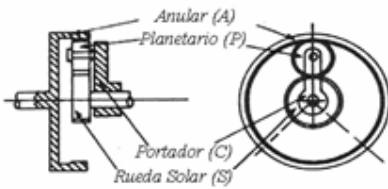


Figura 5.22

La figura 5.22 muestra un arreglo típico para un tren de engranes epicicloidal, en el cual, el engrane planetario es libre a rotar en un rodamiento en un extremo del brazo portador, el cual es libre a si mismo a girar respecto al eje central del engrane en el otro extremo. Si el portador esta fijo, el tren de engranes epicicloidal es un simple tren de engranes, tal que, la relación de velocidad será:

$$\frac{\omega_A}{\omega_S} = \frac{\omega_A}{\omega_P} \cdot \frac{\omega_P}{\omega_S} = \left( \frac{N_P}{N_A} \right) \left( -\frac{N_S}{N_P} \right) = -\frac{N_S}{N_A}$$

<sup>9</sup> **Epi.**- sobre, encima. Como prefijo denota, superposición, oposición.  
**Episcicloide.**- curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda exteriormente sobre otra circunferencia sin resbalar.

**Cicloide.**- curva descrita por un punto rígidamente ligado a una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta. Si el punto está sobre la circunferencia, la curva es un cicloide ordinario y si no está sobre la circunferencia es una cicloide acortada o alargada.

Obsérvese que la dirección de rotación del engrane anular es la misma que la del engrane planetario, ya que el engrane anular ( $A$ ) es un engrane interno. También vemos que el número de dientes en la rueda planetaria no afecta la relación de velocidad, en este caso el engrane planetario se dice que actúa como un engrane loco.

Si el brazo portador no está fijo, entonces, la relación de velocidad anterior es aún válida para determinar las rapidezes angulares que son relativas al portador, esto es:

$$\frac{\omega_A - \omega_C}{\omega_S - \omega_C} = -\frac{N_S}{N_A} \quad (5.13)$$

Si dos de las magnitudes de la velocidad son conocidas, entonces, la tercera magnitud de la velocidad puede ser calculada. En la práctica es común fijar uno de los elementos (es decir, el engrane solar, el brazo del portador o el engrane anular) y usar los otros dos elementos como de entrada y salida. Así vemos que es posible obtener tres diferentes relaciones de engranaje para el mismo mecanismo.

### 5.11. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

#### *Ejemplos de Discusión*

Ejemplo 5.1. El mecanismo (cadena cinemática) de cuatro-barras será ahora analizado con más detalle. Consideraremos el mecanismo en la configuración mostrada en la figura 5.23 para determinar  $v_C$ ,  $v_E$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $a_B$ ,  $a_C$ ,  $a_E$ ,  $\dot{\omega}_2$  y  $\dot{\omega}_3$ , y los sufijos 1, 2, 3, y 4 referido en todo a los eslabones  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , y  $DA$  respectivamente.

*Solución:*

*Velocidades:* En general, para cualquier eslabón  $PQ$  de longitud  $R$  y rotando con velocidad angular  $\omega$  (ver figura 5.24 (a)) teniéndose de la ecuación 2.17.

$$v_{Q/P} = \dot{R} e_r + R\omega e_\theta$$

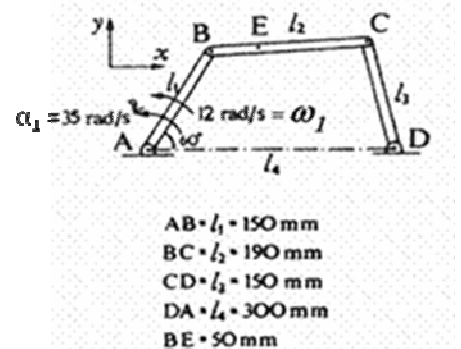


Figura 5.23

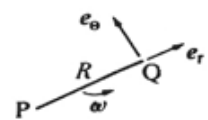


Figura 5.24(a)

**Principios de Mecánica para Ingeniería**

Si  $PQ$  es de longitud fija entonces  $\dot{R} = 0$  y  $v_{Q/P}$  tiene una magnitud  $R\omega$  y una dirección perpendicular al eslabón y un sentido de acuerdo a la dirección de  $\omega$ .

*Diagrama de velocidad* (sección o tema 5.4) ya que  $l$  es constante la magnitud de  $v_{B/A}$  es  $\omega_1 l_1$  y su dirección es perpendicular a  $AB$  en el sentido indicado en la figura 5.24(b) trazaremos a una escala apropiada el vector  $\vec{ab}$  que representa  $v_{B/A}$ . La velocidad de  $C$  se determina considerando conocidas las direcciones de  $v_{C/B}$  y  $v_{C/D}$  y observando que (ver ecuación 2.22)

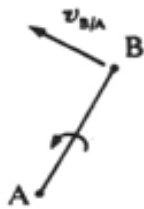


Figura 5.24(b)

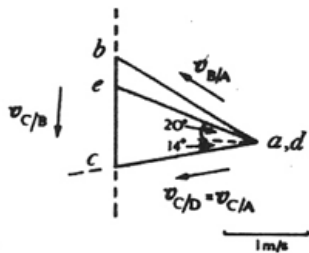


Figura 5.25

$$v_{C/A} = v_{B/A} + v_{C/B} \tag{i}$$

y  $v_{C/A} = v_{C/D}$  ya que  $A$  y  $D$  cada uno tiene velocidad cero. Se tienen suficientes datos para trazar el triángulo de velocidades representando la ecuación (i) figura 5.25.

Eslabón	Velocidad	Dirección	Sentido	Magnitud (m/s)	Línea
AB	$v_{B/A}$	$\perp AB$		$(AB)\omega_1 = (0.15)12 = 1.8$	$ab$
BC	$v_{C/B}$	$\perp BC$	?	$(BC)\omega_2 = ?$	$bc$
CD	$v_{C/D}$	$\perp CD$	?	$(CD)\omega_3 = ?$	$cd$

De esta figura se puede ver que la localización del punto  $c$  en el diagrama de velocidad es la intersección de la recta trazada pasando por  $b$  perpendicular a  $BC$  y a una recta trazada a través de  $a, d$  perpendicular a  $DC$ .

Poniendo a escala la magnitud de  $v_{B/A}$  trazo  $ab$  encontramos que la magnitud de  $dc$  es  $1.50\text{m/s}$  y así:

$$v_{C/A} = v_C = 1.50\text{m/s} \quad \vec{dc}$$

La magnitud de  $\omega_2$ , de  $v_{C/B} = BC\omega_2$  es

$$\omega_2 = \frac{bc}{BC} = \frac{1.28}{0.19} = 6.7 \text{ rad/s}$$

Para determinar su dirección, es necesario hacer notar que la velocidad de  $C$  relativa a  $B$ ,  $v_{C/B}$  es con el sentido de  $b$  a  $c$  (y que  $v_{B/C}$  este en sentido opuesto) por lo que  $BC$  rota en el sentido de las manecillas del reloj (sentido horario), figura 5.26. Así:



Figura 5.26

$$\omega_2 = -6.7 \mathbf{k} \text{ rad/s}$$

Donde  $\mathbf{k}$  es el vector unitario perpendicular al plano definido por  $BC$  y  $v_{C/B}$ .

La magnitud de  $\omega_3$ , de  $v_{C/D} = CD\omega_3$  es:

$$\omega_3 = \frac{cd}{CD} = \frac{1.3}{0.15} = 10 \text{ rad/s}$$

y la dirección es, por supuesto, en contra de las manecillas del reloj (sentido antihorario), por lo que

$$\omega_3 = 10 \mathbf{k} \text{ rad/s}$$

Del concepto de *imagen de velocidad* podemos encontrar la posición de  $e$  en  $bc$  de

$$\frac{be}{bc} = \frac{BE}{BC}$$

Así que:

$$be = 1.28 \left( \frac{50}{190} \right) = 0.337 \text{ m/s}$$

La magnitud  $v_E$  es  $ae$  y este se encuentra en el diagrama de velocidades siendo  $1.63 \text{ m/s}$ , por tanto

$$v_E = 1.63 \text{ m/s}$$



*Centro instantáneo de rotación* (tema o sección 5.5) En la figura 5.27 se expone la aplicación del método del centro instantáneo a este ejercicio 5.1 en la que  $I$  es el centro instantáneo de rotación de  $BC$ , estando en la intersección

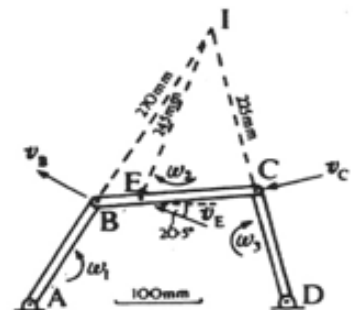


Figura 5.27

### Principios de Mecánica para Ingeniería

de  $AB$  y  $CD$ . El triángulo  $IBC$  rota en el instante de conformación de esta posición respecto a  $I$ . De la dirección conocida de  $v_B$ , la velocidad angular del triángulo es evidente ver que es en el sentido de las manecillas del reloj.

La magnitud de  $\omega_2$  es

$$\omega_2 = \frac{v_B}{IB} = \frac{\omega_1(AB)}{IB} = \frac{12(0.15)}{0.27} = 6.7 \text{ rad/s}$$

y 
$$\omega_2 = -6.7 \mathbf{k} \text{ rad/s}$$

La magnitud de  $v_C$  es

$$v_C = \omega_2(IC) = 6.7(0.225) = 1.50 \text{ m/s}$$

y el sentido esta en la dirección mostrada

La magnitud de  $\omega_3$  es

$$\omega_3 = \frac{v_C}{CD} = \frac{1.50}{0.15} = 10.0 \text{ rad/s}$$

y el sentido es claramente en sentido contrario a las manecillas del reloj de manera que

$$\omega_3 = 10.0 \mathbf{k} \text{ rad/s}$$

El punto  $E$  situado en el eslabón  $BC$  tal que el centro instantáneo para  $E$  también es  $I$ . la magnitud de  $v_E$  es

$$v_E = \omega_2(IE) = 6.7(0.245) = 1.64 \text{ m/s}$$

y el sentido es en la dirección mostrada.

Las discrepancias entre los dos métodos (imagen de velocidad y centro instantáneo) son obvias debido a las imprecisiones en los dibujos o croquis trazados.

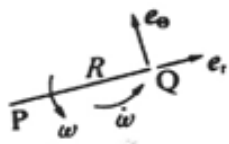


Figura 5.28

*Aceleraciones.* Para cualquier eslabón  $PQ$  de longitud  $R$ , la velocidad angular  $\omega$  y la aceleración angular  $\dot{\omega}$  (ver figura 5.28) tenemos, de la ecuación 2.18.



$$\mathbf{a}_{Q/P} = (\ddot{R} - R\omega^2)\mathbf{e}_r + (R\dot{\omega} + 2\dot{R}\omega)\mathbf{e}_\theta$$

Si  $PQ$  es de longitud fija (constante) por consiguiente,  $\dot{R} = \ddot{R} = 0$  y  $\mathbf{a}_{Q/P}$  tiene una componente de magnitud  $R\omega^2$

siempre en la dirección de  $Q$  a  $P$  y otra de magnitud  $R\dot{\omega}$  perpendicular a  $PQ$  y dirigida de acuerdo al sentido de  $\omega$ .

*Diagrama de aceleración* (sección 5.7). Viendo la figura 5.29. Los componentes radial y transversal de  $\mathbf{a}_{B/A}$  son conocidas, y asumiendo que estas dan la aceleración total

de  $\mathbf{a}_B$  puesto que  $A$  es un punto fijo ( $\overrightarrow{ab'} + \overrightarrow{b'b} = \overrightarrow{ab}$  en el diagrama). La componente de  $\mathbf{a}_{C/B}$  tiene una magnitud de

$l_2\omega_2^2$  y es dirigida de  $C$  a  $B$ . La componente transversal de  $\mathbf{a}_{C/B}$  es perpendicular a  $BC$  pero es hasta ahora

desconocida en magnitud o sentido. Un razonamiento similar es aplicado para  $\mathbf{a}_{C/D}$ . De cualquier modo tenemos

suficientes datos para localizar el punto  $c$  en el diagrama de aceleración mostrado en la figura 5.29.

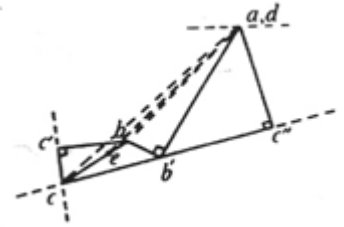


Figura 5.29

Eslabón	Aceleración	Dirección	Sentido	Magnitud (m/s <sup>2</sup> )	Línea
AB	$\mathbf{a}_{B/A}$ (radial)	$\parallel AB$		$l_1\omega_1^2 = 0.15(12)^2 = 21.6$	$ab'$
	$\mathbf{a}_{B/A}$ (transversal)	$\perp AB$		$l_1\dot{\omega}_1 = 0.15(35) = 5.25$	$b'b$
BC	$\mathbf{a}_{C/B}$ (radial)	$\parallel BC$		$l_2\omega_2^2 = 0.19(6.7)^2 = 8.53$	$bc'$
	$\mathbf{a}_{C/B}$ (transversal)	$\perp BC$	?	$l_2\dot{\omega}_2 = ?$	$c'c$
CD	$\mathbf{a}_{C/D}$ (radial)	$\parallel CD$		$l_3\omega_3^2 = 0.15(10)^2 = 15.0$	$dc''$
	$\mathbf{a}_{C/D}$ (transversal)	$\perp BC$	?	$l_3\dot{\omega}_3 = ?$	$c''c$

Las magnitudes y direcciones de  $\mathbf{a}_B$  y  $\mathbf{a}_C$  se toman directamente del diagrama de aceleración.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B/A} = \overrightarrow{ab} = 22.0 \text{ m/s}^2 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown 46^\circ \\ \text{---} \end{array}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{C/D} = \overrightarrow{dc} = 31.6 \text{ m/s}^2 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown 43^\circ \\ \text{---} \end{array}$$

## Principios de Mecánica para Ingeniería

La magnitud de  $\omega_2$  es

$$\omega_2 = \frac{c'c}{BC} = \frac{4.7}{0.19} = 24.7 \text{ rad/s}^2$$

Para determinar el sentido de  $\omega_2$  observamos que la componente normal (transversal) de  $\mathbf{a}_{C/B}$  es  $c'c$  en el sentido de  $c'$  a  $c$ ; de esta manera  $BC$  tiene una aceleración angular en el sentido de las manecillas del reloj.

$$\dot{\omega}_2 = -24.7 \mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$

En forma semejante encontramos la magnitud de  $\omega_3$

$$\omega_3 = \frac{c''c}{CD} = \frac{28}{0.15} = 187 \text{ rad/s}^2$$

y su sentido es contrario a las manecillas del reloj

$$\dot{\omega}_3 = 187 \mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$

Del concepto de imagen de aceleración podemos encontrar la posición de  $e$  en  $bc$  de

$$\frac{be}{bc} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow be = \frac{bcBE}{BC} = \frac{0.99(50)}{(190)} 0.260 \text{ m/s}^2$$

La magnitud y dirección de  $\mathbf{a}_E$  son tomadas del diagrama de aceleración, encontrando

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_{E/A} = \overrightarrow{ae} = 24.2 \text{ m/s}^2 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \searrow 45^\circ \\ \blacktriangle \end{array}$$

*Métodos aplicando álgebra vectorial.* El álgebra vectorial puede utilizarse en la solución de problemas de mecanismos. Tales métodos son una herramienta poderosa en la solución de mecanismos tridimensionales no obstante que generalmente toma mucho más tiempo que los métodos gráficos para resolver problemas de mecanismos planos. Estos métodos dan una aproximación sistemática, la cual es fácil de conducir por un programa en la computadora.

Un bosquejo de una solución por el método de álgebra vectorial para el presente problema es dado a continuación:

De la figura 5.30 encontramos que:

$$\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_4 = 0 \quad (ii)$$

El vector  $\mathbf{l}_1 = l_1(\cos\theta_1 \mathbf{i} + \sin\theta_1 \mathbf{j})$  es conocido y los vectores  $\mathbf{l}_2$  y  $\mathbf{l}_3$  pueden determinarse, primero evaluando los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_3$  por los métodos de la trigonometría normal y después escribir:

$$\mathbf{l}_2 = l_2(\cos\theta_2 \mathbf{i} + \sin\theta_2 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{l}_3 = l_3(\cos\theta_3 \mathbf{i} - \sin\theta_3 \mathbf{j})$$

En forma alterna podemos escribir

$$\mathbf{l}_2 = l_2 \mathbf{e}_2 = l_2(a \mathbf{i} + b \mathbf{j})$$

$$\mathbf{l}_3 = l_3 \mathbf{e}_3 = l_3(c \mathbf{i} + d \mathbf{j})$$

y se determinan los valores de a, b, c y d. Señalando que:

$$d = \pm\sqrt{1-c^2} \quad (iii)$$

y sustituyendo en la ecuación (ii) con  $\mathbf{l}_4 = -l_4 \mathbf{i}$  y colocando los valores numéricos nos da:

$$0.190 \mathbf{e}_2 = (0.225 - 0.180c)\mathbf{i} - (0.1299 \pm 0.180\sqrt{1-c^2})\mathbf{j}$$

Tomando los módulos o valores absolutos de esta ecuación para eliminar  $\mathbf{e}_2$ , rearrreglándolo y cuadrándolo encontramos dos valores para  $c$ , cada uno con dos valores correspondientes de  $d$ , ecuación (iii), solamente un valor de cada par de los valores de  $d$  es consistente con los eslabones  $BC$  y  $CD$  unidos en  $C$ , y uno de los valores de  $c$  corresponden con el mecanismo estando en la posición alterna mostrada con línea punteada en la figura 5.30. El vector  $\mathbf{l}_2$  puede luego encontrarse de la ecuación (ii). Los resultados son:

$$\mathbf{l}_1 = (0.0750 \mathbf{i} + 0.1299 \mathbf{j})m$$

$$\mathbf{l}_2 = (0.1893 \mathbf{i} + 0.1580 \mathbf{j})m$$

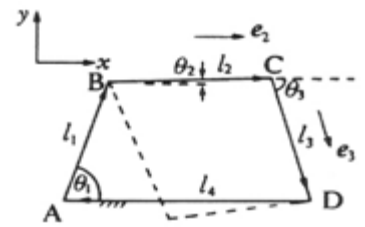


Figura 5.30

## Principios de Mecánica para Ingeniería

$$l_3 = (0.0350i - 0.1457j)m$$

Ahora de:

$$v_C = v_B + v_{C/B}$$

y de la ecuación 5.3,

$$v_C = \omega_1 \times l_1 + \omega_2 \times l_2$$

también

$$v_C = \omega_3 \times (-l_3) \quad (iv)$$

Igualando las dos últimas expresiones para  $v_C$

$$\omega_1 \times l_1 + \omega_2 \times l_2 + \omega_3 \times l_3 = 0, \quad (v)$$

Desarrollando los productos vectoriales con los valores encontrados para  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  con  $\omega_1 = 12k$ ,  $\omega_2 = \omega_2 k$ , y  $\omega_3 = \omega_3 k$ , nos da

$$\begin{aligned} &(-1.559 - 0.0158\omega_2 + 0.1457\omega_3)i + \\ &+ (0.9 + 0.1893\omega_2 + 0.03565\omega_3)j = 0 \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de  $i$  y  $j$  y resolviendo para  $\omega_2$  y  $\omega_3$ , encontramos

$$\omega_2 = -6.634 \text{ rad/s}$$

y

$$\omega_3 = 9.980 \text{ rad/s}$$

Utilizando  $v_B = \omega_1 \times l_1$  y la ecuación (iv) nos lleva a

$$v_B = -1.559i + 0.9j \text{ m/s}$$

$$|v_B| = \sqrt{(1.559)^2 + (0.09)^2} = 1.800 \text{ m/s}$$

y

$$v_C = -(1.453i + 0.3558j) \text{ m/s}$$

$$|v_C| = \sqrt{(1.453)^2 + (0.3558)^2} = 1.497 \text{ m/s}$$

Una manera más rápida de encontrar  $v_C$ , si  $\omega_2$  no es requerida, es advirtiendo que  $v_{C/B}$  es perpendicular a  $BC$ ,

por lo que:

$$\mathbf{v}_{C/B} \cdot \mathbf{l}_2 = 0$$

o

$$(\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{l}_2 = 0$$

$\mathbf{v}_B$  es conocida y de acuerdo con la ecuación (iv)

$$\mathbf{v}_C = \omega_3 \mathbf{k} \times (-0.0350 \mathbf{i} + 0.1457 \mathbf{j})$$

y llevando a cabo el producto punto (·) encontramos  $\omega_3 = 9.98 \text{ rad/s}$ ; por lo tanto  $\mathbf{v}_C$  puede determinarse.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (v)

$$\dot{\omega}_1 \times \mathbf{l}_1 + \omega_1 \times \dot{\mathbf{l}}_1 + \dot{\omega}_2 \times \mathbf{l}_2 + \omega_2 \times \dot{\mathbf{l}}_2 + \dot{\omega}_3 \times \mathbf{l}_3 + \omega_3 \times \dot{\mathbf{l}}_3 = 0 \quad (v)$$

Nótese que el producto de vectores puede derivarse de una manera semejante que el producto de escalares capítulo 1 y apéndice 1. Puesto que  $\mathbf{l}_1$ , es constante en magnitud, luego

$$\dot{\mathbf{l}}_1 = \omega_1 \times \mathbf{l}_1 \quad \text{ya que } \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{v}_{B/A}, \quad \text{ecuación 5.3}$$

y en forma semejante para  $\mathbf{l}_2$  y  $\mathbf{l}_3$ , de aquí que:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 \times \mathbf{l}_1 + \omega_1 \times (\omega_1 \times \mathbf{l}_1) + \dot{\omega}_2 \times \mathbf{l}_2 + \omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{l}_2) + \\ + \dot{\omega}_3 \times \mathbf{l}_3 + \omega_3 \times (\omega_3 \times \mathbf{l}_3) = 0 \end{aligned} \quad (vi)$$

Sustituyendo los valores previamente obtenidos conjuntamente con

$$\dot{\omega}_1 = 35 \mathbf{k}, \quad \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_2 \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_3 \mathbf{k}$$

Y llevando al cabo los productos vectoriales, encontramos

$$\dot{\omega}_2 = -22.77 \text{ rad/s}^2 \quad \text{y} \quad \dot{\omega}_3 = 184.4 \text{ rad/s}^2$$

Derivando la ecuación (iv)

$$\mathbf{a}_C = \dot{\omega}_3 \times (-\mathbf{l}_3) + \omega_3 \times [\omega_3 \times (\mathbf{l}_3)]$$

Sustituyendo los valores numéricos y desarrollando los productos vectoriales, se tiene

$$\mathbf{a}_C = -(23.32 \mathbf{i} + 21.09 \mathbf{j}) \text{ m/s}^2$$

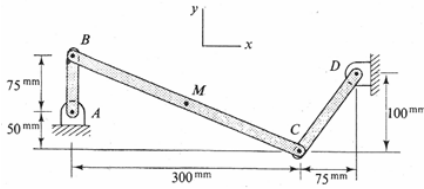


Figura 5.31

$$y. \quad a_C = 31.40 \frac{m}{s^2}$$

la aceleración  $a_B$  puede encontrarse de una manera similar.

Ejemplo 5.2. El mecanismo en la figura 5.31, se mueve en un plano vertical. El miembro  $CD$  posee una velocidad angular ( $\omega_{CD}$ ) de  $8 \text{ rad/s}$  y el miembro  $AB$  una aceleración angular  $\omega_{AB} = \alpha_{AB} = 30 \text{ rad/s}^2$  ambos en un sentido

horario, en la posición representada en la figura. Calcule:

- Las velocidades angulares de los miembros  $AB$  y  $BC$ .
- La velocidad del punto  $M$ , el punto medio de  $BC$ .
- La aceleración del punto  $C$  en la posición indicada.

*Solución:*

a). los miembros  $AB$  y  $CD$  giran únicamente, y los pasadores  $B$  y  $C$  describen arcos circulares con centros en  $A$  y  $D$ , respectivamente. Los pasadores  $B$  y  $C$  también pertenecen o son puntos del cuerpo rígido  $BC$ , cuyo movimiento es plano, y en consecuencia, el movimiento de  $B$  relativo a  $C$  (o de  $C$  con respecto a  $B$ ) ocurre sobre un arco circular cuyo radio es la distancia entre  $B$  y  $C$ . Las ecuaciones 5.3 y 5.4 permiten expresar las velocidades absoluta y relativa de los puntos  $B$  y  $C$  en términos de las velocidades angulares y vectores de posición respectivos. En este ejemplo se supone que el sentido de las velocidades angulares desconocidas es antihorario, si el resultado final es negativo indica que el sentido supuesto es erróneo. Las velocidades angulares se expresan como

$$\omega_{AB} = \omega_{AB} \mathbf{k}, \quad \omega_{BC} = \omega_{BC} \mathbf{k}, \quad \omega_{CD} = -8 \mathbf{k} \text{ rad/s},$$

y los vectores de posición son:

$$\mathbf{r}_{AB} = 75 \mathbf{j} \text{ mm}, \quad \mathbf{r}_{CB} = (-300 \mathbf{i} + 125 \mathbf{j}) \text{ mm}, \quad \mathbf{r}_{DC} = (-75 \mathbf{i} - 100 \mathbf{j}) \text{ mm}$$

La ecuación de velocidad relativa aplicada a los puntos  $B$  y  $C$  se expresa como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

$$o \quad \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} = \omega_{CD} \times \mathbf{r}_{DC} + \omega_{BC} \times \mathbf{r}_{CB}$$

que se convierte en

$$\omega_{AB} \mathbf{k} \times 75 \mathbf{j} = -8 \mathbf{k} \times (-75 \mathbf{i} - 100 \mathbf{j}) + \omega_{BC} \mathbf{k} \times (-300 \mathbf{i} + 125 \mathbf{j}) \quad (\text{a})$$

Obsérvese que el vector de posición o radio vector es el vector desde el punto fijo ( $A$  o  $D$ ) o desde el punto de referencia (punto  $C$  para la velocidad de  $B$  relativa a  $C$ ) hasta el punto móvil. Expandiendo la ecuación (a) se obtiene

$$-75\omega_{AB} \mathbf{i} = 600 \mathbf{j} - 800 \mathbf{i} - 300\omega_{BC} \mathbf{j} - 125\omega_{BC} \mathbf{i}$$

o

$$-75\omega_{AB} \mathbf{i} = \mathbf{i}(-800 - 125\omega_{BC}) + \mathbf{j}(600 - 300\omega_{BC})$$

Si dos vectores son iguales, sus componentes (los coeficientes de los vectores unitarios) deben ser iguales. Por tanto la ecuación vectorial bidimensional anterior se reduce a las ecuaciones escalares siguientes:

$$\text{en } \mathbf{i}: \quad -75\omega_{AB} = -800 - 125\omega_{BC}$$

$$\text{en } \mathbf{j}: \quad 0 = 600 - 300\omega_{BC}$$

La solución simultánea de estas ecuaciones da

$$\omega_{BC} = 2.00 \text{ rad/s}; \quad \omega_{BC} = \underline{2.00 \text{ k rad/s}}, \quad \leftarrow^r$$

$$\omega_{AB} = 14.00 \text{ rad/s}; \quad \omega_{AB} = \underline{14.00 \text{ k rad/s}}, \quad \leftarrow^r$$

**b).** La velocidad del punto  $M$  se obtiene relacionándola con la velocidad del punto  $B$  o  $C$ . Utilizando el punto  $B$  como referencia, La ecuación de velocidad relativa se expresa como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M &= \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{M/B} \\ &= \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} + \omega_{BC} \times \mathbf{r}_{BM} \\ &= 14.00 \mathbf{k} \times 75 \mathbf{j} + 2.00 \mathbf{k} \times (150 \mathbf{i} - 62.5 \mathbf{j}) \\ &= -1.050 \mathbf{i} + 300 \mathbf{j} + 125 \mathbf{i} \\ &= 925 \mathbf{i} + 300 \mathbf{j} \end{aligned}$$

La solución del problema propuesto también puede obtenerse utilizando un procedimiento semigráfico. La

ecuación de velocidad relativa para los puntos  $B$  y  $C$  en las formas algebraicas y grafica es:

$$v_B = v_C + v_{B/C}$$

Los diagramas representan la pendiente y sentido del término correspondiente (por encima) en la ecuación vectorial. Como  $B$  describe una trayectoria circular con respecto a  $A$ , su velocidad debe ser tangente a la trayectoria y su sentido debe concordar con la velocidad angular supuesta para  $AB$ . Si al calcular  $\omega_{AB}$  su signo es negativo, se concluye que el sentido supuesto es erróneo. En el diagrama donde se define la velocidad de  $B$  relativa a  $C$ , el punto  $C$  se representó como fijo, aunque en la realidad no lo es, para ilustrar la correspondencia existente entre las direcciones de  $\omega_{B/C}$  y  $v_{B/C}$ .

La ecuación vectorial contiene dos incógnitas,  $\omega_{AB}$  y  $\omega_{BC}$  (o  $v_B$  y  $v_{B/C}$ ), y éstas pueden calcularse igualando las componentes horizontal y vertical de los diversos términos. La suma de los componentes horizontales (suponiendo el sentido positivo hacia la derecha) es

$$\begin{array}{c} \oplus \\ \rightarrow \end{array} -75\omega_{AB} = -\frac{4}{5}(8)(125) - \frac{5}{13}(325\omega_{BC}) = -800 - 125\omega_{BC}$$

En forma semejante la suma de los componentes verticales de las velocidades es

$$\begin{array}{c} \oplus \\ \uparrow \end{array} 0 = \frac{3}{5}(8)(125) - \frac{12}{13}(325\omega_{BC}) = 600 - 300\omega_{BC}$$

La solución de estas dos ecuaciones algebraicas es



$$\omega_{BC} = 2 \text{ rad/s}, \quad \omega_{AB} = 14 \text{ rad/s}$$

Las dos cantidades son positivas, luego el sentido supuesto es correcto. En consecuencia

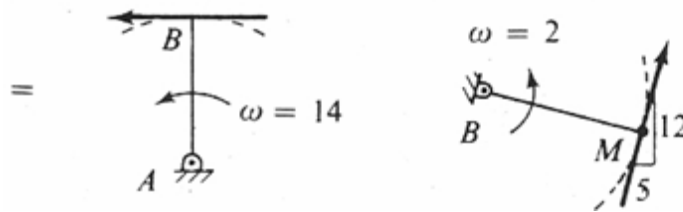
$$\omega_{BC} = \underline{2.00 \text{ rad/s en sentido antihorario,}}$$

$$\omega_{AB} = \underline{14.00 \text{ rad/s en sentido antihorario,}}$$

La velocidad de  $M$  se obtiene relacionándola con la velocidad del punto  $B$  o  $C$ . La ecuación que relaciona a  $v_M$  con  $v_B$  es

$$v_M = v_B + v_{M/B}$$

$$v_B = 75 (14) = 1,050 \quad v_{M/B} = 162.5(2) = 325$$



$$= \overline{1050} + 325 = \overline{1050} + \overline{125} + 300$$

$$= \overline{925} + 300 = 972 \text{ mm/s}$$

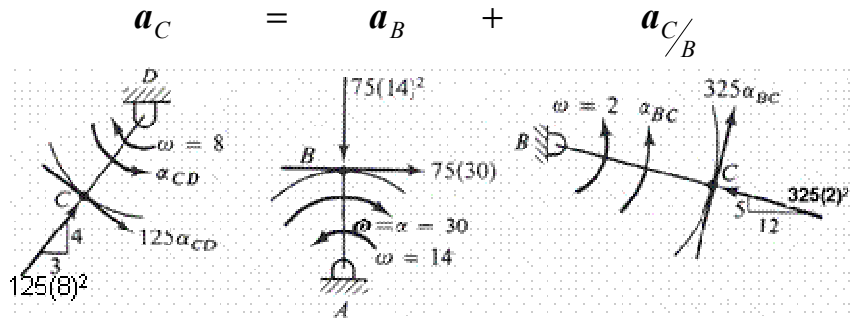
*Solución:* Se ha encontrado que las velocidades angulares de los miembros  $AB$  y  $BC$  son

$$\omega_{AB} = \underline{14.00 \text{ rad/s en sentido antihorario,}}$$

$$\omega_{BC} = \underline{2.00 \text{ rad/s en sentido antihorario,}}$$

Las velocidades angulares también pueden calcularse mediante los centros instantáneos. En cualquier caso, deben conocerse antes de intentar aplicar la ecuación de las aceleraciones relativas para obtener las aceleraciones angulares. Las aceleraciones de cualquier par de puntos pueden relacionarse mediante la ecuación de la aceleración relativa. Siempre que sea posible, los puntos deben pertenecer al mismo cuerpo rígido por cuanto en este caso la trayectoria asociada con el movimiento relativo es circular. Además, los puntos seleccionados deben describir

trayectorias conocidas y sus aceleraciones deben expresarse en términos de cantidades conocidas o de las cantidades a calcular. En este caso, se escogen los puntos  $B$  y  $C$  que pertenecen al miembro  $BC$  y describen trayectorias circulares. La ecuación de aceleración relativa se expresa como:



En los diagramas correspondientes a cada término se representan las componentes normal y tangencial de cada aceleración, obteniéndose una representación gráfica de la ecuación vectorial. Se conocen las direcciones de todos los miembros de la ecuación y existen solamente dos incógnitas, las magnitudes de  $\alpha_{CD}$  y  $\alpha_{BC}$ . Esta ecuación vectorial bidimensional es equivalente a dos ecuaciones escalares correspondientes a los componentes horizontal y vertical de los diversos términos. Luego,

$$\begin{array}{c} \oplus \\ \rightarrow \end{array} \quad \frac{4}{5}(125)\alpha_{CD} + \frac{3}{5}(125)(8^2) = 75(30) + \frac{5}{13}(325)\alpha_{BC} - \frac{12}{13}(325)(2^2)$$

$$\begin{array}{c} \oplus \\ \uparrow \end{array} \quad -\frac{3}{5}(125)\alpha_{CD} + \frac{4}{5}(125)(8^2) = -75(14^2) + \frac{12}{13}(325)\alpha_{BC} + \frac{5}{13}(325)(2^2)$$

que se convierten en

$$100\alpha_{CD} + 4800 = 2250 + 125\alpha_{BC} - 1200$$

$$-75\alpha_{CD} + 6.400 = -14.700 + 300\alpha_{BC} + 500$$

o

$$125\alpha_{BC} - 100\alpha_{CD} = 3750$$

$$300\alpha_{BC} + 75\alpha_{CD} = 20.6(10^3)$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas es

$$\alpha_{BC} = 59.5 \text{ rad/s}^2$$

y 
$$\alpha_{CD} = 36.8 \text{ rad/s}^2$$

c). Los dos resultados son positivos, esto implica que las direcciones supuestas (las dos en sentido antihorario) con correctas. La aceleración del punto C es

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \nearrow 4 \\ \text{---} 3 \\ \searrow 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow 4 \\ \text{---} 3 \\ \searrow 4 \end{array} \\
 a_C &= 125(64) + 125(36.8) \\
 &= \begin{array}{c} \longrightarrow \\ 4800 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \\ 6400 \end{array} + \begin{array}{c} \longrightarrow \\ 3680 \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \\ 2760 \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \longrightarrow \\ 8480 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \\ 3640 \end{array} \\
 &= \underline{9230 \text{ mm/s}^2} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ 123.2^\circ \\ \longleftarrow \end{array}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Los bloques D y E de la figura 5.32(a) están articulados entre sí. El bloque D se desliza en la ranura del miembro giratorio OA, y E se desliza en la ranura vertical fija. Calcule la velocidad de E como una función de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  mediante:

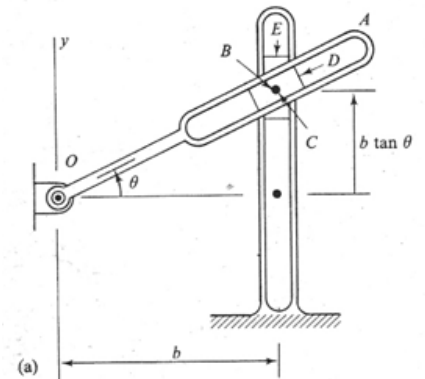


Figura 5.32(a)

- La diferenciación del vector que define la posición de E.
- Utilizando la ecuación de la velocidad relativa

Solución:

a). El vector de posición del bloque E (referirse a la figura 5.32(b) se expresa utilizando coordenadas polares o rectangulares como

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r = b \mathbf{i} + b \tan \theta \mathbf{j} \tag{a}$$

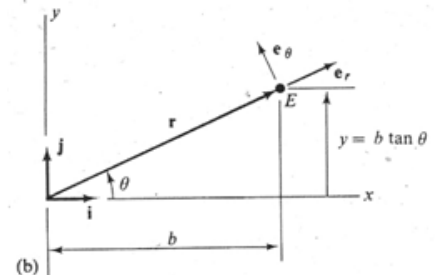
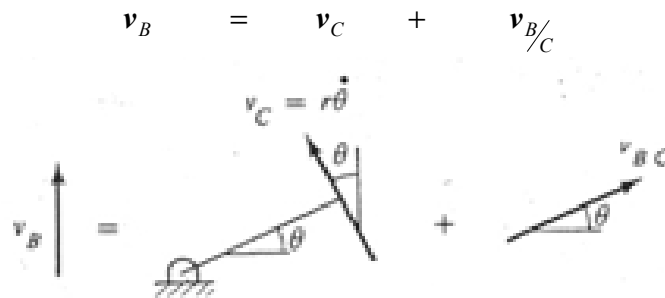


Figura 5.32(b)

Como  $r$  y  $\mathbf{e}_r$  varían con el transcurso del tiempo, se prefiere la segunda forma (coordenadas rectangulares) de la ecuación (a). Luego la velocidad de E es:

$$\mathbf{v}_E = \dot{\mathbf{r}} = b \sec^2 \theta \dot{\theta} \mathbf{j}$$

b). El punto  $B$  pertenece al bloque  $E$  y coincide con el eje del pasador que interconecta los dos bloques, el punto  $C$  es un punto que pertenece al miembro  $OA$  y que coincide con el punto  $B$  en el instante considerado. La ecuación de velocidad relativa puede aplicarse a los puntos  $B$  y  $C$ , y como en el ejemplo anterior se definen gráficamente las direcciones y sentidos de las velocidades que intervienen en la ecuación. Los diagramas se explican a continuación.



La velocidad de  $B$  es vertical porque es un punto del bloque  $E$ , que se encuentra restringido a moverse en la ranura vertical. El punto  $C$  pertenece al miembro giratorio  $OA$  por tanto su velocidad es perpendicular a  $OA$  y su magnitud es  $r\dot{\theta}$ . La velocidad de  $B$  relativa a  $C$  es la velocidad que a  $B$ ; asigna un observador ubicado en el punto  $C$ , luego su dirección coincide con  $OA$ <sup>10</sup>, cuando  $B$  y  $C$  son puntos coincidentes. En los diagramas existen dos incógnitas, las magnitudes  $v_B$  y  $v_{B/C}$ . Obsérvese que  $r = b \sec \theta$ . La velocidad  $v_B$  se calcula sumando componentes en la dirección perpendicular al miembro  $OA$ :



$$v_B \cos \theta = b \sec \theta \dot{\theta}$$

$$v_B = b \sec^2 \theta \dot{\theta}$$

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_B = b \sec^2 \theta \dot{\theta} \uparrow$$

<sup>10</sup> Es necesario observar que, aunque la velocidad de  $B$  relativa a  $C$  tiene dirección coincidente con  $OA$ , esta velocidad puede cambiar en magnitud y dirección, y en consecuencia la dirección de la aceleración relativa entre los dos puntos, en general, no coincide con  $OA$ .

La velocidad de  $B$  relativa a  $C$   $\left( v_{B/C} \right)$  puede calcularse sumando las componentes de la velocidad en la dirección  $OA$ , este cálculo no es necesario para la solución del problema propuesto.

y

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{C/B} &= \alpha_{BC} \times \mathbf{r}_{BC} - (\omega_{BC})^2 \mathbf{r}_{BC} \\ &= \alpha_{BC} \mathbf{k} \times (300 \mathbf{i} - 125 \mathbf{j}) - (2)^2 (300 \mathbf{i} - 125 \mathbf{j}) \\ &= 300 \alpha_{BC} \mathbf{j} + 125 \alpha_{BC} \mathbf{i} - 1.200 \mathbf{i} + 500 \mathbf{j} \\ &= (125 \alpha_{BC} - 1.200) \mathbf{i} + (300 \alpha_{BC} + 500) \mathbf{j} \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (a) se obtiene

$$\begin{aligned} (100 \alpha_{CD} + 4.800) \mathbf{i} + (-75 \alpha_{CD} + 6.400) \mathbf{j} &= 2.250 \mathbf{i} - 14.700 \mathbf{j} \\ &= 2.250 \mathbf{i} - 14.700 \mathbf{j} + (125 \alpha_{BC} - 1.200) \mathbf{i} + (300 \alpha_{BC} + 500) \mathbf{j} \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de los vectores unitarios se obtienen las ecuaciones

$$\text{en } \mathbf{i}: 100 \alpha_{CD} + 4.800 = 2.250 + 125 \alpha_{BC} - 1.200,$$

$$\text{en } \mathbf{j}: -75 \alpha_{CD} + 6.400 = -14.700 + 300 \alpha_{BC} + 500$$

Que por supuesto, coinciden con las obtenidas mediante el análisis “pictórico”.

**Ejemplo 5.4.** El extremo inferior de la escalera de  $7.50m$ , representada en la figura 5.33, se desliza sobre el piso con una velocidad de  $1.80m/s$  dirigida hacia la izquierda y una aceleración de  $2.40m/s^2$  también dirigida hacia la izquierda cuando  $\theta = \tan^{-1}(7.2/2.1)$  (es decir, en la configuración representada). El extremo superior de la escalera permanece en contacto con la pared vertical. Calcule la velocidad y aceleración del centro de masa  $G$  en la posición definida.

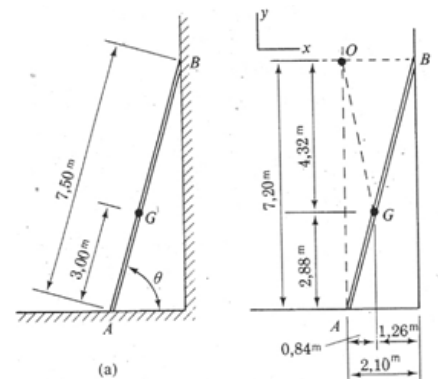


Figura 5.33

## Principios de Mecánica para Ingeniería

*Solución:* La velocidad de  $G$  puede calcularse aplicando la ecuación de la velocidad relativa, tal como se discutió en la sección 5.3 o mediante la localización del centro instantáneo. El centro instantáneo está ubicado en el punto  $O$  de la figura 5.33 y la magnitud de la velocidad angular es

$$\omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{1.80}{7.20} = 0.250 \text{ rad/s}$$

y la velocidad angular es

$$\omega = 0.250 \text{ rad/s} \text{ en sentido horario}$$

La magnitud de la velocidad de  $G$  es

$$v_G = OG(\omega) = \left[ (4.32)^2 + (0.84)^2 \right]^{1/2} (0.250) = 1.100 \text{ m/s}$$

y su dirección es perpendicular a  $OG$ ; por tanto

Como se conoce la aceleración de  $A$ , se aplica la ecuación de aceleración relativa a los puntos  $A$  y  $G$ . Luego.

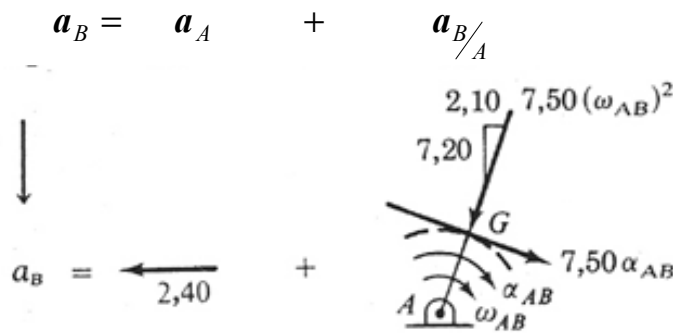
$$a_G = a_A + a_{G/A}$$

en los diagramas se representan los diversos términos. Se desconocen la magnitud y dirección de  $a_G$ , también se desconoce la magnitud de  $\alpha_{AB}$  (se supuso en sentido horario). La velocidad angular de la escalera ( $\omega = 0.250 \text{ rad/s}$ ) se calculó mediante el concepto de centro

instantáneo. La ecuación de la aceleración puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &= a_{G_x} \mathbf{i} + a_{G_y} \mathbf{j} \\ &= -2.40\mathbf{i} + 3.00(0.250)^2 \left( \frac{-2.10\mathbf{i} - 7.20\mathbf{j}}{7.50} \right) \\ &\quad + 3.00\alpha \left( \frac{7.20\mathbf{i} - 2.10\mathbf{j}}{7.50} \right) \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Esta ecuación vectorial contiene tres incógnitas y es equivalente a dos ecuaciones escalares. En consecuencia, no puede resolverse sin el concurso de información. Como el punto  $B$  se mueve verticalmente, la dirección de su aceleración debe ser vertical, y la ecuación que relaciona las aceleraciones de  $A$  y  $B$  contiene dos cantidades desconocidas únicamente. Esta ecuación es:



que en términos de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  se expresa como

$$-a_B \mathbf{j} = -2.40\mathbf{i} + 7.50(0.250)^2 \left( \frac{-2.10\mathbf{i} - 7.20\mathbf{j}}{7.50} \right) + 7.50\alpha \left( \frac{7.20\mathbf{i} - 2.10\mathbf{j}}{7.50} \right)$$

En esta ecuación las incógnitas son  $a_B$  y  $\alpha$ , que pueden calcularse resolviendo las dos ecuaciones escalares que resultan al igualar los coeficientes de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ . Los coeficientes de  $\mathbf{i}$  proporcionan la ecuación.

$$0 = -2.40 + 7.50(0.250)^2 \left( \frac{-2.1}{7.5} \right) + 7.5\alpha \left( \frac{7.20}{7.50} \right)$$

de donde

$$\alpha = 0.352 \text{ rad/s}^2$$

este resultado indica que la dirección supuesta para  $\alpha$  es correcta; por tanto,

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.352 \text{ rad/s}^2 \text{ en sentido horario} \\ &= 0.352 \mathbf{k} \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $\alpha$  en la ecuación (a) se obtiene

$$\begin{aligned}a_G &= -2.40 \mathbf{i} + 3.00(0.250)^2 \left( \frac{-2.10 \mathbf{i} - 7.20 \mathbf{j}}{7.50} \right) \\ &\quad + 3.00(0.352) \left( \frac{7.20 \mathbf{i} - 2.10 \mathbf{j}}{7.50} \right) \\ &= -2.40 \mathbf{i} - 0.525 \mathbf{i} - 0.1800 \mathbf{j} + 1.0138 \mathbf{i} - 0.296 \mathbf{j} \\ &= -1.439 \mathbf{i} - 0.476 \mathbf{j} \\ &= \underline{1.516 \text{ m/s}^2} \quad \swarrow 18.30^\circ\end{aligned}$$

$r$   
←

Ejemplo 5.5. Si el brazo (portador) 6 y el engrane 5 de la figura 5.34 rotan en el sentido de las manecillas del reloj (vistos desde el extremo derecho) a  $150$  y  $50 \text{ rad/s}$ , respectivamente, determine  $\omega_{21}$  en magnitud y dirección, utilizar las ecuaciones (5.10) y (5.11) que cubren este tren de engranes compuesto, considerando que el engrane 5 es el primer engrane (o engrane de entrada) y que el engrane 2 es el último engrane (o engrane de salida).

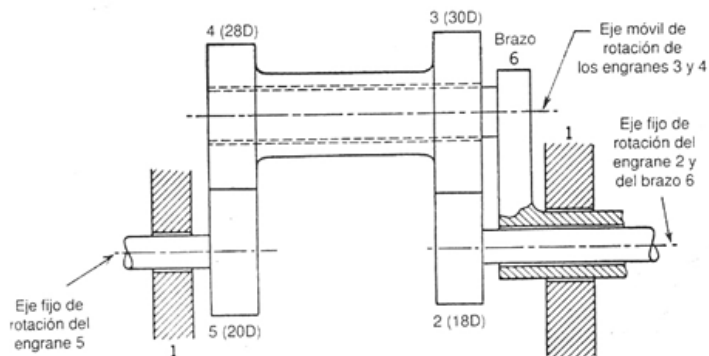


Figura 5.34



Las ecuaciones (5.10) y (5.11) para este caso se combinan para dar:

$$\frac{\omega_{26}}{\omega_{56}} = \frac{\omega_{21} - \omega_{61}}{\omega_{51} - \omega_{61}}$$

Por el tren de engranes rectos 2, 3, 4 y 6 tenemos según la ecuación (5.10)

$$\frac{\omega_{26}}{\omega_{56}} = \left(\frac{N_5}{N_4}\right) \cdot \left(\frac{N_3}{N_2}\right) = \left(\frac{20}{28}\right) \cdot \left(\frac{30}{18}\right) = \frac{25}{21}$$

Por lo tanto

$$\frac{25}{21} = \frac{\omega_{21} - 150}{50 - 150} \Rightarrow \omega_{21} = \frac{25}{21}(-100) + 150 = +30.9 \text{ rad/s} \quad \leftarrow$$

Debido a que el signo de  $\omega_{21}$  es igual que el de  $\omega_{51}$  y  $\omega_{61}$ ,  $\omega_{21}$  esta en la misma dirección es decir, en el sentido de las manecillas del reloj visto desde el extremo derecho.

### Ejercicios de Trabajo

- 5.1. La velocidad angular del miembro  $AB$  de la figura 5.35 es  $2 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario en la configuración representada. Calcule:
- Las velocidades angulares de los miembros  $BC$  y  $CD$ .
  - La velocidad del punto  $E$ .

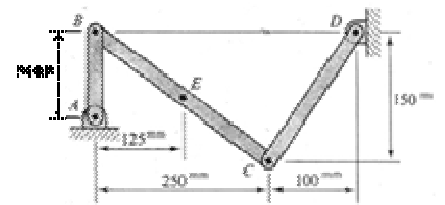


Figura 5.35

- 5.2. En la figura 5.36 se representa el mecanismo de un motor alternativo de gas, éste se compone de una manivela (cigüeñal), una biela y el pistón. La velocidad angular del cigüeñal es  $300 \text{ rpm}$  en sentido horario. Calcule la velocidad del pistón en la configuración representada.

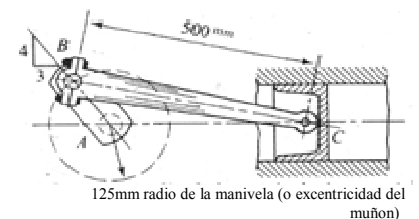


Figura 5.36

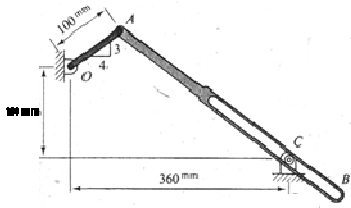


Figura 5.37

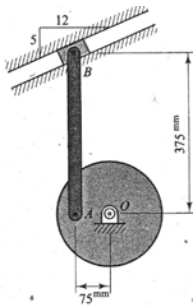


Figura 5.38

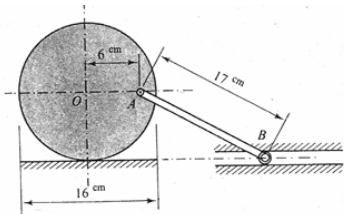


Figura 5.39

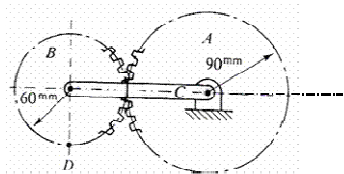


Figura 5.40

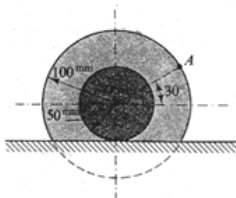


Figura 5.41

- 5.3. La manivela  $OA$  de la figura 5.37 posee velocidad angular constante en sentido horario, su magnitud es  $6.25\text{rad/s}$ . Cuando el mecanismo se encuentra en la posición representada en la figura, calcule:
- La velocidad angular del miembro  $AB$ .
  - La velocidad lineal del punto que pertenece al miembro  $AB$  y coincide con el eje del rodillo  $C$ .
- 5.4. El miembro  $AB$  del mecanismo de la figura 5.38 posee una velocidad angular de  $3.0\text{rad/s}$  en sentido horario en la posición representada. Calcule:
- La velocidad del punto  $B$ .
  - La velocidad angular de la manivela (disco)  $OA$ .
- 5.5. La rueda de la figura 5.39 gira sin deslizar, y la velocidad del punto  $O$  es constante e igual a  $40\text{cm/s}$  dirigida hacia la izquierda. Calcule la velocidad lineal del punto  $B$  en la posición ilustrada.
- 5.6. El engranaje  $A$  de la figura 5.40 gira con una velocidad angular de  $2\text{rad/s}$  en sentido horario. El engranaje  $B$  rueda sin deslizar sobre el engranaje  $A$ . El brazo  $C$  interconecta los engranajes en la forma ilustrada y gira con una velocidad angular de  $3\text{rad/s}$  en sentido horario. Calcule:
- La velocidad angular del engranaje  $B$ .
  - La velocidad lineal del punto  $D$  perteneciente al engranaje  $B$ .
- 5.7. La rueda de la figura 5.41 gira sin deslizar sobre la superficie fija. En la posición representada la velocidad y aceleración del centro  $O$  se dirigen hacia la derecha y sus magnitudes son  $500\text{mm/s}$  y  $750\text{mm/s}^2$ , respectivamente. Calcule la velocidad y aceleración del punto  $A$  en la posición definida.

- 5.8. La rueda  $A$  de la figura 5.42 gira sin deslizar sobre la superficie horizontal plana y está conectada al cuerpo  $B$  mediante una cuerda flexible. En la posición representada la velocidad y la aceleración del punto  $C$  se dirigen hacia la izquierda y sus magnitudes son  $8\text{cm/s}$  y  $20\text{cm/s}^2$ , respectivamente. Calcule la aceleración del cuerpo  $B$  relativa al punto  $D$ .

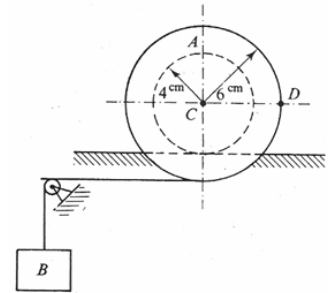


Figura 5.42

- 5.9. La barra  $CD$  del mecanismo de la figura 5.43 posee, en el instante considerado, una velocidad angular de  $1.0\text{rad/s}$  y una aceleración angular de  $2.0\text{rad/s}^2$ , las dos en sentido horario. Calcule la aceleración angular de la barra  $BC$ .

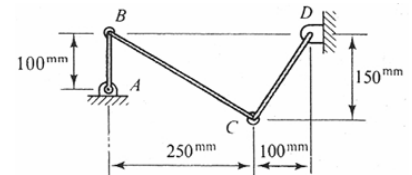


Figura 5.43

- 5.10. El rodillo  $C$  del mecanismo de la figura 5.44 posee en la configuración definida una velocidad de  $1.050\text{m/s}$  dirigida hacia la derecha y ésta disminuye a razón de  $2.50\text{m/s}^2$ . Calcule la velocidad y aceleración angulares del miembro  $OA$ .

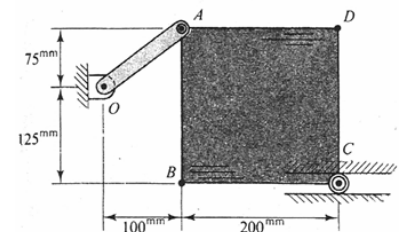


Figura 5.44

- 5.11. La velocidad del punto  $A$  de la figura 5.45 es  $210\text{mm/s}$  en el sentido descendente de la ranura y su aceleración es  $2.00\text{m/s}^2$  en el sentido ascendente de la ranura. Calcule la aceleración del punto  $C$ .

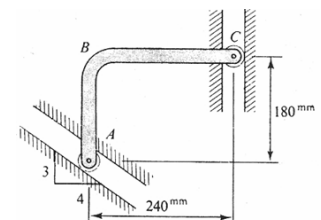


Figura 5.45

- 5.12. En la posición definida en la figura 5.46, la velocidad y la aceleración del rodillo  $A$  son  $0.70\text{m/s}$  hacia abajo y  $1.50\text{m/s}^2$  hacia arriba, respectivamente. Calcule la velocidad y aceleración angulares del miembro  $AB$ .

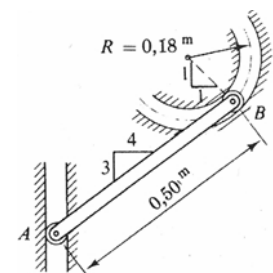


Figura 5.46

- 5.13. El disco de la figura 5.47 rueda sin deslizar sobre la pista circular. La velocidad angular del disco es constante en sentido horario y su magnitud es  $30\text{rpm}$ .

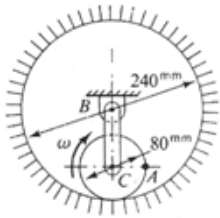


Figura 5.47

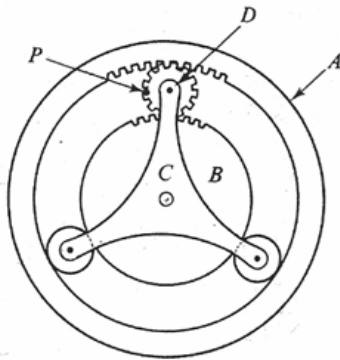


Figura 5.48

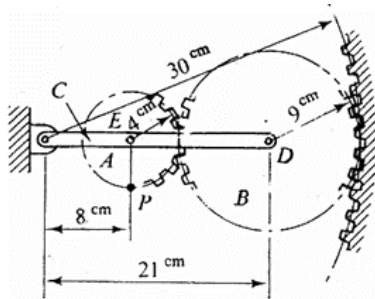


Figura 5.49

- Calcule el tiempo requerido para que el centro del disco complete una revolución alrededor del punto  $B$ .
- Calcule la aceleración del punto  $A$  cuando el disco se encuentra en la posición definida en la figura.
- Calcule la aceleración del punto  $A$  considerando que el disco posee además de la velocidad angular una aceleración angular antihorario de  $4\text{rad/s}^2$ .

- 5.14. El sistema de engranajes planetarios de la figura 5.48 cuenta con una corona exterior  $A$ , un engranaje interior (sol)  $B$ , y un cuerpo central (araña) que sostiene los tres engranajes pequeños (planetas)  $D$ . Los diámetros primitivos son  $30\text{cm}$  para  $A$ ,  $20\text{cm}$  para  $B$  y  $5\text{cm}$  para los engranajes  $D$ . La velocidad angular de  $A$  es nula, y la velocidad angular de  $C$  es  $10\text{rpm}$  en sentido horario. Calcule
- La velocidad angular de  $B$ .
  - La velocidad del punto  $P$  perteneciente al engranaje  $D$ .

- 5.15. Los engranajes  $A$  y  $B$  de la figura 5.49 están conectados al brazo  $C$  mediante los pasadores lisos  $E$  y  $D$ .  $C$  gira en sentido horario con velocidad angular constante de  $3\text{rad/s}$ . El engranaje  $B$  gira sin deslizar sobre la corona fija y sobre el engranaje  $A$ . Calcule, en la configuración representada, la velocidad del punto  $P$  perteneciente al piñón  $A$ .



# 6

## CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

### 6.1. Movimiento Plano General

En este capítulo consideramos el movimiento de un cuerpo rígido en movimiento plano general, por lo que significamos que el centro de masa se mueve en un plano y cualquier rotación es respecto al eje instantáneo perpendicular al plano.

En el capítulo 3, fue expuesto que la resultante de las fuerzas externas sobre un cuerpo es igual al producto de la masa total y la aceleración del centro de masa. Ahora debemos considerar el efecto de la posición de las líneas de acción de las fuerzas aplicadas, recordando que la aceleración del centro de masa es el mismo, si o no la línea de acción de la resultante pasa a través del centro de masa.

Consideremos inicialmente un grupo de partículas en movimiento al azar. Para una partícula típica (ver figura 6.1

$$\sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{f}_{ij}$  es la fuerza sobre la partícula  $i$  debida a la partícula  $j$  y  $\mathbf{F}_i$  que es una fuerza aplicada externamente.

Tomando los momentos de las fuerzas respecto a  $O$ , tenemos:

$$\mathbf{r}_i \times \sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \quad (6.2)$$

El momento total de las fuerzas internas es cero, puesto que las fuerzas internas se presentan en pares de fuerzas colineales de igual magnitud pero de sentido opuesto.

Y así sumando para todas las partículas, nos da:

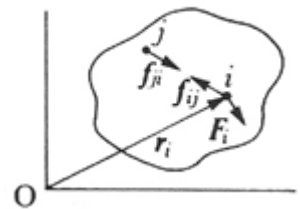


Figura 6.1

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{r}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) = \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \quad (6.3)$$

o

Momento de fuerzas externas =  $\sum$  momento de ( $m\mathbf{a}$ )  
 = momento del índice de variación con respecto al tiempo del *momentum*.  
 = derivado con respecto al tiempo de el momento del *momentum*.

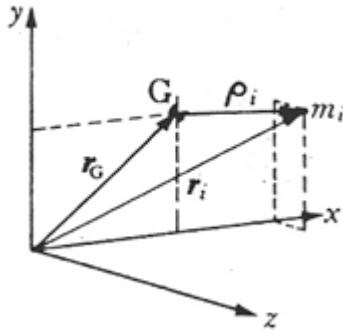


Figura 6.2.

Podemos hacer uso de la definición del centro de masa y de acuerdo a  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \boldsymbol{\rho}_i$  (ver figura 6.2), la ecuación (6.3) queda como

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \sum \mathbf{r}_G \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_G + \sum \mathbf{r}_G \times m_i \mathbf{r} \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i + \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_G + \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i \\ &= \mathbf{r}_G \times M \ddot{\mathbf{r}}_G + \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i \end{aligned} \quad (6.4)$$

El segundo y tercer término del lado derecho de la ecuación previa son cero debido a las propiedades del centro de masa ver ecuaciones (3.18) y (3.18a)

Si el cuerpo está en movimiento plano como previamente se ha especificado, entonces  $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_i$  es debida sólo a la rotación del cuerpo rígido en el plano  $xy$ .

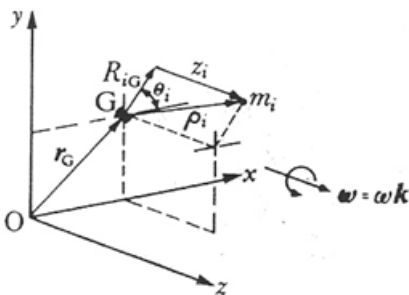


Figura 6.3.

Usando coordenadas cilíndricas (figura 6.3)

$$\boldsymbol{\rho}_i = R_{iG} \mathbf{e}_r + z_i \hat{\mathbf{k}} \quad (6.5)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_i = -\omega^2 R_{iG} \mathbf{e}_r + \dot{\omega} R_{iG} \mathbf{e}_\theta \quad (6.6)$$

Tomando momentos respecto al eje  $Gz$

$$\mathbf{M}_G = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

Pero,  $\boldsymbol{\rho}_i \times m \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \hat{\mathbf{k}} = m_i \begin{vmatrix} R_{iG} & 0 & z_i \\ -\omega^2 R_{iG} & \dot{\omega} R_{iG} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{\omega} m_i R_{iG}^2$

Por tanto 
$$M_G = \dot{\omega} \sum m_i R_{iG}^2 \quad (6.7)$$

El término  $\sum m_i R_{iG}^2$  es conocido como el *momento de inercia* del cuerpo respecto a un eje que pasa por  $G$  paralelo al eje  $z$  y se le da el símbolo  $I_G$ .  $I_G$  es también escrito como  $Mk_G^2$ , donde  $M$  es la masa del cuerpo y  $k_G$  es llamado *radio de giro*.

Así:

$$M_G = I_G \dot{\omega} = I_G \alpha$$

y, puesto que  $\omega$  es fija en dirección y  $I_G$  es una constante para el cuerpo rígido,

$$M_G = \frac{d}{dt}(I_G \omega) \quad (6.8)$$

Para cualquier cuerpo rígido en movimiento plano general ahora tenemos tres importantes ecuaciones:

$$F_x = M\dot{x}_G \quad (6.9)$$

$$F_y = M\dot{y}_G \quad (6.10)$$

y 
$$M_G = I_G \dot{\omega} = Mk_G^2 \dot{\omega} \quad (6.11)$$

Podíamos elegir tomar momentos respecto a algún punto  $O$  diferente al centro de masa, entonces de la ecuación 6.4, *debemos añadir un término igual al momento de la masa total multiplicado por la aceleración del centro de masa* en el lado derecho de la ecuación 6.11. Refiriéndonos a la figura 6.4.

$$M_O = I_G \dot{\omega} + \mathbf{r}_G \times M \mathbf{a}_G \quad (6.12a)$$

Al utilizar el algebra vectorial aquí, observamos que el término final de la ecuación (6.12a) es la componente de  $(\mathbf{r}_G \times M \mathbf{a}_G)$  en la dirección  $z$ ; así

$$M_O = I_G \dot{\omega} + (\mathbf{r}_G \times M \mathbf{a}_G) \cdot \hat{\mathbf{k}} \quad (6.12b)$$

Nótese que, aún cuando  $\dot{\omega} = 0$ ,  $M_O$  no necesariamente es cero. Además ponemos de relieve la importancia del *centro de masa*, debido a que su uso en la cinética de

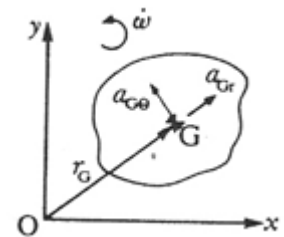


Figura 6.4



translación y de rotación puede ser tratado separadamente.

## 6.2. Rotación Respecto a un Eje Fijo

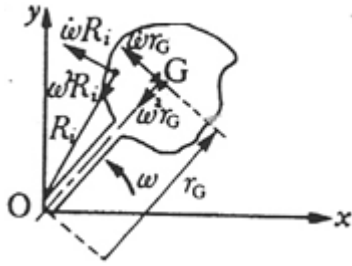


Figura 6.5

Un caso general sin embargo especial de movimiento plano general es la rotación respecto a un eje fijo. Si el eje de rotación pasa a través de  $O$  luego la velocidad angular del segmento de recta  $OG$  será el mismo que la del cuerpo, a saber  $\omega \mathbf{k}$ . Referente a la figura 6.5 y utilizando la ecuación (6.3) se desprende que el momento respecto a  $Oz$  de las fuerzas externas es:

$$\begin{aligned} M_O &= \sum R_i (m_i R_i \dot{\omega}) \\ &= \dot{\omega} \sum m_i R_i^2 = \dot{\omega} I_O \end{aligned}$$

donde  $I_O = \sum m_i R_i^2$  se define como el momento de inercia respecto al eje  $Oz$ .

De la ecuación (6.12a),

$$\begin{aligned} M_O &= I_G \dot{\omega} + r_G M \dot{\omega} r_G \\ &= (I_G + M r_G^2) \dot{\omega} = I_O \dot{\omega} \end{aligned} \quad (6.13)$$

## 6.3. Momento de Inercia de un Cuerpo Respecto a un Eje

*Teorema de los ejes paralelos.* El momento de inercia respecto al eje  $z$  se define como

$$I_O = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

De la figura 6.6,

$$x_i = x_G + x'_i \quad y \quad y_i = y_G + y'_i$$

$$\text{así } x_i^2 + y_i^2 = (x_G^2 + x_G'^2) + (x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_G x'_i + 2y_G y'_i$$

$$= r_G^2 + R_{iG}^2 + 2x_G x'_i + 2y_G y'_i$$

En virtud de las propiedades del *c.m.* (centro de masa),

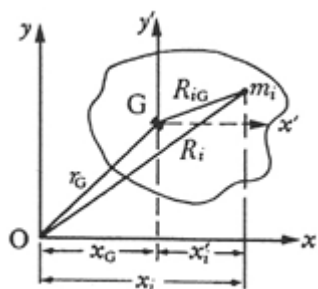


Figura 6.6

$$x_G \sum m_i x'_i = 0$$

y 
$$y_G \sum m_i y'_i = 0$$

por tanto 
$$I_O = \sum m_i r_G^2 + \sum m_i R_{iG}^2$$

$$= Mr_G^2 + I_G \tag{6.14}$$

$$= M(r_G^2 + k_G^2) = Mk_O^2 \tag{6.15}$$

Donde  $k_O$  es el radio de giro respecto al eje  $z$ .

*Teorema de los ejes perpendiculares.* Considere la lámina delgada en el plano  $xy$  mostrado en la figura 6.7.

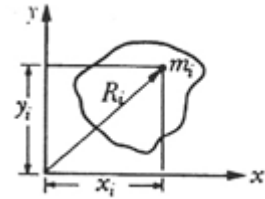


Figura 6.7

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i x_i^2$$

y

$$I_2 = \sum m_i R_i^2$$

$$= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$= I_x + I_y \tag{6.16}$$

*Momento de inercia de un cilindro circular recto uniforme*

i) *Momento de inercia respecto al eje del cilindro.* En la figura 6.8. La masa de una varilla elemental es  $\delta L dr(r d\theta)$ , donde  $\delta$  es la densidad del material.

$$\text{Momento de inercia respecto al eje} = (\delta L dr)(r d\theta)r^2$$

Así para el cuerpo completo

$$I_{Gz} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \delta L r^3 dr d\theta$$

$$= \int_0^a \delta L r^3 dr(2\pi) = \delta L 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \delta L a^4$$

La masa del cilindro es  $\delta \pi a^2 L$ , por consiguiente:

$$I_{Gz} = M \frac{a^2}{2} = Mk_{Gz}^2$$

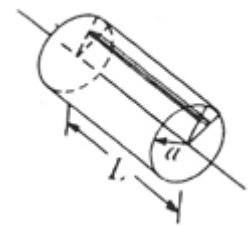


Figura 6.8

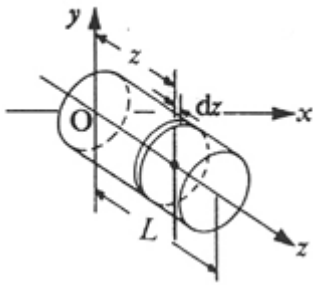


Figura 6.9

- ii) *Momento de inercia respecto a un diámetro externo.* Para una lámina circular, relativo a su centro de masa (figura 6.9),  $I_x = I_y$ ; por lo que del teorema de los ejes,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} \pi \delta a^4 dz$$

El momento de inercia respecto al eje  $x$  puede encontrarse a través del teorema de los ejes paralelos, para la lámina,

$$I_x = \frac{1}{4} \pi \delta a^4 + \delta \pi a^2 dz (z^2)$$

e integrando para la barra completa, se tiene

$$\begin{aligned} I_x &= \pi \delta a^2 \int_0^L \left( \frac{1}{4} a^2 + z^2 \right) dz \\ &= (\delta \pi a^2 L) \left( \frac{a^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right) \end{aligned}$$

Podemos emplear el teorema de los ejes paralelos para encontrar el momento de inercia respecto a un diámetro a través del centro de masa:

$$\begin{aligned} I_{G_x} &= M \left( \frac{a^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right) - M \left( \frac{L}{2} \right)^2 \\ &= M \left( \frac{a^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right) \end{aligned}$$

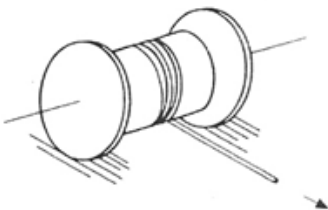


Figura 6.10

#### 6.4. Aplicaciones

Como un ejemplo de la aplicación de la teoría precedente, considere el problema del tambor con un cable arrollado figura 6.10.

Admitamos que el tambor tiene simetría, que el cable es horizontal y que el rozamiento entre el piso y el tambor es suficiente para evitar deslizamiento. Si la tensión en el

cable es  $T$ , ¿Cuál es la aceleración del tambor y la dirección del movimiento?

El primer paso importante es trazar el diagrama de cuerpo libre como el mostrado en la figura 6.11. El siguiente paso es establecer las restricciones cinemáticas. En este caso la condición de no deslizamiento en el piso, nos da

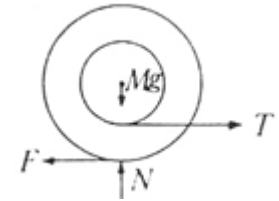


Figura 6.11

$$\dot{x}_G = -R\dot{\theta}, \quad \dot{y}_G = 0$$

y

$$\ddot{x}_G = -R\ddot{\theta}, \quad \ddot{y}_G = 0 \quad (6.17)$$

Podemos ahora escribir las tres ecuaciones de movimiento (ver ecuaciones 6.9-6.11 y figura 6.11):

$$T - F = M\ddot{x}_G \quad (6.18)$$

$$N - Mg = 0 \quad (6.19)$$

$$Tr - FR = I_G\ddot{\theta} \quad (6.20)$$

Eliminando F y N conduce a

$$T\left(1 - \frac{r}{R}\right) = M\ddot{x}_G - I_G\frac{\ddot{\theta}}{R} \quad (6.21)$$

y, pues no habiendo deslizamiento  $\ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}_G}{R}$ ,

$$T\left(1 - \frac{r}{R}\right) = \left(M + \frac{I_G}{R^2}\right)\ddot{x}_G$$

por lo que

$$\ddot{x} = \frac{T\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\left(M + \frac{I_G}{R^2}\right)} \quad (6.22)$$

Puesto que  $R > r$ ,  $\ddot{x}_G$  es positiva y de este modo el tambor acelera hacia la derecha. Como el tambor parte del reposo, se desprende que el movimiento es desviado a la derecha. Una conjetura intuitiva podría haber producido un resultado erróneo.

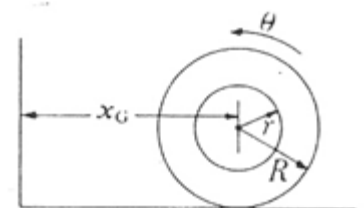


Figura 6.12

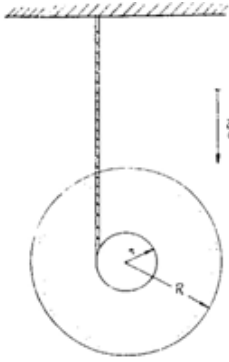


Figura 6.13a

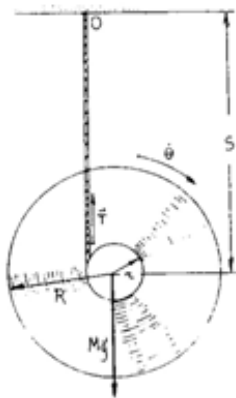


Figura 6.13b

Otro ejemplo de aplicación es el descenso de un yoyo-Imagine un yoyo cuyo radio exterior  $R$  es 10 veces el radio de su eje  $r$ . El momento de inercia  $I_C$  del yoyo respecto de su eje es aproximadamente  $I_C = m \frac{R^2}{2}$  donde  $m$  es la masa total del yoyo. El extremo superior de la cuerda del yoyo se mantiene fijo (figura 6.13a)

- Calcule la aceleración del centro de masa del yoyo o compárela con  $g$ .
- Calcule la tensión en la cuerda a medida que el yoyo desciende y compárela con  $mg$ .

*Solución:* (ver figura 6.13b). Si llamamos  $s$  a la posición vertical del centro de masa del yoyo, medida desde el extremo fijo de la cuerda, la ecuación de movimiento del centro de masa del yoyo es:

$$mg - T = m\ddot{s} \quad (1)$$

La ecuación del torque (momento torsional) con respecto al punto  $O$  es

$$mgr = \frac{d}{dt} \left( H_{cm} + H_{cr/cm} \right) \quad (2)$$

en que el momentum angular del centro de masa respecto a  $O$  es:

$$H_{cm} = mrs\dot{\theta}, \quad (3)$$

y el momentum angular del yoyo respecto al centro de masa es:

$$H_{cr/cm} = I_c \dot{\theta} \quad (4)$$

en este caso  $I_c = m \frac{R^2}{2}$ . La condición de rodar sin resbalar para el yoyo es  $\dot{s} = r\dot{\theta}$ . Entonces, de (2), (3) y (4) tenemos:

$$mgr = mrs\ddot{\theta} + \frac{I_c}{r} \ddot{s},$$

es decir,

$$\ddot{s} = g \frac{I}{I + (I_c / mr^2)} = g \frac{I}{I + (R^2 / 2r^2)}, \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Reemplazando el valor de  $R$  obtenemos

$$\ddot{s} = \frac{g}{5I},$$

Finalmente, de (1) y (5) tenemos

$$T = mg - m\ddot{s} = \frac{50}{5I} mg, \quad \leftarrow \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

### 6.5. Ejemplos de Discusión y Ejercicios de Trabajo

#### *Ejemplos de Discusión*

Ejemplo 6.1. Un hombre desea deslizar una caja homogénea de  $60\text{kg}$  empujándola con la fuerza  $\mathbf{P}$  en la forma indicada en la figura 6.14. El coeficiente de rozamiento entre la caja y el piso es  $0.20$ . ¿Puede desarrollarse una aceleración de  $2.0\text{m/s}^2$  hacia la derecha sin balancear la caja? Si es posible, calcule la magnitud de la fuerza requerida.

*Solución:* En la figura 6.14b se define el diagrama de cuerpo libre de la caja. Las ecuaciones que describen la traslación del cuerpo son:

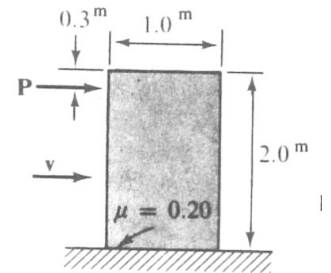
$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} = m(a_{G_x} \mathbf{i} + a_{G_y} \mathbf{j}),$$

$$\sum M_{G_z} \mathbf{k} = 0$$

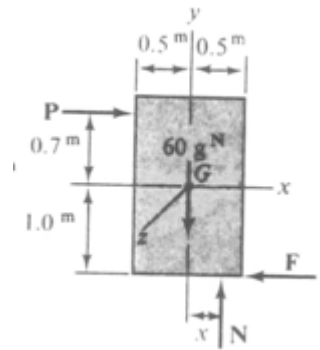
Suponga que la caja se desliza sin balancearse. La suposición anterior se verifica calculando la distancia  $x$ ; si  $x$  es menor que  $0.5\text{m}$  la caja no se balancea. La fuerza  $\mathbf{P}$  debe ser suficiente para deslizar la caja; por tanto, la fuerza de rozamiento debe ser igual a su valor límite, luego

$$F = F' = \mu N = 0.20N. \quad (\text{a})$$

Las ecuaciones que describen el movimiento se expresan como:



(a)



(b)

Figura 6.14

$$P\mathbf{i} - F\mathbf{i} + N\mathbf{j} - 60(9.81)\mathbf{j} = 60(2.0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) = 120\mathbf{i}$$

y

$$\sum M_{G_z} \mathbf{k} = xN\mathbf{k} - 0.7P\mathbf{k} - 1.0F\mathbf{k} = 0$$

Las ecuaciones escalares son

$$\mathbf{i} : P - F = 120 \quad , \quad (\text{b})$$

$$\mathbf{j} : N - 60(9.81) = 0 \quad (\text{c})$$

$$\mathbf{k} : xN - 0.7P - 1.0F = 0 \quad (\text{d})$$

Las ecuaciones (a)-(d) permiten calcular tres fuerzas desconocidas y una distancia. El valor de  $N$  se calcula de la ecuación (c) y se sustituye en las ecuaciones (a) y (b). Los resultados son:

$$N = 589 \mathbf{j} \text{ N}, \quad F = -117.7 \mathbf{i} \text{ N}, \quad P = \underline{238 \mathbf{i} \text{ N}} \quad \leftarrow$$

Remplazando en la ecuación (d) se calcula el valor de  $x$ , éste es

$$x = 0.483 \text{ m}$$

Luego el balanceo no es inminente por cuanto  $x$  es menor que  $0.5 \text{ m}$ . Si  $x$  fuera igual a  $0.5 \text{ m}$  la caja estaría a punto de balancear. Finalmente si  $x$  fuese mayor que  $0.5 \text{ m}$ , la caja se balancearía o volcaría antes que  $P$  alcance el valor  $238 \text{ N}$ , y la solución encontrada no sería válida.

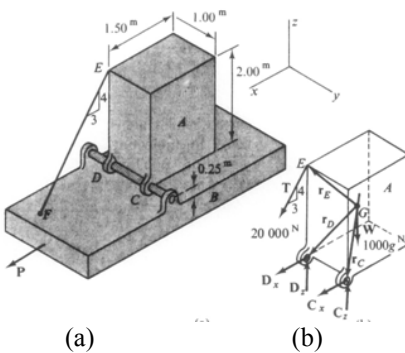


Figura 6.15

Ejemplo 6.2. El sistema representado en la figura 6.15a se traslada con una aceleración paralela al eje  $x$ . El cuerpo homogéneo  $A$  de  $1000 \text{ kg}$  se mantiene elevado sobre el cuerpo  $B$  y se apoya en el eje liso mediante los cojinetes  $C$  y  $D$ . la tensión en la cuerda  $EF$ , paralela al plano  $xz$ , es  $20 \text{ kN}$ . Calcule la reacción de los cojinetes  $C$  y  $D$  sobre el cuerpo  $A$  y la aceleración del sistema.

*Solución:* En la definición del problema se especifican la masa de  $A$  y la tensión de la cuerda. Se deben calcular las reacciones sobre  $A$  en los puntos  $C$  y  $D$  y la aceleración del cuerpo  $A$ .

En la figura 6.15b se define el diagrama de cuerpo libre de  $A$ .

Se considera que las fuerzas aplicadas en  $C$  y  $D$  carecen de componente en la dirección  $y$  porque el eje es liso. El cuerpo  $A$  se traslada pero no todas las fuerzas están contenidas en un mismo plano; por tanto, deben utilizarse las ecuaciones:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad \sum M_G = 0$$

En el diagrama de cuerpo libre existen cinco incógnitas, ellas son  $C_x$ ,  $C_z$ ,  $D_x$ ,  $D_y$ , y  $a = a_x \mathbf{i}$ .

En general, las dos ecuaciones vectoriales proporcionan seis ecuaciones escalares. Sin embargo, la ecuación  $\sum F_y = ma_y$  no proporciona información útil porque no existen fuerzas ni aceleraciones en esta dirección; en consecuencia, se cuenta con cinco ecuaciones, para calcular cinco incógnitas.

La tensión del cable es paralela al plano  $xz$ , y se expresa como

$$\mathbf{T} = 20000(0.6\mathbf{i} - 0.8\mathbf{k}) = (12000\mathbf{i} - 16000\mathbf{k})N$$

Los ejes del sistema de coordenadas adoptado identifican las direcciones positivas. La ecuación de las fuerzas se expresa como

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{W} = m(a_x)\mathbf{i}$$

que se convierte en

$$\begin{aligned} (12000\mathbf{i} - 16000\mathbf{k}) + (C_x\mathbf{i} + C_z\mathbf{k}) + (D_x\mathbf{i} + D_z\mathbf{k}) - 1000(9.81)\mathbf{k} \\ = 1000a_x\mathbf{i} \end{aligned}$$

Las componentes de la ecuación son:

$$12000 + C_z + D_z = 1000a_x \quad (\text{a})$$

y

$$-16000 + C_z + D_z - 9810 = 0 \quad (\text{b})$$

Para expresar vectorialmente la ecuación de momentos, es necesario definir vectores desde  $G$  hasta puntos pertenecientes a las líneas de acción de las fuerzas  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ , y  $\mathbf{T}$ . Para definir los vectores mencionados se escogen los puntos  $C$ ,  $D$  y  $E$ .  $G$  coincide con el centro geométrico del



## Principios de Mecánica para Ingeniería

bloque porque éste es homogéneo; los vectores de posición son

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= (0.75 \mathbf{i} + 0.50 \mathbf{j} - 1.00 \mathbf{k})m, \quad \mathbf{r}_D = (0.75 \mathbf{i} - 0.50 \mathbf{j} - 1.00 \mathbf{k})m \\ \mathbf{r}_E &= (0.75 \mathbf{i} - 0.50 \mathbf{j} + 1.00 \mathbf{k})m \end{aligned}$$

La ecuación de momento es

$$\sum \mathbf{M}_G = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_C + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_D + \mathbf{r}_E \times \mathbf{T} = 0$$

o

$$\begin{aligned} &(0.75 \mathbf{i} + 0.50 \mathbf{j} - 1.00 \mathbf{k}) \times (C_x \mathbf{i} + C_z \mathbf{k}) \\ &+ (0.75 \mathbf{i} - 0.50 \mathbf{j} - 1.00 \mathbf{k}) \times (D_x \mathbf{i} + D_z \mathbf{k}) \\ &+ (0.75 \mathbf{i} - 0.50 \mathbf{j} + 1.00 \mathbf{k}) \times (12000 \mathbf{i} - 16000 \mathbf{k}) = 0 \end{aligned}$$

que al expandirla se convierte en

$$\begin{aligned} &[0.50C_z \mathbf{i} - (C_x + 0.75C_z) \mathbf{j} - 0.50C_x \mathbf{k}] + \\ &+ [-0.50D_z \mathbf{i} - (D_x + 0.75D_z) \mathbf{j} + 0.50D_x \mathbf{k}] + \\ &+ [8000 \mathbf{i} + (12000) \mathbf{j} + 6000 \mathbf{k}] = 0 \end{aligned}$$

Como las componentes en las direcciones  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , y  $\mathbf{k}$  deben ser nulas, la ecuación vectorial anterior es equivalente al sistema de ecuaciones escalares:

$$\mathbf{i} : 0.50C_z - 0.50D_z + 8000 = 0, \quad (\text{c})$$

$$\mathbf{j} : -(C_x + D_x) - 0.75(C_z + D_z) + 24000 = 0, \quad (\text{d})$$

$$\mathbf{k} : 0.50C_x + 0.50D_x + 6000 = 0 \quad (\text{e})$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (b) y (c) se obtienen los valores de  $C_z$  y  $D_z$ :

$$C_z = +4905, \quad D_z = +20905$$

Como la ecuación (b) indica que  $C_z + D_z = 25810$ , la ecuación (d) puede expresarse como

$$-(C_x + D_x) - 0.75(25810) + 24000 = 0$$

$$C_x + D_x = 4642.5 \quad (\text{f})$$

La solución simultánea de las ecuaciones (e) y (f) da

$$C_x = +8321, \quad D_x = -3679$$

Las reacciones de los cojinetes sobre el cuerpo  $A$  son

$$F_C = (8321\mathbf{i} + 4905\mathbf{k}) = 9660(0.861\mathbf{i} + 0.508\mathbf{k})N \quad \leftarrow^r$$

y

$$F_D = (-3679\mathbf{i} + 20905\mathbf{k}) = \underline{21200(-0.1733\mathbf{i} + 0.985\mathbf{k})N} \quad \leftarrow^r$$

La ecuación (a) permite calcular la aceleración

$$12000 + 8321 - 3679 = 1000a_x \quad \text{o} \quad a_x = 16.64$$

de donde

$$a = 16.64\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad \leftarrow^r$$

**Ejemplo 6.3.** El radio de giro de la masa de la rueda desbalanceada  $A$  de  $30\text{kg}$ , representada en la figura 6.16a, es de  $150\text{mm}$  con respecto a un eje horizontal que pasa por el punto  $O$ . La rueda es simétrica con respecto al plano del movimiento. El bloque  $B$  de  $20\text{kg}$  se une al cuerpo  $A$  mediante una cuerda inextensible que pasa por el tambor liso  $D$  y se arrolla en  $A$ . El momento del par  $C$ , que actúa sobre  $A$ , es de  $35\text{N}\cdot\text{m}$  en sentido antihorario. En la configuración representada en la velocidad angular de  $A$  es  $6.0\text{rad/s}$  en sentido horario. Calcule las componentes normal y tangencial de la reacción del cojinete  $O$  sobre el cuerpo  $A$ . Desprecie el efecto del rozamiento en el cojinete  $O$ .

**Solución:** En la figura 6.16b se define el diagrama de cuerpo libre de la rueda  $A$ . La reacción en el punto  $O$  se representa descompuesta en las direcciones normal y tangencial del movimiento del centro de masa de la rueda, éstas coinciden con los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente. En este caso puede aplicarse la ecuación (6.9, 6.10, 6.11) porque el cuerpo es simétrico con respecto al plano del movimiento; luego, las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo  $A$  son:

$$\sum F_x = ma_{G_x} = -mr_G\omega^2$$

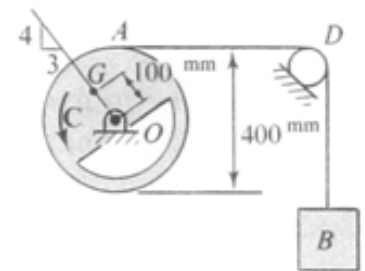


Figura 6.16a

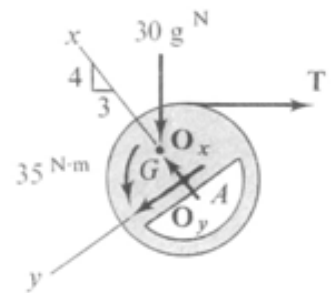


Figura 6.16b

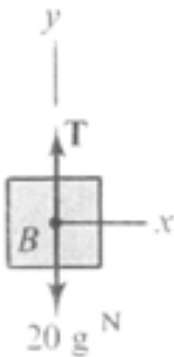


Figura 6.16c

$$O_x - 0.60T - 0.80(30)(9.81) = -30(0,10)(-6,0)^2;$$

$$\sum F_y = ma_{G_y} = mr_G \alpha,$$

$$O_y - 0.80T + 0.60(30)(9.81) = 30(0,10)\alpha;$$

$$\sum M_{O_z} = I_z \alpha = mk_z^2 \alpha$$

Las tres ecuaciones anteriores contienen cuatro incógnitas,  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $T$  y  $\alpha$ . La consideración del diagrama de cuerpo libre del bloque  $B$ , definido en la figura 6.16c, permite obtener una ecuación adicional. La ecuación que describe el movimiento de  $B$  en la dirección  $y$  es:

$$\sum F_y = ma_y,$$

$$T - 20(9.81) = 20a_{B_y} \quad (d)$$

Esta ecuación no contiene fuerzas adicionales desconocidas, y la aceleración  $a_{B_y}$  puede expresarse en términos de la aceleración angular de  $A$ . Para expresar esta relación cinemática es necesario tomar en consideración la dirección positiva del eje del cuerpo  $B$  y la dirección de  $\alpha$  del cuerpo  $A$ , en la situación actual.

$$a_{B_y} = 0.20\alpha \quad (e)$$

Se cuenta con cinco ecuaciones para cinco incógnitas. Sustituyendo la ecuación (e) en la ecuación (d), las ecuaciones (d) y (c) pueden resolverse simultáneamente para  $T$  y  $\alpha$ , los resultados son:

$$T = 232.6 N$$

y

$$\alpha = 9.079 \text{ rad/s}^2$$

Reemplazando estos resultados en las dos primeras ecuaciones se obtienen los componentes de la reacción. Los resultados son:

$$O_x = 267 \text{ i N} \quad \leftarrow^r$$

$$O_y = 36.8 \text{ j N} \quad \leftarrow^r$$

Ejemplo 6.4. En la figura 6.17a se representa una placa triangular recta, homogénea de  $36\text{kg}$ , que gira alrededor del eje  $z$  en la posición representada, su velocidad y aceleración angulares son  $4\text{krad/s}$  y  $6\text{krad/s}^2$ , respectivamente. La placa está montada sobre una barra circular lisa, soportada por cojinetes lisos en los puntos  $B$  y  $C$ . Para la situación definida calcule el par  $T$  aplicado a la barra y las reacciones de los cojinetes sobre la barra. Desprecie la masa de la barra.

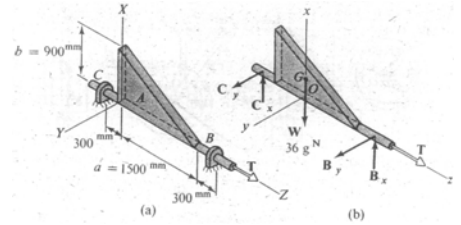


Figura 6.17

*Solución:* Se conocen la velocidad y la aceleración angulares de la placa, así como su masa y dimensiones; se pide calcular el par  $T$  y las reacciones de los cojinetes.

En la figura 6.17b se define el diagrama de cuerpo libre de la placa y la barra. No se consideran componentes de las reacciones en la dirección  $z$  porque la barra y los cojinetes  $B$  y  $C$  son lisos.

El cuerpo  $A$  gira, pero el cuerpo ni el sistema de fuerzas son simétricos con respecto al plano del movimiento (plano  $xy$ ), y aunque las ecuaciones (6.9, 6.10, 6.11) son válidas para este problema, no suministran información suficiente para resolverlo. Para analizar el problema pueden utilizarse las ecuaciones generalizadas de fuerzas y de momentos, ecuaciones (6.9) y (6.13). Las ecuaciones son:

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}_G$$

y

$$\sum \mathbf{M}_O = (\omega^2 I_{yz} - \alpha I_{xz}) \mathbf{i} - (\omega^2 I_{xz} + \alpha I_{yz}) \mathbf{j} + \alpha I_z \mathbf{k}$$

Estas ecuaciones incluyen cinco incógnitas cuatro componentes de las reacciones y el momento  $T$ . La aceleración de  $G$  se calcula de los datos cinemáticos especificados. Los momentos y productos de inercia se pueden calcular por integración o sustituyendo los datos especificados en las fórmulas consignadas en el Apéndice 5.

Las dos ecuaciones vectoriales que describen el movimiento equivalen a seis ecuaciones escalares. Sin

embargo, anteriormente se observó que no existen fuerzas en la dirección  $z$  por tanto, la ecuación

$$\sum F_z = ma_{G_z}$$

no suministra información útil; en conclusión, las dos ecuaciones generalizadas que describen el movimiento equivalen a cinco ecuaciones escalares únicamente. El análisis está completo porque el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

Los valores de los momentos y productos de inercia se calculan aplicando el teorema de los ejes paralelos. Luego (refiérase al Apéndice 5)

$$\begin{aligned} I_z &= I_{zG} + mx_G^2 = \frac{m(2b^2 + 3c^2)}{36 + md^2} \\ &= 36 \left[ \frac{2(0.90)^2 + 3(0)^2}{36} \right] + 36(0.30)^2 \\ &= 4.86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{xz} &= (I_{xz})_G + mx_G z_G = \frac{mab}{36 + m\left(\frac{b}{3}\right)(0)} \\ &= -\frac{36(1.50)(0.90)}{36} + 0 \\ &= -1.35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$I_{yz}$  es nulo porque el plano  $xz$  es un plano de simetría. La aceleración de  $G$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &= -r_G \omega^2 \mathbf{i} + r_G \alpha \mathbf{j} = -(0.30)(4)^2 \mathbf{i} + (0.30)(6) \mathbf{j} \\ &= (-4 - 8 \mathbf{i} + 1.8 \mathbf{j}) \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

La ecuación (6.9, 6.10) se expresa

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}_G$$

$$B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} - 36(9.81) \mathbf{i} = 36(-4.8 \mathbf{i} + 1.8 \mathbf{j}),$$

que es equivalente a

$$i : B_x + C_x = 36(9.81) - 36(4.8) = 180.4 \quad (a)$$

y

$$j : B_y + C_y = 64.8 \quad (b)$$

La ecuación (6.13) para los momentos es

$$\sum M_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_C + \mathbf{r}_G \times \mathbf{W} + \mathbf{T} = \alpha I_{xz} \mathbf{i} - \omega^2 I_{xz} \mathbf{j} + \alpha I_z \mathbf{k},$$

o

$$\begin{aligned} (1.30\mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}) + (-0.80\mathbf{k}) \times (C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j}) + (0.30\mathbf{i}) \times (-36)(9.81)\mathbf{i} + T\mathbf{k} \\ = -6(-1.35)\mathbf{i} - (4)^2(-1.35)\mathbf{j} + 6(4.86)\mathbf{k} \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$i : -1.30B_y + 0.80C_y = 8.10, \quad (c)$$

$$j : -1.30B_x - 0.80C_x = 21.60, \quad (d)$$

$$k : \quad \quad \quad T = 29.16, \quad (e)$$

Las ecuaciones (a) y (d) se resuelven simultáneamente para calcular  $B_x$  y  $C_x$ , las ecuaciones (b) y (c) permiten calcular  $B_y$  y  $C_y$ , y el par  $T$  se calcula de la ecuación (e).

Los resultados son:

$$B_x = 79.0\text{N}, \quad B_y = 20.8\text{N},$$

$$C_x = 101.4\text{N}, \quad C_y = 44.0\text{N},$$

y

$$T = 29.16\text{N}\cdot\text{m}$$

El par y las reacciones de los cojinetes son

$$T = \underline{29.2\text{kN}\cdot\text{m}},$$

$$\mathbf{F}_B = 79.0\mathbf{i} + 20.8\mathbf{j} = \underline{81.7(0.967\mathbf{i} + 0.255\mathbf{j})\text{N}}, \quad \leftarrow^r$$

y

$$\mathbf{F}_C = 101.4\mathbf{i} + 44.0\mathbf{j} = \underline{110.5(0.917\mathbf{i} + 0.398\mathbf{j})\text{N}}, \quad \leftarrow^r$$

Ejemplo 6.5. El cuerpo  $A$  de la figura 6.18a es un cilindro sólido y homogéneo de  $50\text{kg}$ , el cilindro cuenta con una ranura circunferencial estrecha cuya raíz

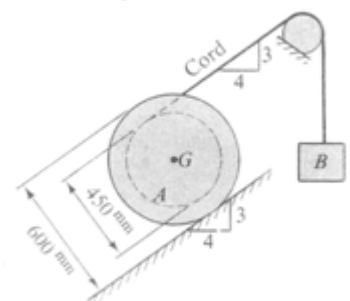


Figura 6.18a

Corresponde al círculo a trazos. Puede despreciarse el efecto de la ranura sobre el momento de inercia del cilindro. El coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el plano es  $0.40$ . El bloque  $B$  se conecta al cilindro  $A$  mediante una cuerda flexible que pasa por el tambor liso y se enrolla en la ranura del cilindro. Considerando que el cilindro debe girar sin deslizar sobre el plano inclinado, calcule la cantidad máxima de masa que puede poseer el cuerpo  $B$ . Se supone que el movimiento del punto de contacto del cilindro  $A$  con el plano inclinado es inminente en el sentido de descenso.

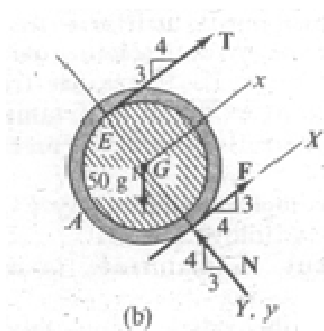


Figura 6.18b

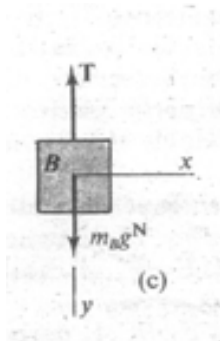


Figura 6.18c

Solución: En las figuras 6.18 (b) y (c) se definen los diagramas de cuerpo libre de los dos cuerpos  $A$  y  $B$ . En la inminencia del movimiento la fuerza de rozamiento  $F$  se opone al  $o$  a la inminencia potencial del movimiento, del punto de contacto. En consecuencia la fuerza de rozamiento en el punto de contacto del cilindro se dirige en el sentido de ascenso sobre el plano. El movimiento del cuerpo  $A$  es plano mientras que el cuerpo  $B$  se traslada. Las ecuaciones que describen el movimiento de  $A$  son:

$$\sum F_x = ma_{G_x} \quad \sum F_y = ma_{G_y} \quad \sum M_{G_z} = I_z \alpha$$

y la ecuación que describe el movimiento de  $B$  es

$$\sum F_y = ma_{B_y}$$

Dos de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  escogidos para el cuerpo  $A$  son paralelos y el otro es perpendicular al plano como se indica en la figura, esta selección implica que  $a_{G_y}$  es nula. Los ejes definidos en la figura 6.18b se escogieron en tal forma que a una aceleración angular positiva,  $\alpha \mathbf{k}$ , corresponde una aceleración positiva del centro de masa  $G$ ,  $a_{G_x} \mathbf{i}$ . En los diagramas de cuerpo libre existen cuatro incógnitas ( $m_B$ ,  $T$ ,  $F$  y  $N$ ), y las cuatro ecuaciones que describen el movimiento incluyen tres aceleraciones desconocidas ( $a_{G_x}$ ,  $\alpha$  y  $a_{B_y}$ ), luego se cuenta con cuatro ecuaciones para siete incógnitas. Es necesario obtener tres relaciones adicionales mediante consideraciones cinemáticas y de rozamiento.

Como el deslizamiento es inminente, la magnitud de la fuerza de rozamiento es

$$F = F' = 0.40 N$$

La condición de no deslizamiento implica que la aceleración de G es.

$$a_{Gz} \mathbf{i} = r\alpha \mathbf{i} = 0.300\alpha \mathbf{i}$$

*Observación:* Se supuso  $\alpha = \alpha \mathbf{k}$  (en sentido horario) por tanto  $(a_G)_x$  se dirige en el sentido de ascenso sobre el plano. La componente  $x$  de la aceleración del punto E (cuya magnitud es igual a la magnitud de la aceleración de B) puede expresarse en términos de la aceleración angular de A mediante la ecuación de la aceleración relativa. Luego, suponiendo  $\alpha$  en sentido horario.

$$a_E = a_G + a_{E/G}$$

de donde

$$(a_E)_x = (a_B)_y = +0.300\alpha + 0.225\alpha = +0.525\alpha$$

donde  $(a_E)_x$  se dirige en el sentido de ascenso sobre el plano y  $(a_B)_y$ , se dirige hacia abajo.

Sustituyendo los valores específicos en las ecuaciones que describen el movimiento de A se obtiene

$$\sum F_x = T + F - 0.6(50)(9.81) = 50a_{Gx} = 15\alpha,$$

$$\sum F_y = 0.8(50)(9.81) - N = 50a_{Gy} = 0,$$

y

$$\sum M_{Gz} = 0.225T - 0.300F = 0.5(50)(0.300)^2 \alpha.$$

En forma semejante la ecuación para B se convierte en:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 9.81m_B - T = m_B a_{By} \\ &= m_B (0.525)\alpha, \end{aligned}$$



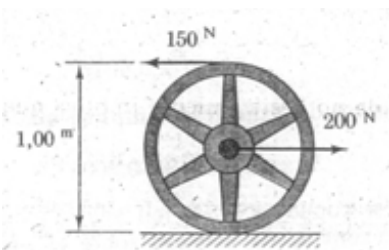


Figura 6.19(a)

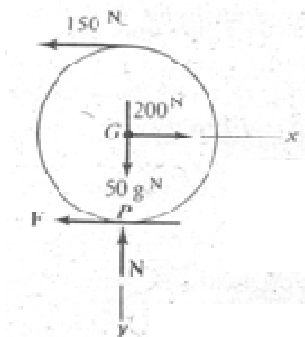


Figura 6.19(b)

y el rozamiento establece que

$$F = 0.40N$$

La solución de estas ecuaciones, nos da

$$m_B = \underline{156.5 \text{ kg.}}$$

$r$   
←

**Ejemplo 6.6.** La rueda de  $50 \text{ kg}$  de la figura 6.19(a) gira sobre la superficie plana horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la rueda y el plano es  $0.20$ . El radio de giro de la rueda con respecto a su eje geométrico es  $400 \text{ mm}$ . Calcule la aceleración del centro de la rueda y la aceleración angular de esta.

*Solución:* En la figura 9.18(b) se define el diagrama de cuerpo libre de la rueda. *En principio se supone que la rueda no desliza* porque el problema no especifica si ocurre o no deslizamiento. En la figura se definen las direcciones positivas de los ejes de referencia, y se supone que las aceleraciones son positivas. Las ecuaciones que describen el movimiento son:

$$\sum F_x = 200 - 150 - F = ma_{Gx} = 50a_{Gx}, \quad (\text{a})$$

$$\sum F_y = 50(9.81) - N = ma_{Gy} = 0, \quad (\text{b})$$

y

$$\sum M_{Gz} = 0.50F - 0.50(150) = I_{Gz}\alpha = 50(0.40)^2\alpha. \quad (\text{c})$$

El supuesto inicial sobre la rotación sin deslizamiento implica que las aceleraciones se relacionan mediante

$$a_{Gx} = r\alpha = 0.50\alpha$$

**Observación:** Esta ecuación es válida únicamente en el sistema de coordenadas seleccionado. Si  $y$  se dirige hacia arriba y  $z$  lo hace hacia el frente,  $a_{Gx}$  es igual a  $-r\alpha$  cuando el sistema de coordenadas es dextrógiro.

La solución simultánea de las ecuaciones anteriores permite obtener los resultados siguientes:

$$\begin{aligned}
 F &= 111.0N & F &= -111.0\mathbf{i}N, \\
 N &= 490.5N, & N &= -491\mathbf{j}N, \\
 \alpha &= -2.44\text{rad/s}^2, & \alpha &= -2.44\mathbf{k}\text{rad/s}^2, \\
 a_G &= 0.5(-2.44) = -1.22\text{m/s}^2, & \mathbf{a}_G &= -1.22\mathbf{i}\text{m/s}^2.
 \end{aligned}$$

La fuerza  $F=111N$  es la fuerza de rozamiento requerida para que el deslizamiento no ocurra. La fuerza de rozamiento máxima que puede desarrollarse es:

$$F' = \mu N = 0.20(490.5) = 98.1N$$

El supuesto inicial no es correcto porque  $F'$  es menor que  $F$  y en consecuencia, la solución es incorrecta. Sin embargo, el valor de  $N$  es correcto porque la ecuación para  $N$  no toma en consideración la hipótesis inicial. Reemplazando  $F=F'=98.1N$  en las ecuaciones (a) y (c) se obtiene

$$\sum F_x = 200 - 150 - 98.1 = 50a_{Gx}$$

y

$$\sum M_{Gz} = 0.50(98.1) - 0.50(150) = 8.0\alpha$$

La solución de estas ecuaciones es

$$a_{Gx} = -0.962\text{m/s}^2, \quad \mathbf{a}_{Gx} = -0.962\mathbf{i}\text{m/s}^2 \leftarrow^r$$

y

$$\alpha = 0. - 3.24\text{rad/s}^2, \quad \alpha = -3.24\mathbf{k}\text{rad/s}^2 \leftarrow^r$$

Ejemplo 6.7. La barra  $AB$  de  $40\text{kg}$  representada en la figura 6.20(a) mide  $5.0\text{m}$ . En los extremos de la barra existen rodillos cuya masa es despreciable y éstos se mueven en las ranuras lisas correspondientes. En la posición definida en la figura el momento del par  $C$  es  $150\text{N}\cdot\text{m}$  en sentido antihorario, y la velocidad del punto  $A$  es  $3.5\text{m/s}$  hacia abajo en la dirección de la ranura. Calcule.

- La aceleración angular de  $AB$ .
- Las reacciones sobre la barra en los puntos  $A$  y  $B$ .

Solución: En la figura 6.20(b) se define el diagrama de cuerpo libre de la barra. El cuerpo es simétrico con respecto al plano del movimiento y las fuerzas están

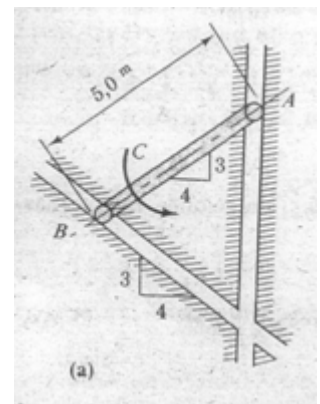


Figura 6.20(a)

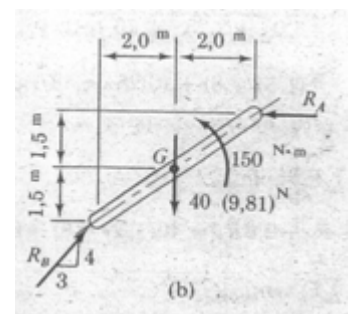


Figura 6.20(b)

contenidas en este plano; por tanto, las ecuaciones (6.10, 6.11, 6.12) son las únicas que suministran información útil. Las ecuaciones que describen el movimiento son:

$$\sum F_x = ma_{G_x} \quad \sum F_y = ma_{G_y} \quad \sum M_{G_z} = I_{G_z} \alpha$$

En el diagrama de cuerpo libre existen dos fuerzas desconocidas y las ecuaciones que describen el movimiento incluyen tres aceleraciones desconocidas, las dos componentes de la aceleración lineal del centro de masa y la aceleración angular de la barra.

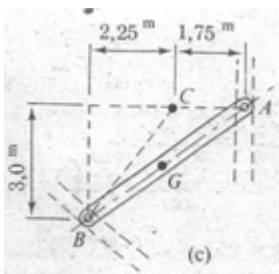


Figura 6.20(c)

La velocidad angular de la barra puede calcularse con ayuda del centro instantáneo localizado en la figura 6.20(c), y las aceleraciones pueden relacionarse mediante la ecuación de la aceleración relativa. La velocidad del punto A es  $3.5 \text{ m/s}$  hacia abajo, y de la figura 6.20(c) se concluye que también es igual a  $1.75\omega$ ; luego

$$1.75\omega = 3.5$$

de donde  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  y  $\dot{\omega} = 2 \text{ rad/s}^2$ . Se supone que la aceleración angular tiene sentido horario, y las aceleraciones de los puntos A y B se relacionan mediante la ecuación

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

Igualando las componentes horizontales se obtiene

$$\begin{aligned} \ominus \quad 0.8a_B &= 0 + 0.6(5a) - 0 - 8(5\omega^2), \\ a_B &= 3.75\alpha - 5(2)^2 = 3.75\alpha - 20, \end{aligned}$$

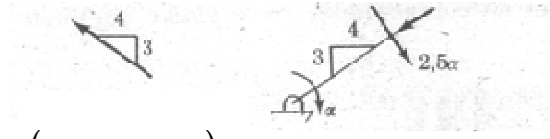
y

$$a_B = (3.75\alpha - 20). \quad \nwarrow \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$$

Las ecuación de la aceleración relativa entre los puntos G y B es

$$a_B = a_A + a_{G/B}$$

$$2.5\omega^2 = 10$$




$$= (3.75\alpha - 20) +$$

$$= \overleftarrow{3.0\alpha} + \overuparrow 2.25\alpha + \overleftarrow{16} + \overdownarrow 12 + \overrightarrow{1.5\alpha} + \overdownarrow 2\alpha + \overleftarrow{8} + \overdownarrow 6$$


$$= (\overleftarrow{1.5\alpha} - 8) + (\overuparrow 0.25\alpha - 18)$$

$$\sum F_x = ma_{Gx}$$



$$R_A - 0.6R_B = 40(1.5\alpha - 8) = 60\alpha - 320; \quad (a)$$


$$\sum F_y = ma_{Gy}$$



$$0.8R_B - 40(9.81) = 40(0.25\alpha - 18) = 10\alpha - 720 \quad (b)$$

La ecuación de los momentos puede expresarse en forma conveniente si se descompone  $R_B$  y se aplica el principio de los momentos; luego

$$\sum M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$



$$0.8R_B(2.0) - 0.6R_B(1.5) - R_A(1.5) - 150 = (1/12)(40)(5)^2\alpha$$

o

$$0.7R_B - 1.5R_A = 83.3\alpha + 150 \quad (c)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (a),(b),(c) se obtiene

$$R_A = -408N$$

$$R_B = -380N$$

$$\alpha = 2.34 \text{ rad/s}^2$$

Los signos negativos indican que las direcciones de  $R_A$  y  $R_B$  son contrarias. Los resultados son

$$R_A = \underline{408N} \rightarrow, \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$R_B = \underline{380N} \swarrow, \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\alpha = \underline{2.34 \text{ rad/s}^2} \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Ejemplo 6.8. Dos discos de  $50\text{kg}$  cada uno y cuyo diámetro mide  $600\text{mm}$  se conectan mediante una barra de  $1200\text{mm}$  y masa despreciable. La barra tiene soldadas dos láminas homogéneas rectangulares de  $300\text{mm}$  por  $600\text{mm}$ , en la forma indicada en la figura 6.21(a). La masa de cada lámina es  $25\text{kg}$ . El sistema gira sin deslizar sobre una pista recta contenida en un plano horizontal. En la posición definida en la figura, la velocidad angular es  $10\text{rad/s}$  en el sentido indicado, y la magnitud del par  $C$  es tal que el deslizamiento es inminente. El coeficiente de rozamiento entre los discos y el plano es  $0.25$ . Calcule la aceleración angular del sistema y el par  $C$ .

Solución: En la figura 6.21(b) se define el diagrama de cuerpo libre del sistema, obsérvese que el origen del sistema móvil de coordenadas  $xyz$  coinciden con el centro de masa  $G$ . Se supone que los momentos de las fuerzas de rozamiento con respecto al eje  $z$  se oponen al par  $C$ . La simetría del sistema implica que  $G$  se encuentra en el punto medio del eje geométrico de la barra; la masa del sistema es

$$m = 2(50) + 2(25) = 150\text{kg}$$

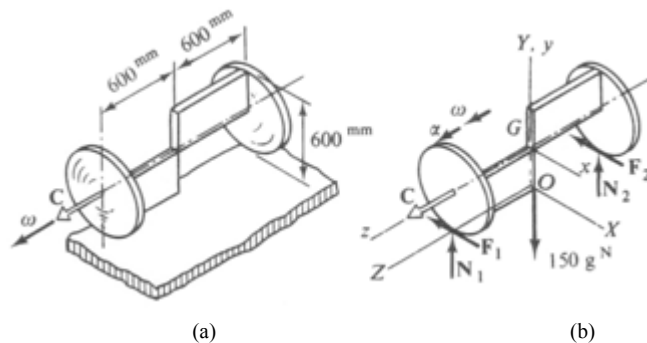


Figura 6.21

El cuerpo no es simétrico con respecto al plano del movimiento y además no todas las fuerzas están contenidas en él; en consecuencia, es necesario utilizar la ecuación de momentos generalizada (ecuación 6.12, 6.13), en este caso deben calcularse los valores de  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$ , y  $I_z$ .

El cuerpo es simétrico con respecto al plano  $yz$ ; por tanto,  $I_x$  es nulo. El plano  $xz$  es plano de simetría para los dos

discos luego,  $I_{yz}$  de los discos también es nulo. El producto de inercia de cada placa con respecto a los planos de simetría es nulo (refiérase al Apéndice 5), pero los términos de transferencia no son nulos, por tanto  $I_{yz}$  es

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \sum [(I_{yz})_G + my_G z_G] \\ &= 0 + 25(-15)(0.30) + 25(0.15)(-0.30) \\ &= -2.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

El valor de  $I_z$  también se calcula recurriendo al teorema de los ejes paralelos (refiérase a la tabla del Apéndice 5).

$$\begin{aligned} I_z &= \sum (I_z)_{discos} + \sum [(I_z)_G + md^2]_{placas} \\ &= 2[(0.5)(50)(0.30)^2] + 2\left[\left(\frac{I}{12}\right)(25)(0.30)^2 + 25(0.15)^2\right] \\ &= 6.00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

La ecuación de las fuerzas es

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}_G$$

que se expresa como

$$-F_1 \mathbf{i} - F_2 \mathbf{i} + N_1 \mathbf{j} + N_2 \mathbf{j} - 150(9.81) \mathbf{j} = 150 \mathbf{a}_G$$

Los momentos de las fuerzas calculados con respecto a  $G$  pueden obtenerse mediante multiplicaciones vectoriales, pero en este ejemplo se calculan fácilmente inspeccionando la figura 6.21b la ecuación de momento es

$$\sum \mathbf{M}_G = (\omega^2 I_{yz} - \alpha I_{xz}) \mathbf{i} - (\omega^2 I_{xz} + \alpha I_{yz}) \mathbf{j} + \alpha I_z \mathbf{k}$$

que se convierte en

$$\begin{aligned} &(0.60N_2 - 0.60N_1) \mathbf{i} + (0.60F_2 - 0.60F_1) \mathbf{j} + (C - 0.30F_1 - 0.30F_2) \mathbf{k} \\ &= (10)^2(-2.25) \mathbf{i} - \alpha(-2.25) \mathbf{j} + \alpha(6.00) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones generalizadas que describen el movimiento equivalen a cinco ecuaciones algebraicas (porque no existen fuerzas ni componentes de la aceleración en la dirección  $z$ ) Existen cuatro fuerzas y un

## Principios de Mecánica para Ingeniería

par desconocidos además de la aceleración lineal de  $G$  y la aceleración angular del cuerpo. El problema define que las ruedas giran sin deslizar; por tanto,

$$\mathbf{a}_G = r\alpha(-\mathbf{i}) = -0.30\alpha\mathbf{i}$$

Las ecuaciones escalares que describen el movimiento son

$$-F_1 - F_2 = 150a_G = -45\alpha, \quad (\text{a})$$

$$N_1 + N_2 - 1471.5 = 0, \quad (\text{b})$$

$$0.60N_2 - 0.60N_1 = -225, \quad (\text{c})$$

$$0.60F_2 - 0.60F_1 = 2.25\alpha, \quad (\text{d})$$

y

$$C - 0.30F_1 - 0.30F_2 = 6.00\alpha \quad (\text{e})$$

Estas cinco ecuaciones contienen seis incógnitas, las leyes del rozamiento proporcionan una ecuación adicional. Al incrementar  $C$ ,  $F_1$  y  $F_2$  también aumentan hasta que una de ellas adquiere el valor límite. En este caso existen dos posibilidades, por tanto, debe formularse una hipótesis y verificar su validez. Suponiendo que  $F_1$  es igual a  $\mu N_1$ , la solución de las ecuaciones es

$$N_1 = 923N,$$

$$N_2 = 548N,$$

$$F_1 = \mu N_1 = 0.25(923) = 231N,$$

y

$$F_2 = 273N -$$

El resultado anterior indica que  $F_2$  es mayor que  $\mu N_2$ ; es decir, que  $0.25(548)$  o  $137N$ , luego el deslizamiento ocurre en primer término en el disco del lado derecho, ahora es necesario resolver el problema suponiendo que  $F_2$  es igual a  $\mu N_2$ . En este caso la solución es:

$$N_1 = 923N, \quad N_2 = 548N,$$

$$F_2 = \mu N_2 = 137N,$$

$$F_1 = 116 N,$$

$$\alpha = 5.62 \text{ rad/s}^2,$$

y

$$C = 109.7 N \cdot m$$

Esta solución satisface la condición  $F_1$  menor que  $\mu N_1$ ; por tanto, el deslizamiento de la rueda derecha es inminente. Los resultados son:

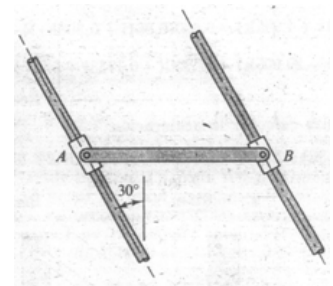
$$\alpha = \underline{5.62 \text{ k rad/s}^2}, \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

y

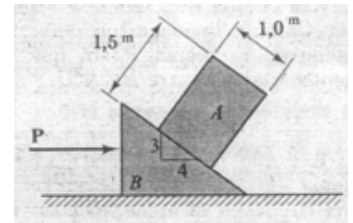
$$C = \underline{109.7 \text{ kN} \cdot m}. \quad \begin{matrix} r \\ \leftarrow \end{matrix}$$

**Ejercicios de Trabajo**

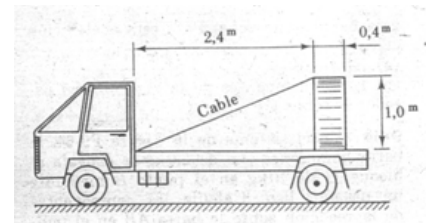
- 6.1. La barra uniforme  $AB$  de  $5 \text{ kg}$  representada en la figura 6.22 esta conectada a dos collares de masa despreciable. Los collares deslizan libremente sobre ejes paralelos contenidos en un plano vertical. Calcule
- La aceleración de la barra
  - Las reacciones en  $A$  y  $B$
- 6.2. Calcule las aceleraciones mínimas que deben adquirir los bloques del sistema de la figura 6.23, considerando que el cuerpo  $A$  no se mueve con respecto a  $B$ . El coeficiente de rozamiento entre  $A$  y  $B$  es  $0.20$ , y el plano horizontal es liso.
- 6.3. La masa de la carga del camión de la figura 6.24 es  $m \text{ kg}$  y un cable evita su volcamiento. El coeficiente de rozamiento entre la carga y el camión es  $0.30$ . Calcule la aceleración máxima que se puede imprimir al camión hacia la izquierda considerando que la carga permanece vertical. ¿Es razonable la aceleración obtenida?
- 6.4. La barra esbelta y homogénea de  $3.0 \text{ kg}$  representada en la figura 6.25 mide  $2.0 \text{ m}$ . En la posición definida en la figura, la barra gira



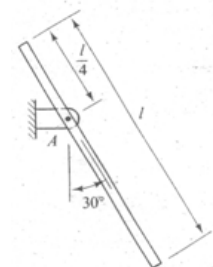
**Figura 6.22**



**Figura 6.23**



**Figura 6.24**



**Figura 6.25**



alrededor del punto  $A$  en sentido antihorario y su velocidad angular es  $5\text{ rad/s}$ . Calcule

- La aceleración angular de la barra.
- Las componentes normal y tangencial de la reacción en el punto  $A$ .

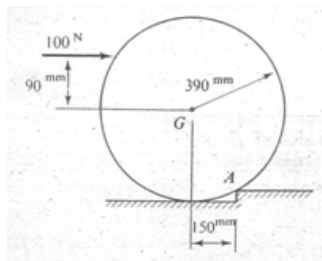


Figura 6.26

- 6.5. El tambor homogéneo de  $25\text{ kg}$  representado en la figura 6.26 reposa contra el escalón pequeño  $A$ . Para superar el obstáculo se aplica la fuerza de  $100\text{ N}$  representada en la figura. Calcule

- La aceleración angular inicial del tambor.
- Las componentes normal y tangencial de la reacción que se desarrolla en  $A$  en el instante considerado.

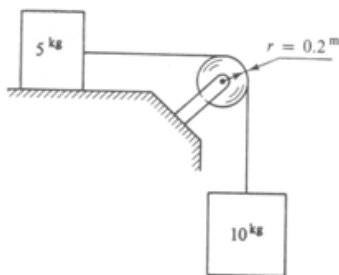


Figura 6.27

- 6.6. El cuerpo de  $5\text{ kg}$  de la figura 6.27 se mueve sobre la superficie horizontal lisa. El momento de inercia de la polea con respecto a su eje de rotación es  $0.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , y no hay deslizamiento entre la polea y el cable. Calcule la aceleración angular de la polea y las fuerzas que el cable ejerce sobre los bloques.

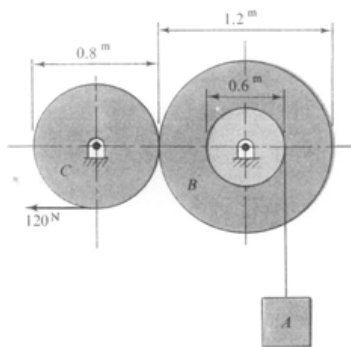


Figura 6.28

- 6.7. La jaula  $A$  de  $20\text{ kg}$  representada en la figura 6.28 baja y sube mediante un cable que se enrolla en un tambor montada en la rueda dentada  $B$ . La masa del tambor y la rueda dentada  $B$  es de  $30\text{ kg}$ , el radio de giro de la masa con respecto a su eje de rotación es  $0.40\text{ m}$ . El radio de giro del engranaje  $C$  de  $15\text{ kg}$  es  $0.20\text{ m}$  calculado con respecto a su eje de rotación. Calcule la aceleración de  $A$  cuando se aplica el engranaje  $C$  la fuerza de  $120\text{ N}$  indicada en la figura.

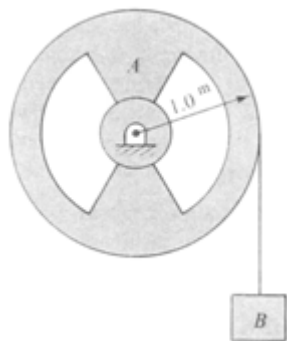


Figura 6.29

- 6.8. Las masas de los cuerpos  $A$  y  $B$  de la figura 6.29 son  $300\text{ kg}$  y  $30\text{ kg}$ , respectivamente; el cuerpo  $A$  simétrico. Al comienzo de un intervalo de tiempo la velocidad de  $B$  es  $5\text{ m/s}$  hacia arriba. Durante el intervalo de tiempo el cuerpo  $B$  recorre  $30\text{ m}$  y su desplazamiento es  $12\text{ m}$  hacia abajo. Calcule con respecto al eje de rotación el radio de giro de la masa del cuerpo  $A$ .

- 6.9. A la barra  $AB$  esbelta, homogénea, de masa  $m$  y longitud  $(\sqrt{2})l$  de la figura 6.30 la sustentan tres cuerdas en la forma ilustrada. Calcule las tensiones que desarrollan las cuerdas  $OA$  y  $OB$  inmediatamente después de cortar la cuerda  $CB$ .

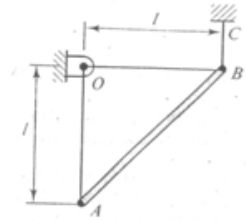


Figura 6.30

- 6.10. El sistema representado en la figura 6.31 está compuesto por tres barras esbeltas y homogéneas articuladas en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de tal forma que constituyen un triángulo equilátero. Cada barra mide  $500\text{mm}$  y su masa es  $4\text{kg}$ . Calcule la reacción que se desarrolla en el apoyo  $A$  en el momento de liberar el sistema desde el reposo, considere que el miembro  $AC$  coincide con la dirección vertical.

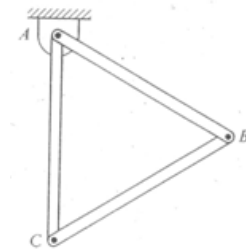


Figura 6.31

- 6.11. La rueda de  $8\text{kg}$  representada en la figura 6.32 es un cilindro homogéneo con una ranura delgada en la cual se arrolla la cuerda. Puede despreciarse el efecto de la ranura sobre el cálculo del momento de inercia de la rueda. Suponiendo que la rueda gira sin deslizarse sobre el plano horizontal, calcule.

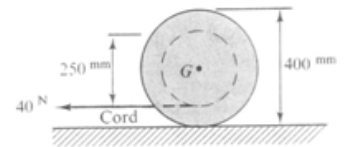


Figura 6.32

- La aceleración de  $G$ .
- El coeficiente de rozamiento mínimo requerido entre la rueda y el plano para evitar el deslizamiento.

- 6.12. En la figura 6.33 se representa un cilindro sólido y homogéneo de  $5\text{kg}$ . Calcule.

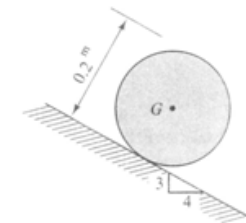


Figura 6.33

- El coeficiente mínimo de rozamiento entre el cilindro y el plano necesario para que el cilindro ruede sin deslizarse durante su descenso por el plano inclinado, suponga que el cuerpo parte del reposo.
- La aceleración del centro del cilindro cuando éste ruede sin deslizarse.

- 6.13. La esfera homogénea de  $15\text{kg}$  representada en la figura 6.34 cuenta con una ranura delgada para alojar la cuerda. Desprecie el efecto de la ranura sobre el cálculo del momento de inercia de la esfera, y suponga que las dos cuerdas están

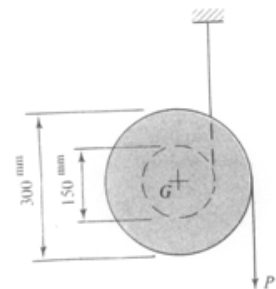


Figura 6.34

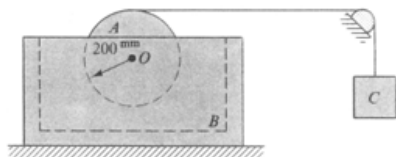


Figura 6.35

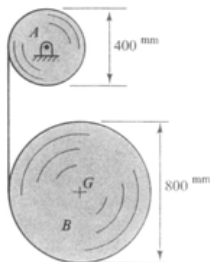


Figura 6.36

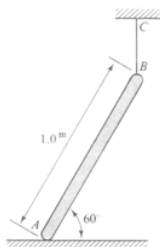


Figura 6.37

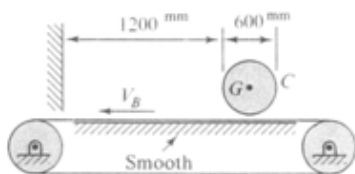


Figura 6.38

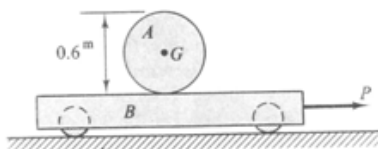


Figura 6.39

contenidas en el plano vertical de simetría. Calcule el valor de la fuerza  $P$  cuando la aceleración angular es  $12 \text{ rad/s}^2$  en sentido antihorario.

- 6.14. El cilindro homogéneo  $A$  del sistema de la figura 6.35 se apoya en cojinetes lisos existentes en el interior de la carcasa  $B$ , y un cable lo conecta al cuerpo  $C$ . Las masas de los cuerpos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son  $25$ ,  $10$  y  $35 \text{ kg}$  respectivamente. Todas las superficies son lisas. Calcule la aceleración de los cuerpos  $B$  y  $C$ .
- 6.15. El disco homogéneo  $A$  de  $6 \text{ kg}$  del sistema de la figura 6.36 se conecta mediante una cuerda al cilindro homogéneo  $B$  de  $15 \text{ kg}$ . Calcule la aceleración angular del cuerpo  $B$ .
- 6.16. La barra homogénea  $AB$  de la figura 6.37 se mantiene en equilibrio apoyada sobre el plano horizontal liso y sostenida por la cuerda  $BC$ . Calcule la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de la barra que se desarrollan al cortar la cuerda.
- 6.17. El cilindro homogéneo  $C$  de la figura 6.38 se encuentra en reposo al colocarlo sobre la banda sin fin que se mueve hacia la izquierda con velocidad constante igual a  $12 \text{ m/s}$ . El coeficiente de rozamiento entre la correa y el cilindro es  $0.5$ . Calcule la velocidad angular del cilindro cuando choca con la pared.
- 6.18. El cilindro homogéneo de  $45 \text{ kg}$  representado en la figura 6.39 se encuentra en reposo sobre el carro o plataforma móvil  $B$ . al aplicar a la plataforma la fuerza  $P$ , se imprime a ésta una aceleración de  $5 \text{ m/s}^2$  dirigida hacia la derecha. Suponga que el cilindro no desliza sobre la plataforma. Calcule
- La aceleración del centro de masa del cilindro.
  - La fuerza de rozamiento que actúa sobre el cilindro.

- 6.19. La barra ranurada  $AB$  posee en la posición definida en la figura 6.40 una velocidad de  $1.2\text{m/s}$  dirigida hacia la izquierda, en este instante la cuerda se revienta. El radio de giro de la barra con respecto a su centro de masa es  $300\text{mm}$ . El coeficiente de rozamiento entre la barra y el pasador  $O$  es  $0.50$ . Calcule la aceleración que adquiere el centro de masa de la barra inmediatamente después de la liberación del sistema.

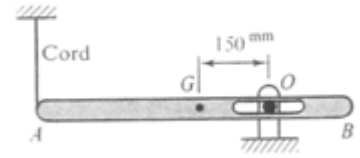


Figura 6.40

- 6.20. La velocidad del punto  $B$  de la barra homogénea de  $40\text{kg}$  representada en la figura 6.41 es  $3\text{m/s}$  dirigida hacia abajo. El extremo  $B$  de la barra es liso, y el coeficiente de rozamiento entre el extremo  $A$  y el plano horizontal es  $0.5$ . Calcule la aceleración angular de la barra.

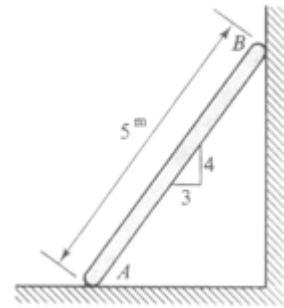


Figura 6.41



# Apéndice 1

## ALGEBRA VECTORIAL

Un vector en el contexto de mecánica se define como una cantidad que posee magnitud y dirección, por lo tanto puede representarse como un segmento de recta. Un vector  $V$  puede ser indicado como  $Ve$  donde  $V$  es la magnitud escalar y  $e$  es un vector unitario en la dirección de  $V$ . En este libro se hace una distinción entre el siempre módulo positivo  $|V|$  y la magnitud escalar  $V$  la cual puede ser positiva o negativa.

### A.1.1 Adición de Vectores

Por definición dos vectores se suman por la ley del paralelogramo como se muestra en la figura A1.1.

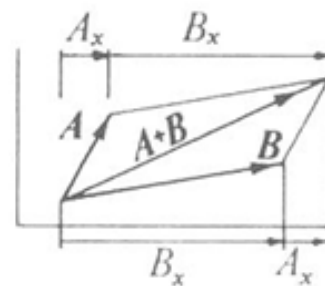


Figura A1.1

Si  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son vectores unitarios en las direcciones respectivas  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -, entonces

$$V = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \quad (\text{A1.1})$$

donde  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$  son las componentes escalares de  $V$ .

Por el teorema de Pitágoras,

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (\text{A1.2})$$

de la figura A1.1 se observa que

$$\begin{aligned} A + B &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \\ &= B + A \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

ya que  $V = Ve$ ,

$$\begin{aligned} e &= \frac{V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \\ &= l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

donde  $l$ ,  $m$  y  $n$  son los cósenos de dirección del vector unitario  $e$  relativos a los ejes  $x$ -,  $y$ - y  $z$ - respectivamente.

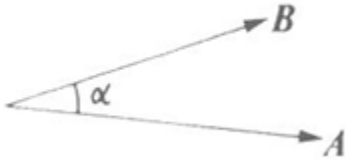


Figura A1.2

### A.1.2. Multiplicación de Vectores

#### Producto escalar

El producto escalar de dos vectores (figura A1.2) se define como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A1.5})$$

Por lo tanto  $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

y  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

en consecuencia  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$  (A1.6)

Si un vector es un vector unitario  $e$ , luego

$$\mathbf{A} \cdot e = |\mathbf{A}| \cos \alpha \quad (\text{A1.7})$$

que es la componente de  $\mathbf{A}$  en la dirección de  $e$ .

El trabajo hecho por una fuerza  $\mathbf{F}$  a lo largo de un desplazamiento  $ds$  es

$$dW = \mathbf{F} \cdot ds \quad (\text{A1.8})$$

y la potencia es

$$\mathbf{F} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A1.9})$$

*Producto vectorial.* El producto vectorial de dos vectores (figura A1.3) se define como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \text{sen } \alpha \mathbf{e} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{A1.10})$$

En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (\text{A1.11})$$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x) \quad (\text{A1.12})$$

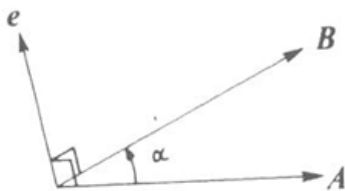


Figura A1.3

Si un cuerpo tiene una velocidad angular  $\omega$  entonces la velocidad de un punto  $A$  relativa a un punto  $O$  es

$$\mathbf{V}_{A/O} = \omega \times \mathbf{r}_{A/O} \quad (\text{A1.13})$$

El momento de una fuerza  $F$  respecto a un punto  $O$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{A1.14})$$

*El triple producto escalar.* El triple producto escalar de los vectores, llamado también producto caja se representa como  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  y es el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores como se muestran en la figura A1.4. La posición del punto y la cruz pueden intercambiarse con tal que el mismo orden cíclico se conserve. Si el orden cíclico es invertido entonces el sentido del resultado cambia. Se entiende fácilmente que si cualquiera de dos vectores son paralelos, entonces el triple producto escalar es cero.

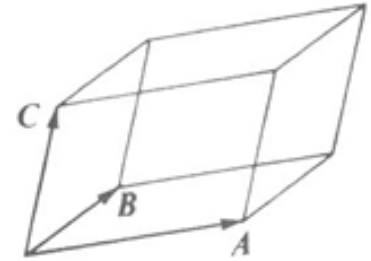


Figura A1.4

La componente del momento de una fuerza en la dirección da  $\mathbf{e}$ , es

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (\text{A1.15})$$

Si  $\mathbf{e}$  es paralelo a  $\mathbf{r}$  o  $\mathbf{F}$  entonces el producto es cero.

*Triple producto vectorial.* El triple producto vectorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  puede ser mostrado a ser igual a

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A1.16})$$

El momento del momentum (*momento de la cantidad de movimiento lineal*) de una partícula debida a la rotación de un cuerpo rígido es

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (m \omega \times \mathbf{r}) \\ &= \omega (m \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (m \mathbf{r} \cdot \omega) \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

Si  $\mathbf{r}$  es normal a  $\omega$  por lo que el momento del momentum de la partícula

$$\mathbf{H} = \omega m r^2 \quad (\text{A1.18})$$



### A.1.3. Derivación de Vectores con Respecto al Tiempo

Ver figura A1.5 por definición

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{A1.19})$$

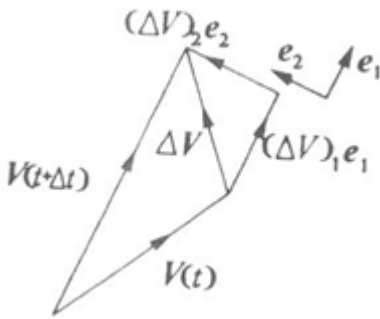


Figura A1.5

y es por consiguiente un vector en la dirección de  $\Delta \mathbf{V}$ .

El vector  $\Delta \mathbf{V}$  puede ser escrito como el vector suma de dos componentes ortogonales:

$$\Delta \mathbf{V} = (\Delta V)_1 \mathbf{e}_1 + (\Delta V)_2 \mathbf{e}_2$$

tal que

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\Delta V)_1}{\Delta t} \mathbf{e}_1 + \frac{(\Delta V)_2}{\Delta t} \mathbf{e}_2 \right]$$

Obsérvese que la magnitud de  $\mathbf{V}(t + \Delta t)$  es  $(V + \Delta V)$ , no obstante  $\Delta \mathbf{V} \neq |\Delta \mathbf{V}|$ .

*Derivadas de un producto de dos vectores*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \mathbf{O} \mathbf{B}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \mathbf{O} (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) - \mathbf{A} \mathbf{O} \mathbf{B}}{\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{A} \mathbf{O} \Delta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \mathbf{O} \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \mathbf{O} \Delta \mathbf{B}}{\Delta t} \right] \\ &= \mathbf{A} \mathbf{O} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{O} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{A1-20})$$

El símbolo O significa que puede ser ya sea un producto escalar (producto punto ( $\cdot$ )) o un producto vectorial (producto cruz); en el caso de producto vectorial es importante que el orden se conserve como se indica en la ecuación (A1.20).

En el estudio de curvas de un plano si la función de la curva es  $y = f(x)$ , la relación de la curvatura  $C$  y el radio de curvatura  $\rho$  se determinan por la expresión:

$$C = \frac{1}{\rho} = \frac{-\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{A1-21})$$

# Apéndice 2

## UNIDADES

Una cantidad física se expresa como el producto de un mero número y una unidad. Las leyes físicas que existen entre las cantidades físicas son convenientemente expresadas en sistemas de unidades, consistentes tales, que la forma de la ecuación de toda ley física sea independiente del sistema de unidades elegido.

Cuatro sistemas son aquí enlistados, es decir el Sistema Internacional de Unidades (Systeme International d'Unites *SI*); el sistema centímetro, gramo, segundo (*c.g.s*); el Sistema Británico Absoluto basado en el pie, libra y segundo (*f.p.s*) [foot, pound, second]; y el Sistema Británico Gravitacional o Técnico basado en el pie, slug y segundo (*f.s.s*) [foot, slug, second].

En todos estos sistemas  $F = ma$  y el peso  $W = mg$ , donde  $g$  es la intensidad de campo gravitacional. Un valor normalizado de la intensidad de campo en la superficie de la tierra es dado como  $9.80665 \text{ N/kg}$ ,  $(\text{m/s}^2)$ , o aproximadamente  $32.174 \text{ pdl/lb}$  o  $(\text{lbf/slug})$  o  $(\text{ft/s}^2)$ .

$$1 \text{ slug} = 32.174 \text{ lb}$$

$$1 \text{ lbf} = 32.174 \text{ pdl}$$

También  $1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N} \approx 9.81 \text{ N}$

### Conceptos actuales de cada una de las unidades fundamentales, del sistema SI.:

metro: Longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo igual a la fracción  $1/299\,792\,458$  de 1s.  
(*m*)

kilogramo: Masa del Kilogramo Prototipo Internacional conservado en la sede del BIPM.  
(*kg*)

## Principios de Mecánica para Ingeniería

- segundo: Duración de 9 192 631 770 ciclos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.  
(*s*)
- kelvin: Fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica (o absoluta) del punto triple del agua (273.16K).  
(*K*)
- ampere: Intensidad de la corriente eléctrica constante, que mantenida en dos conductores rectilíneos paralelos, de longitud infinita y sección transversal despreciable, y situados a la distancia de 1m en el vacío, produce una fuerza de  $2 \times 10^{-7}$  N/m entre los conductores.  
(*A*)
- candela: Intensidad luminosa en una dirección dada, correspondiente a una energía de 1/683 W/sr, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia igual a  $540 \times 10^{12}$  Hz.  
(*cd*)
- mol: Cantidad de entidades elementales (átomos, moléculas, iones, etc.) en un sistema material, igual al número de átomos existente en 0.012 kg de carbono 12. (El número es  $6.0220 \times 10^{23}$ , la constante de Avogadro)  
(*mol*)

### Unidades Suplementarias

Como unidades que complementan a las fundamentales, se tienen las dos siguientes:

Cantidad Suplementaria	Nombre de la Unidad	Símbolo de la unidad
Ángulo plano ( $\theta$ )	radián	<i>rad</i>
Ángulo sólido ( $\Omega$ )	Estereorradián	<i>sr</i>

- radián: Ángulo comprendido entre dos radios de una circunferencia y que determina en esta curva un arco de longitud igual a la de su radio.  
(*rad*)
- estereorradián: Ángulo sólido con un vértice en el centro de una esfera, y que intercepta en ésta una superficie cuya área es igual a la de un cuadrado con lado igual al radio de la esfera.  
(*sr*)

Tabla A2.1

CANTIDAD	UNIDAD Y SÍMBOLO			
	SI	c.g.s.	f.p.s.	f.s.s.
Masa	kilogramo, kg	gramo, g	libra, lb	slug
Longitud	metro, m	centímetro, cm	pie, ft	pie, ft
Tiempo	segundo, s	segundo, s	segundo, s	segundo, s
Angulo	radian, rad	radian, rad	radian, rad	radian, rad
Fuerza	newton (kg m s <sup>-2</sup> ), N	dina	poundal, pdl	libra fuerza, lbf
Energía Trabajo	joule (m N), J	erg	pie poundal, ft pdl	pie libra fuerza, ft lbf
Potencia	watt (Js <sup>-1</sup> ), W	erg s <sup>-1</sup>	ft pdl s-1	ft lbf s <sup>-1</sup>
Presión	pascal (N m <sup>-2</sup> ), Pa			
Momento de fuerza	Nm	dina cm	pdl ft	lbf ft
Momento de inercia	kg m <sup>2</sup>	g cm <sup>2</sup>	lb ft <sup>2</sup>	slug ft <sup>2</sup>
Velocidad	m s <sup>-1</sup>	cm s <sup>-1</sup>	ft s-1	ft s <sup>-1</sup>
Aceleración	m s <sup>-2</sup>	cm s <sup>-2</sup>	ft s-2	ft s <sup>-2</sup>

[1 micron=10<sup>-6</sup>m, 1 litro=10<sup>-3</sup>m<sup>3</sup>, 1 tonelada = 10<sup>3</sup>kg, 1 bar=10<sup>5</sup> Pa]

Obsérvese que estas son relaciones exactas y no varían con la localización como lo hace *g*.

La conversión de unidades británicas al *SI* se logra utilizando los siguientes factores exactos de conversión:

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ lb} = 0.453\,592\,37 \text{ kg}$$

Empleando estos valores

$$\begin{aligned} 1 \text{ pdl} &= 1 \text{ lb} \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} = 1 \text{ kg} \left( \frac{\text{lb}}{\text{kg}} \right) \left( \frac{\text{ft}}{\text{m}} \right) \frac{1}{\text{s}^2} \\ &= 1 \text{ kg} \, 0.4536 \text{ m} \, 0.3048 \text{ s}^{-2} \\ &= 0.1383 \text{ kg} \, \text{m s}^{-2} = 0.1383 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ lbf} &= 1 \left( \frac{\text{lbf}}{\text{pdl}} \right) \text{ pdl} = 1 \left( \frac{\text{lbf}}{\text{pdl}} \right) \left( \frac{\text{pdl}}{\text{N}} \right) \text{ N} \\ &= 1 \times 32.174 \times 0.1383 \text{ N} \\ &= 4.448 \text{ N} \end{aligned}$$

Del mismo modo para el trabajo y energía

$$1 \text{ ft pdl} = 0.042 \text{ J}$$

$$1 \text{ ft lbf} = 1.356 \text{ J}$$

Por lo tanto  $1 \text{ h.p.} = 550 \text{ ft lbf s}^{-1} = 745.700 \text{ W}$

Otro factor de conversión útil es:

Densidad  $1 \text{ lb ft}^{-3} = 16.0185 \text{ kg m}^{-3}$

## Principios de Mecánica para Ingeniería

$$\begin{aligned} \text{Presión} \quad 1 \text{ lbf pulg.}^{-2} &= 6894.76 \text{ N m}^{-2} \text{ (Pa)} \\ 1 \text{ atmósfera (atm)} &= 1.01325 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} \end{aligned}$$

Nótese que para los planteamientos anteriores, la representación para la unidad es tratada como si esta fuera una cantidad algebraica normal

**Tabla A2.2**

<i>FACTOR</i>	<i>PREFIJO</i>	<i>SÍMBOLO</i>	
$10^{12}$	tera	T	] <i>Estos no son múltiplos de base en el sistema SI</i>
$10^9$	giga	G	
$10^6$	mega	M	
$10^3$	kilo	K	
$10^2$	hecto	H	
$10^1$	deca	Da	
$10^{-1}$	deci	D	
$10^{-2}$	centi	C	
$10^{-3}$	mili	M	
$10^{-6}$	micro	M	
$10^{-9}$	nano	N	
$10^{-12}$	pico	P	
$10^{-15}$	femto	F	
$10^{-18}$	atto	A	

El uso de los prefijos se ilustra como sigue:

$$0.000\,001\text{m} = 1\ \mu\text{m}(\text{micron})$$

$$1\,000\,000\text{N} = 1\ \text{MN}(\text{meganewton})$$

$$0.1\text{m} = 100\text{mm}$$

$$10^4\ \text{N} = 10\text{kN}$$

$$10^3\ \text{kg} = 1\text{Mg}(\text{no } 1\ \text{kkg})$$

Otros sistemas de unidades se encuentran todavía, en los que la utilización de una unidad de masa se elude escribiendo  $m=(W/g)$  de tal forma que  $F=(W/g)a$ . En forma alterna la aceleración puede expresarse como múltiplos de  $g$  como  $F=W(a/g)$ .

El uso de unidades variantes de fuerza tal como la libra peso ( $lb_w$ ) y el gramo peso ( $gr_w$ ) que esta desapareciendo y que no se debe fomentar. Para propósitos prácticos una fuerza igual al peso de la masa unitaria a menudo encuentra ventajas en aplicaciones elementales, tal como el kilogramo fuerza ( $kgf$ ), o su equivalente aproximado  $1\text{daN}(10^2\text{N})$ , continúa usándose en aplicaciones prácticas (no técnicas)

# Apéndice 3

## INTEGRACIÓN APROXIMADA

### La Regla Trapezoidal

El área bajo la curva sombreada mostrada en la figura A3.1 se divide en franjas iguales de ancho  $w$  y las ordenadas o altura son marcadas de  $a_1$  a  $a_n$ . El contorno superior curvo es por lo tanto aproximado a líneas rectas entre las ordenadas.

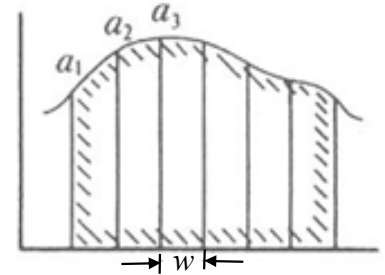


Figura A3.1

El área es:

$$\frac{1}{2}w\{(primera + la \text{ última ordenada}) + 2(ordenadas restantes)\} \quad (A3.1)$$

es decir  $A = \frac{1}{2}w\{(a_1 + a_n) + 2(a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_{n-2})\} \quad (A3.1)'$

### Regla de Simpson

El área bajo la curva es dividida en un número par de franjas del mismo ancho  $w$ , pero en este caso, la superficie comprendida entre la cuerda y tres valores consecutivos de la ordenada  $a$  puede tomarse en cuenta aproximando la curva a una parábola entre estos tres valores consecutivos de  $a$ . En términos de las ordenadas  $a$ , el área es:

$$\frac{1}{3}w[primera + última + 4(ordenadas pares) + 2(ordenadas restantes non)] \quad (A3.2)$$

es decir

$$A = \frac{1}{3}w[a_1 + a_n + 4(a_2 + a_4 + \dots + a_{n-1}) + 2(a_3 + a_5 + \dots + a_{n-2})] \quad (A3.2)'$$

# Apéndice 4

## FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

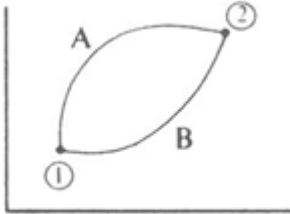


Figura A4.1

### Notas Sobre Fuerzas Conservativas

Si el trabajo hecho por una fuerza para mover una partícula de la posición 1 a la posición 2 es independiente de la trayectoria seguida (ver figura A4.1) luego la fuerza se dice ser conservativa.

$$\int_A^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Así 
$$\int_A^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

(o la integral alrededor de una trayectoria cerrada es cero:)

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{A4.1})$$

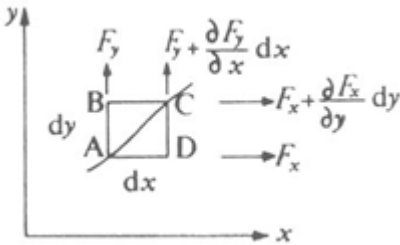


Figura A4.2

Para un elemento diferencial de la trayectoria (figura A4.2), el trabajo hecho a lo largo de la trayectoria *ABC* debe ser igual al de la trayectoria *ADC*, así

$$F_y dy + \left( F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy \right) dx = F_x dx + \left( F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx \right) dy$$

Por tanto 
$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (\text{A4.2})$$

En coordenadas polares (figura A4.3)

$$F_r dr + \left( F_\theta + \frac{\partial F_\theta}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta = F_\theta r d\theta + \left( F_r + \frac{\partial F_r}{\partial \theta} d\theta \right) dr$$

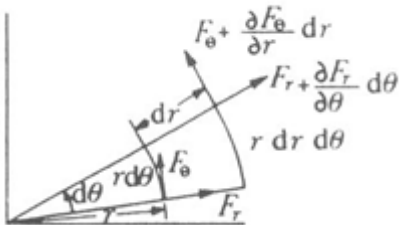


Figura A4.3

Por lo que 
$$F_\theta + \left( \frac{\partial F_\theta}{\partial r} \right) r = \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \quad (\text{A4.3})$$

**Energía Potencial**

La energía potencial se define como:

$$\begin{aligned} V &= -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \text{constante} \\ &= -\int F_x dx - \int F_y dy + \text{constante} \\ dV &= -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F_x dx - F_y dy \end{aligned}$$

Además, de la teoría del cálculo diferencial

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$$

de aquí que

$$y \left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.4})$$

En coordenadas polares

$$dV = -F_r dr - F_\theta r d\theta$$

pero

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta$$

por lo que

$$y \left. \begin{aligned} F_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ F_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4.5})$$

Para un campo gravitacional uniforme  $-gj$

$$V = mgy + \text{constante} \quad (\text{A4.6})$$

Para un campo de ley del cuadrado inverso,  $-(\mu/r^2)e_r$  donde  $\mu = \text{constante}$

$$V = -\frac{\mu}{r} + \text{constante} \quad (\text{A4.7})$$

Para un resorte helicoidal rectilíneo o con rigidez  $k$ .

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{A4.8})$$

donde  $x$  es la deformación (alargamiento) del resorte.



# Apéndice 5

## CENTROS DE MASA Y MOMENTOS DE INERCIA

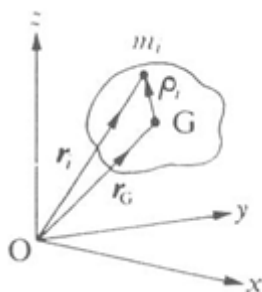


Figura A5.1

### Centros de Masa

La posición del centro de masa  $G$  (figura A5.1) se define por:

$$r_G = \frac{\sum m_i r_i}{M} \quad (\text{A5.1})$$

o por las tres ecuaciones escalares

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad (\text{A5.2a})$$

$$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad (\text{A5.2b})$$

$$z_G = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (\text{A5.2c})$$

También  $\sum m_i \rho_i = 0$  o en forma escalar  $\sum m_i \rho_{xi} = 0$  etc.

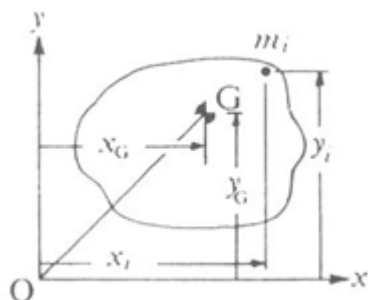


Figura A5.2

### Momento de Inercia

En la figura A5.2, el momento de inercia respecto al eje  $z$  es:

$$I_{Oz} = Mk_{Oz}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (\text{A5.3})$$

$$I_{Oxy} = \sum m_i x_i y_i \quad (\text{A5.4})$$

*Teorema de los ejes paralelos*

$$I_{Oz} = I_{Gz} + M(x_G^2 + y_G^2) \quad (\text{A5.5})$$

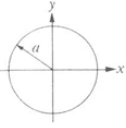
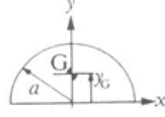
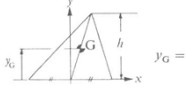
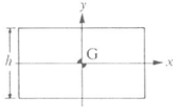
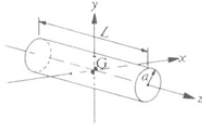
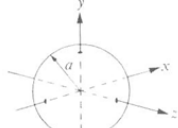
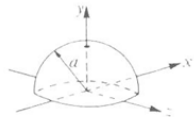
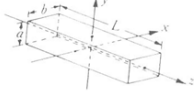
$$I_{Oxy} = I_{Gxy} + Mx_G y_G \quad (\text{A5.6})$$

*Teorema de los ejes perpendiculares*

Para una placa delgada en el plano  $xy$







$$I_{Oz} = I_{Ox} + I_{Oy} \quad (A5.7)$$

**Centros de Masa y Momentos de Inercia**















































OBJETO	CENTRO DE MASA	MOMENTO DE INERCIA
Placa circular		$I_{Oz} = M \frac{a^2}{2}$ $I_{Ox} = M \frac{a^2}{4}$
Placa semicircular	 $y_G = \frac{4a}{3\pi}$	$I_{Oz} = M \frac{a^2}{2}$ $I_{Ox} = M \frac{a^2}{4}$
Placa triangular	 $y_G = \frac{1}{3}h$	$I_{Ox} = M \frac{h^2}{2}$
Placa rectangular		$I_{Gx} = M \frac{h^2}{12}$
Cilindro sólido		$I_{Gz} = M \frac{a^2}{2}$ $I_{Gx} = \frac{M}{12}(3a^2 + L^2)$
Esfera sólida		$I_{Gz} = \frac{2}{5}Ma^2$
Semiesfera sólida	 $y_G = \frac{3}{8}a$	$y_G = \frac{3}{8}a \quad I_{Oz} = I_{Ox} = \frac{2}{5}Ma^2$
Barra rectangular		$I_{Gz} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$ $I_{Gx} = \frac{M}{12}(a^2 + L^2)$



## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE TRABAJO

- 1.1.  $0.800\mathbf{i}+0.53\mathbf{j}+0.27\mathbf{k}$       2.7.  $235m$   
 1.2.  $(4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k})m$       2.8.  $(8.66\mathbf{i}+5.0\mathbf{j})m/s,$   
 $(-10\mathbf{i}+17.32\mathbf{j})m/s^2$   
 1.3.  $(7, 2, 6)m$   
 1.4.  $(0.87\mathbf{i}+0.35\mathbf{j}+0.35\mathbf{k})m$       2.9.  $(-0.384\mathbf{i}+2.66\mathbf{j})m/s$   
 $(-15.83\mathbf{i}+2.41\mathbf{j})m/s^2$   
 1.5.  $(-3\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k})m,$   
 $(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k})m$       2.10. a)  $\frac{v^2}{\sqrt{5}b}(-2\mathbf{e}_r-\mathbf{e}_\theta)$   
 b)  $a_n = \frac{v^2}{b}$   
 1.6.  $(3\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})m,$   
 $(0-90\mathbf{i}-0.30\mathbf{j}-0.30\mathbf{k})m$       2.11. a)  $3.68 m/s^2$   
 b)  $1.400 m/s^2$   
 1.7.  $(0, 2, 8)m$       2.12.  $7.368$  Nudos,  $16^\circ 19' N.O$   
 1.8.  $(3, 2.8, 2.8)m$       2.13.  $(6.62\mathbf{i}+4.66\mathbf{j})m/s,$   
 $(-11.83\mathbf{i}+8.41\mathbf{j})m/s^2,$   
 $8.09m/s, 14.51m/s^2$   
 1.9.      2.14.  $7.08m/s$  o  $5.12m/s$   
 1.10.  $(16.25, 10.84, 4.33)km,$       2.15.  $v_D=1.2m/s \rightarrow, a_D=4.4m/s^2 \rightarrow$   
 $(19.53km, 33.7^\circ, 4.33km)$       2.16.  $16.67mm/s^2 \rightarrow$   
 1.11.  $75.6^\circ, 128.3^\circ, 41.9^\circ$       2.17.  $(2.0\mathbf{i}+3.45\mathbf{j})m/s$   
 $(-0.12\mathbf{i}+5.58\mathbf{j})m/s$   
 1.12.  $79.62^\circ$       2.18.  $17.89m/s$   
 1.13.  $3m, 2.92m$       2.19.  $v_{max}=31.2m/s, t=8.66s$   
 1.14.  $9.2m, 8.6m, 7.8m$       2.20.  $21m/s$   
 1.15.  $8.17m, 97.7^\circ$       2.21.  $57.2s$   
 1.16.  $h = 0.487$       2.22.  $8.54m/s, 28.0s$   
 1.17.  $h = 2.29^\circ$   
 1.18. Si  $A=D$  y  $E=A \times B$   
 $F = D \times E = A \times (A \times B)$   
 1.19.  $-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$
- 2.1.  $(-27\mathbf{i}+223\mathbf{j})m,$       3.1. a)  $2.45m/s^2$ , b)  $47.4kg$   
 $(-24\mathbf{i}+216\mathbf{j})m/s,$       3.2. a)  $76.45kg, 593N$   
 $(-10\mathbf{i}+144\mathbf{j})m/s^2$       b)  $7470m/s$
- 2.2.  $(6.25\mathbf{i}+11.17\mathbf{j})m$       3.3. a)  $8.38m/s^2$    
 $(\mathbf{i}+10\mathbf{j})m/s$       b)  $1.181m/s^2$    
 c).  $0 m/s^2$
- 2.3. a)  $-22.5m^3/s^2$ , b)  $6.32m/s$       3.4. a).  $0.344m/s^2$    
 $T = 4.82N$   
 2.4.  $40.1^\circ$   
 2.5.  $5m/s^2$       3.5.  $5.53 m/s^2$  
- 2.6.  $\omega = 0.1875rad/s$    
 $\alpha = 0.0406rad/s^2$  

- 3.6.  $6.53\text{m/s}^2$   $\nwarrow 957^\circ$
- 3.7.  $18.79\text{N}$ ,  $\alpha=1.962\text{rad/s}^2$
- 3.8.  $353\text{N} \rightarrow$
- 3.9. a)  $m(3\omega^2-7.36)$ ,  
b)  $1.566\text{rad/s}$   
c)  $1.401\text{rad/s}$
- 3.10.  $0.259$
- 3.11.  $15.00\text{N}$
- 3.12.  $2.71\text{m/s}$
- 3.13. a)  $0.815$ , b)  $22.5^\circ$
- 3.14.  $a_A=4.91\text{m/s}^2 \uparrow$ ,  
 $a_B=2.45\text{m/s}^2 \downarrow$ ,  
 $a_C=0$
- 3.15. a)  $11.77\text{N} \rightarrow$ , b)  $23.5\text{N} \rightarrow$
- 3.16.  $0.896\text{m/s}^2$   $\nwarrow_{12}^5$
- 3.17.  $(-55.62i+47.31j)\text{N}$
- 3.18.  $1\text{m}$ ,  $3.14\text{s}$
- 3.19. a)  $0\text{m/s}$ ,  $-4.1\text{m/s}^2$   
b)  $0.776\text{m/s}$ ,  $-3.08\text{m/s}^2$   
c)  $1.17\text{m/s}$ ,  $0\text{m/s}^2$
- 3.20.  $3.84\text{kNm}$
- 3.21.  $16.54\text{kNm}$
- 3.22.  $52.5\text{ rpm}$ ,  $67.5\text{ rpm}$
- 3.23.  $0.67\text{N/mm}$ ;  $125.8\text{ rpm}$
- 3.24.  $33.25\text{mm}$  de radio a  $78^\circ$  del  
radio de la masa de  $5\text{kg}$
- 3.25.  $11.42\text{ kN}$ ;  $22.85\text{ kN}$
- 3.26.  $B_x=0$ ,  $B_y=9390\text{N}$ ,  $A_x=0$   
 $A_y=2450\text{N}$
- 3.27.  $0.12\text{m/s}$
- 3.28.  $11.8\text{m/s}$
- 3.29.  $6.98\text{m/s}$
- 3.30.  $4.33\text{Mg}$
- 3.31.  $13\text{m/s}$
- 3.32. a)  $NO$ ,  $v_{\min}=6.53\text{m/s} \rightarrow$   
b)  $11.94\text{m/s} \rightarrow$
- 3.33. a)  $v_A=4\text{m/s} \rightarrow$ ,  
 $v_B=22.0\text{m/s} \rightarrow$   
b)  $12.8\text{kN} \rightarrow$
- 3.34.  $0.314\text{m/s}$   $\nwarrow 72.8^\circ$
- 3.35.  $17.55\text{m/s}$   $\nwarrow 9.98^\circ$
- 3.36.  $(20i-30j-22k)\text{Nms}$
- 3.37. ?
- 3.38. a)  $(13\text{mL}^2 \dot{\theta}k)\text{kgm}^2\text{ s}^{-1}$   
b)  $\frac{-5g \text{ sen } \theta}{13L}(\text{s}^{-2})$
- 3.39.  $20.5\text{kg}$
- 3.40.  $181\text{Nm}$
- 3.41.  $2.27\text{s}$
- 3.42.  $3.15\text{m/s}$
- 3.43.  $34.4\text{m}$
- 3.44.  $2.5\text{ MJ/s}$  o  $2.5\text{ MW}$
- 3.45.  $4.15\text{m/s}$
- 3.46.  $17.04\text{m/s}$
- 3.47.  $89.7\text{kN/m}$
- 3.48.  $300\text{rad/s}$ ;  $12\text{s}$
- 3.49.  $286\text{mm}$
- 3.50.  $3.9\text{kW}$
- 3.51. a)  $4.90\text{j}$ , b)  $22.1\text{mm}$   
c)  $58.9\text{N}$
- 3.52. a)  $3.74\text{m/s} \leftarrow$ ;  $43.4\text{N}$
- 3.53.  $5.11\text{m/s}$   $\nwarrow_{4}^3$
- 3.54.  $1364\text{N/m}$
- 3.55.  $266\text{mm}$
- 3.56.  $0.701\text{m}$
- 3.57. a)  $26.5\text{kN}$ , b)  $30.5\text{ kW}$
- 3.58. a)  $41.23\text{m/s}$ ; b)  $2.91\text{m}$
- 3.59.  $0.974\text{m/s}$
- 3.60.  $336\text{W}$
- 3.61.  $3.84\text{ kNm}$
- 3.62.  $5.65\text{rad/s}$
- 4.1.  $84.2\text{N}$
- 4.2.  $22.5\text{kN} \downarrow$   $3.44\text{m}$  de  $A \rightarrow$
- 4.3.  $\theta = \cos^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{2a}{L}}\right)$
- 4.4.  $2.890\text{kN}$
- 4.5.

- 4.6.  $FH=13.9kN(C)$ ;  $GI=14.4kN(T)$   $5.15. 104.8cm/s$    
 $HG=1.15kN(C)$ ;  $IK=13.3kN(T)$
- 4.7. 20 000lb (20 kips)
- 4.8. 20.07m;  $d=0.72m$
- 4.9. 62.9N, 2.43m
- 4.10. 1835N; 234m
- 4.11.  $A=8790N$    
 $B_x=12596N$ ,  $B_y=2196N$
- 4.12.  $P=18.79N$
- 4.13.  $C_x=3.92kN$ ,  $C_y=-15.70kN$    
 $E_x=-3.92kN$  ,  $E_y=21.58kN$
- 4.14. 60.95°
- 4.15. 14.72N
- 5.1. a)  $\omega_{B/C}=4rad/s$    
 $\omega_{C/D}=10rad/s$    
 b)  $V_E=1.868m/s$  
- 5.2.  $v_C=2660 mm/s$
- 5.3.  $\omega_{A/B}=0.50k rad/s$   
 $v_{C'}=600(0.8i-0.6j)mm/s$
- 5.4. a)  $v_B=1.219m/s$    
 b)  $\omega_{OA}=6.25 rad/s$  
- 5.5.  $v_B=56cm/s$
- 5.6. a)  $\omega_B=4.5 rad/s$    
 b)  $v_D=525mm/s$  
- 5.7. a)  $v_A=1323 mm/s$    
 b)  $a_A=9540mm/s^2$  
- 5.8.  $a_{B/D}=48.3cm/s^2$  
- 5.9.  $\alpha_{BC}=3.07 rad/s^2$  
- 5.10.  $\omega_{OA}=6 rad/s$    
 $\alpha_{OA}=11.43 m/s^2$  
- 5.11.  $a_C=1369mm/s$
- 5.12.  $\omega_{AB}=2.357 rad/s$    
 $\alpha_{AB}=0.265 rad/s^2$  
- 5.13. a) 4.0s; b) 660mm/s 
- 5.14. a)  $\omega_B=\frac{5\pi}{6}rad/s$    
 $=25 rpm$    
 b) 18.51cm/s 
- 6.1.  $A=B=12.26N$
- 6.2.  $4.69 m/s^2$  
- 6.3.  $11.7m/s^2$ , a no razonable  
 al menos que  $\mu \gg 1.2$
- 6.4. a)  $\alpha=4.20rad/s^2$    
 b)  $A_n=63.0N$    
 $A_t=8.41N$  
- 6.5. a)  $\alpha=1.44rad/s^2$    
 b)  $A_n=265N$    
 $A_t=16.06N$  
- 6.6.  $\alpha=17.84rad/s^2$    
 $T_1=17.84N$   sobre A  
 $T_2=62.4N$   sobre B
- 6.7.  $a_A=0.496m/s^2$
- 6.8.  $K_G=779mm$
- 6.9.  $T_A=5mg/8 (N)$   
 $T_B=3 mg/8 (N)$
- 6.10.  $R_A=(-34i+98.1j)N$   
 $R_A=103.8N$  
- 6.11. a)  $a_G=1.25 m/s^2$    
 b)  $\mu_{min}=0.82$
- 6.12. a)  $\mu_{min}=0.250$   
 b)  $a_G=3.924 m/s^2$
- 6.13. 112.0 N 
- 6.14.  $a_B=2.04 m/s^2$    
 $a_C=7.77 m/s^2$  
- 6.15.  $\alpha_B=6.13 rad/s^2$  
- 6.16.  $a_G=4.20 m/s^2$    
 $\alpha=16.82 rad/s^2$  
- 6.17.  $\omega_f=22.9rad/s$  
- 6.18. a)  $a_G=1.667m/s^2$    
 b)  $F=75N$  
- 6.19.  $a_G=(\frac{2}{5}gi-\frac{1}{5}gj)m/s^2$   
 $a_G=4.39m/s^2$  
- 6.20.  $\alpha=0.1697rad/seg^2$  



# INDICE

## A

- Aceleración**, 36, 37  
 Angular, 45, 111  
 de Coriolis, 46  
 de la gravedad, 84  
 diagrama de, 269, 277  
 en componentes cartesianas, 37-58  
 en componentes polares (radial y transversal), 45  
 en componentes de trayectoria (normal y tangencial), 43, 44  
 imagen de, 270  
 relativa (ver movimiento relativo), 46, 47, 285  
 ángulo de fase, 108  
 de un sistema de partículas, 144  
 de una partícula, 143

**Centro de gravedad**, 213

**Centro de masa**, 95, 213

**Centro instantáneo de rotación**, 175, 268, 275

**Centroide de volumen**, 215

**Centroide de área**, 216

**Centroide de longitud**, 216, 218

**Centroide de cuerpos compuestos**, 216, 217  
 Centroide de algunas formas geométricas Tabla 4.1.  
 comunes, 221

**Cinemática**, 1

**Cinética**, 1

**Coefficiente de restitución**, 149

**Coefficiente de rozamiento**, 82, 83

**Componentes de un vector**, 8

**Conservación de:**  
 cantidad de mov. angular, 156  
 cantidad de mov. lineal, 145  
 la energía, 181

**Cosenos directores**, 9

**Cuerpo rígido**, 3, 263

**Curvatura:**  
 centro de, 43  
 radio de, 43  
 relación de radio de curvatura con, 332

## B

- Balaceo de masas**, 116  
 en rotación, 118,  
 balanceo estático, 118, 119, 120  
 balanceo dinámico, 118, 119, 120  
 brazo portador, 272, 292-293

## C

- Cable:** (cables flexibles): 237  
 catenaria, 238, 239  
 con cargas concentradas, 237, 255, 256  
 flecha de un, 237  
 flexible, 237  
 luz de un, 238, 239  
 parabólico, 237, 238
- Cantidad de movimiento** (momentum): 78, 143  
 Angular: 154  
 conservación de, 156  
 de un cuerpo rígido, 166  
 de un sistema de partículas, 173  
 de partículas, 155  
 Lineal: 143, 144  
 conservación de, 145

## D

**Desplazamiento**, 35, 49, 50

**Diagrama de cuerpo libre**, 99  
*dcl*, 99, 100,

**Dimensiones fundamentales:**  
 Fundamentales, 86, 87



## Principios de Mecánica para Ingeniería

para sistemas de unidades  
absolutos, 86  
para sistemas de unidades  
gravitacionales, 86

### Dinámica, 1

## E

### Energía 176

Cinética, 177

cinética angular, 178

cinética lineal, 177

Elástica (deformación), 178, 179

Potencial, 179

Principio de conservación, 181, 182

### Equilibrio estático, 201

de un sistema de fuerzas

coplanares, 223

de un sistema de fuerzas

tridimensional, 224, 226

### Estructuras planas: 227

Armaduras, análisis de, 228

método de las secciones, 229, 230

métodos de los nodos

o uniones, 229

Bastidores (marcos y

maquinas simples) 234

método de los miembros 235, 236

### Escalar, cantidad, 3

### Estática, 1

## F

### Frecuencia de m. a. s, 109

### Fuerza/s 2, 81, 92

Adición (suma) de, 94, 201

conservativa, 179, 180, 182

coplanares, 204, 205

distribuidas, 212, 241

equivalente de, 204

de gravedad, 81, 84, 85

internas, 94, 95, 229, 233, 248

momento de, 81, 202, 203

no conservativa, 181, 182

de rozamiento, 81, 82

## G

### Grado de libertad, 263

## Gravitación

Constante universal de la 84

## H

### Hélice 4

Hertz 92, 109

Hooke, ley de 80

## I

### Impacto 147

central directo, 148

central oblicuo, 151

coeficiente de

restitución, 149, 150

perfectamente elástico, 148, 150

perfectamente plástico, 150

### Impulso

angular, 156

lineal, 143, 158

### Impulso angular

y momento angular

principio del, 156, 165

Impulso y cantidad de

movimiento lineal,

principio del, 143, 160

### Inercia, 2

momento de, 299, 340

de un cuerpo rígido respecto

a un eje, 300, 340

teorema ejes paralelos, 300, 340

teorema ejes

perpendiculares, 301, 341

### Inercial, sistema de

referencia, 93

### Integración aproximada:

regla de Simpson, 337

regla del trapecio, 337

## J

### Juntas deslizantes, 269

### Joule, 92

## K

### Kelvin, 90

### Kilogramo, 90

**L**

**Ley de la Gravitación Universal de Newton**, 84  
**Leyes del movimiento de Newton**, 77, 78

**M**

**Magnitud**, 3, 7, 8  
**Marco de referencia**, 2  
 inercial o newtoniana, 2, 93  
**Mecánica**, 1  
**Momento**: 14  
 de fuerza, 81, 202  
 de un par de fuerzas, 203  
 del momentum (cantidad de movimiento lineal) 154  
 torcional, 244, 246  
 flexionante, 244, 246  
**Movimiento**:  
 angular, 111  
 armónico simple (mas), 107  
 amplitud, 108  
 ángulo de fase en, 108  
 frecuencia en, 109  
 período en, 109  
 De un cuerpo rígido en un plano, 263, 299  
 relativo entre dos puntos, 265  
 del centro de masa, 299  
 De una partícula en un plano, 37  
 referido a coordenadas cartesianas, 37  
 referido a coordenadas de trayectoria, 43  
 referido a coordenadas polares, 45  
 Relativo a partículas en un plano, 46  
 independiente de, 46, 47  
 dependientes de, 48  
 Unidimensional, 49  
 métodos gráficos para, 50, 51

**N**

**Newton, ley de la gravitación universal**, 84

**Newton, leyes para el movimiento**, 77, 78  
**Newton, unidad de fuerza**, 92  
**Notación**:  
 movimiento relativo, 46  
 movimiento vectorial, 7

**P**

**Partícula**, 3  
**Péndulo cónico**, 115  
**Péndulo simple**, 105, 165  
**Período**, 108  
**Peso**, 85  
**Posición (localización) de una partícula o punto**, 3  
 en coordenadas unidimensionales, 4  
 en coordenadas bidimensionales cartesianas, 4  
 en coordenadas bidimensionales polares, 4  
 en coordenadas tridimensionales rectangulares, 5  
 en coordenadas tridimensionales cilíndricas, 5  
 en coordenadas tridimensionales esféricas, 5  
**Posición relativa**, 46  
**Posición, vector de**, 6  
**Potencia mecánica**, 175, 176  
 unidades de, 176  
**Presión**, 83, 212  
**Principio de**:  
 conservación de la cantidad de movimiento angular, 156  
 conservación de la cantidad de movimiento lineal, 146  
 conservación de la energía mecánica, 181  
 impulso y cantidad de movimiento angulares, 156  
 impulso y cantidad de movimiento lineales, 143  
 trabajo y energía cinética, 173  
**Proyectil**:  
 movimiento de un, 40

**R****Radio:**

de curvatura, 43

de giro, 113

**Rapidez, 36****Restitución, coeficiente de, 149****Resultante, 201**de un sistema de fuerzas  
coplanares, 204de un sistema de fuerzas  
espaciales, 205**Rodadura sin****deslizamiento, 47****Rotación respecto a un eje  
fijo, 300****Rozamiento:**

ángulo de, 83

cinético, 82

coeficiente de, 82, 83

cinético, 82, 83

estático, 82, 83

definición de, 82, 240

estático, 82

leyes del, 241, 242

**S****Sistema de coordenadas:**

Unidimensionales, 4

Bidimensionales, 4

Cartesianas de, 4

Polares de, 4

Tridimensional:

rectangulares, 5

cilíndricas, 5

esféricas, 5

**Sistemas de fuerzas:**

coplanares resultante de, 204

espaciales resultante de, 205

**Sistemas de unidades: 87**

Sistemas métricos:

*CGS* absoluto, 87, 88

Sistema internacional

*SI*, 89, 90, 91, 92*Mkgs* gravitacional, 88

Sistemas británicos: 87

*(f, s, s)* gravitacional, 88, 89*(f, p, s)* absoluto, 88, 89**T****Tablas:**de centroides de algunas formas  
geométricas comunes, 221 (T- 4.1)de fuerzas de restricción que  
aportan soportes y conexiones dealgunos cuerpos, de conversión  
de unidades, 225 (Tabla – 4.3)de prefijos para múltiplos y  
submúltiplos de unidades, 91de centros de masa y momentos  
de inercia, 341**Teorema de los ejes****paralelos, 300, 340****Teorema de los ejes****perpendiculares, 301, 341****Tiempo, 2****Trabajo, 172, 173**

realizado por una fuerza, 174

realizado por un par de fuerzas, 174

realizado por un resorte lineal, 179

relación con la energía

potencial, 179

**Tren de engranes de dientes****rectos, 271**

Engrane de dientes rectos:

diámetro de paso de, 271

modulo de un, 271

paso circular de un, 271

Relación de velocidad de un, 271

Con movimiento epicicloidial, 272

Brazo portador para un tren, 272

**Triada, 5****U****Unidades, 85, 333**

conversión de, 333, 334, 335

del Sistema Británico, 87, 88,

89, 330, 335

fundamentales del Sistema

*SI*, 89, 90

complementarios del Sistema

*SI*, 90

prefijos para múltiplos y

submúltiplos de, 91

**Unidades derivadas del *SI*, 92**

## V

**Vector (es)** 3

- adición o suma de, 6, 329
- componentes de un, 8
- de posición, 6
- deriva de un producto de, 18, 19, 332
- magnitud de un, 7, 8
- módulo de un, 8
- producto escalar de dos, 10, 330
- producto vectorial de dos, 11, 330, 331
- triproducto escalar de, 14, 331
- triproducto vectorial o cruz de, 16, 331
- unitario, 8, 9

**Velocidad** 35, 37

- angular, 45, 61
- componentes cartesianos de un plano de la, 37
- componentes de trayectoria en un plano de la, 36
- componentes polares de la, 45
- diagrama de la, 266
- imagen de la, 268

**Velocidad relativa:**

- de dos puntos arbitrarios, 46, 47
- de dos puntos de un cuerpo Rígido, 265, 266



## BIBLIOGRAFÍA

- ☞ Bedford & Fowler; **Mecánica para la Ingeniería**; Estática y Dinámica Vol. I y II; Ed. Pearson Educación, México, 2000.
- ☞ Beer and Johnston, **Mecánica Vectorial para Ingeniería**; Estática y Dinámica Vol. I y II; Ed. Mc Graw Hill, México, 2004.
- ☞ D. J. Mc Gill y W. W. King; **Mecánica para Ingeniería y sus Aplicaciones**; Vol. I y II; Ed. Grupo Editorial Iberoamerica, México, 1989.
- ☞ Higdon-Stiles-Davis-Evces-Weese; **Engineering Mechanics**; Estática y Dinámica Vol. I y II; Ed. Prentice may, Inc.; USA, 1979.
- ☞ Jensen-Chenoweth; **Applied Engineering Mechanics**; Estática y Dinámica un volumen; Ed. Mc Graw Hill, USA, 1996.
- ☞ R. C. Hibbeler, **Engineering Mechanics**; Estática y Dinámica Vol. I y II; Ed. Prentice Hall, Inc.; USA, 1995.

